

14. gyakorlat anyagához további példák nagy számok erős törvénye és a CHT alkalmazására

1. Integrálás Monte Carlo módszerrel

$$\int_0^1 \underbrace{e^{\sin(x^3+5x+1)}}_{t(x)} dx = ?$$

Legyen X egy $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (0,1) \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor $Y=t(x)$ várható értéke

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \cdot f(x) dx = \int_0^1 t(x) dx$$

azaz a fenti integrál.

A nagy számok erős törvénye értelmében, ha X_1, \dots, X_n független $\varepsilon(0,1)$ változók és $Y_i = t(X_i)$, $1 \leq i \leq n$, akkor Y_i - k is függetlenek és

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \longrightarrow E(Y) \quad 1 \text{ valószínűséggel, ha } n \rightarrow \infty$$

Így Y_i - k számtani közepe elég nagy n - re elég jó közelítést ad a fenti integrálra.

2. Ruhatár fogások

Egy 1000 férőhelyes színház bal és jobb bejáratához véletlenszerűen érkeznek a vendégek, tegyük fel, hogy egymástól függetlenül $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel. A bal és jobboldali bejáratnál is van 1-1 ruhatár. Hány fogast rakjanak a ruhatárba, ha azt szeretnék, hogy a téli teltházassal is 1% legyen annak a valószínűsége, hogy valaki nem tudja betenni abba a ruhatárba a kabátját amelyik bejáraton érkezik?

X : bal oldali ruhatárhoz érkező vendégek száma

Y : jobb oldali ruhatárhoz érkező vendégek száma = $1000 - X$

Tekintsük az X valószínűségi változót. Ezt egy ezredrendű, $\frac{1}{2}$ valószínűségű binomiális eloszlásnak tekinthetjük: $\sim B_{1000}(\frac{1}{2})$,

melynek várható értéke:

$$E(X) = n \cdot p = 500$$

szórása pedig:

$$D(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 5 \cdot \sqrt{10}$$

Jelöljük f - el a fogások számát. Ekkor:

$$P(X > f \text{ vagy } 1000 - X > f) = 0.01$$

Komplementer eseménnyel számolva:

$$P(X \leq f \text{ és } 1000 - X \leq f) = 0.99$$

Azaz:

$$P(1000 - f \leq X \leq f) = 0.99$$

Standardizálás után, valamint kihasználva a ϕ függvény szimmetriáját:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{500-f}{5\sqrt{10}} \leq \frac{x-500}{5\sqrt{10}} \leq \frac{f-500}{5\sqrt{10}}\right) &= \phi\left(\frac{f-500}{5\sqrt{10}}\right) - \left(1 - \phi\left(\frac{f-500}{5\sqrt{10}}\right)\right) = \\ &= 2 \cdot \phi\left(\frac{f-500}{5\sqrt{10}}\right) - 1 = 0.99 \\ \phi\left(\frac{f-500}{5\sqrt{10}}\right) &= 0.995 \\ &\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2.58} \end{aligned}$$

Ebből a fogások száma már meghatározható:

$$f = 2.58 \cdot 5 \cdot \sqrt{10} + 500 = 540.79 \cong \mathbf{541}$$

3. Overbooking – Túlkönyvelés

Túlkönyvelést a légitársaságok alkalmazzák: több jegyet adnak el, mint ahány hely van a gépen.

300 férőhelyes repülőgépre a légitársaság valamivel több jegyet ad el, arra számítva, hogy az utasok nem mind jelennek meg az adott időben. Tegyük fel, hogy az utasok egymástól függetlenül 0.2 valószínűséggel nem jelennek meg az adott időben. Hány jegyet adhatnak el legfeljebb 1% legyen a valószínűsége annak, hogy egy utas nem fér fel a járatra?

Legyen n az eladott jegyek száma, X pedig egy valószínűségi változó, amely azt mondja meg, hogy a jeggyel rendelkező személyek közül hány megy oda időben. X egy n -ed rendű binomiális eloszlású változónak tekinthető $p=0.8$ valószínűséggel, ezt normális eloszlással közelítjük:

$$\sim B_n(0.8) \sim N(n \cdot 0.8, n \cdot 0.8 \cdot 0.2)$$

A feladat célkitűzése matematikai alakban megfogalmazva:

$$P(X > 300) \leq 0.01$$

Ebből:

$$P(X \leq 300) = \phi\left(\underbrace{\frac{300-0.8 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 0.4}}}_{2.345}\right) \geq 0.99$$

A ϕ – táblázatban található 2.34-es érték leolvasása után egy másodfokú egyenlethez jutunk, hiszen:

$$\frac{300 - 0.8 \cdot n}{\sqrt{n} \cdot 0.4} \geq 2.345$$

$n = x^2$ helyettesítéssel, és rendezve:

$$0 \geq 0.8x^2 + 0.938x - 300$$

Az egyenletet a másodfokú megoldó képlettel megoldva két eredményt kapunk, a negatív megoldást figyelmen kívül hagyhatjuk, így x -re:

$x = 18.78$ adódik, amibe visszahelyettesítve az eredeti változónkat:

$$\mathbf{n = x^2 \cong 353}$$

Azaz 353 jegyet adhat el maximum a légitársaság a feladatban kitűzött feltétel teljesítéséhez.