Eredmények

2,

A és B halmaz uniójának valószínűsége felírható az alábbi módon:

$$P(A \cup B) \stackrel{\text{def}}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

Ebből:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

egyenlőtlenség adódik, ehhez még figyelembe véve Kolmogorov első axiómáját (valószínűségek nemnegativitása), azt kapjuk, hogy A és B halmazok metszetének alsó határa a 0, és a $P(A) + P(B) - 1$ kifejezések maximuma. Felső határt a metszetnek természetesen a kisebb valószínűséggel rendelkező halmaz szab, így a felső határ a két esemény valószínűségeinek minimuma:

$$\mathbf{max}\,\{\mathbf{0}, \boldsymbol{P(A)} + \boldsymbol{P(B)} - \mathbf{1}\} \leq \boldsymbol{P(A \cap B)} \leq \mathbf{min}\,\{\boldsymbol{P(A)}, \boldsymbol{P(B)}\}$$

Hasonló megfontolásokkal adódik a két halmaz uniójára vonatkozó alsó, illetve felső határ: a $P(A \cup B)$ kifejezésnek akkor lesz minimuma, ha az egyik esemény részeseménye a másiknak, azaz az egyik halmaz részhalmaza a másiknak. Felső határt szab a két esemény valószínűségeinek összege, de természetesen nem lehet 1-nél nagyobb:

$$\mathbf{max}\,\{\boldsymbol{P(A)}, \boldsymbol{P(B)}\} \leq \boldsymbol{P(A \cup B)} \leq \mathbf{min}\,\{\mathbf{1}, \boldsymbol{P(A)} + \boldsymbol{P(B)}\}$$

Az ***a*** illetve ***b*** feladatokra így a következő feltételek adódnak:

$$\mathbf{0.4} \leq \boldsymbol{P_a(A \cup B)} \leq \mathbf{0.7}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{P_a(A \cap B)} \leq \mathbf{0.3}$$

$$\mathbf{0.9} \leq \boldsymbol{P_b(A \cup B)} \leq \mathbf{1}$$

$$\mathbf{0.6} \leq \boldsymbol{P_b(A \cap B)} \leq \mathbf{0.7}$$

3,

a) Az első dobásunk bármennyi lehet, a második dobásunkkor viszont már csak 1 szám jó a 6-ból, így:

$$\boldsymbol{P(A)} = 1 \cdot \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

b) Az előző részfeladat komplementer eseménye, hiszen ha a két számunk nem ugyanaz, akkor csak különböző lehet, ezért:

$$\boldsymbol{P(B)} = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{5}{6}}$$

c) Az első dobásunk az a) feladathoz hasonlóan szintén bármennyi lehet, mivel két dobásból a 7-et bármilyen első dobással ki lehet hozni, de első dobásonként természetesen csak egy féleképpen, ezért a második dobás valószínűsége itt is $\frac{1}{6}$ lesz:

$$\boldsymbol{P(C)} = 1 \cdot \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

3,

a) A hat dobásból az első bármilyen szám lehet, tekintve, hogy bármilyen kezdő dobás után tudunk 5 másik, attól különbözőt dobni. A második dobásra a 6 számból természetesen már csak 5 lesz jó, a harmadikra 4, és így tovább, az utolsó dobásunk „különbözőségének" valószínűsége $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$ lesz. Így:

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{5!}{6^6}}$$

b) A 6-os dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$, ennek komplementer eseménye ha ettől különböző számot dobunk, így a további 5 dobás valószínűsége egyenként $\frac{5}{6}$. Ezzel:

$$\boldsymbol{P(B)} = \boldsymbol{\frac{1}{6}} \cdot \left(\boldsymbol{\frac{5}{6}}\right)^{\boldsymbol{5}}$$

c) A 6 dobásunkból bármelyik kettő lehet 6-os, ezeknek egyenként a valószínűsége a fent látott $\frac{1}{6}$, és a 6 dobásból ezt a 2-t $\binom{6}{2}$ módon lehet:

$$\boldsymbol{P(C)} = \binom{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{2}} \cdot \left(\boldsymbol{\frac{1}{6}}\right)^{\boldsymbol{2}} \cdot \left(\boldsymbol{\frac{5}{6}}\right)^{\boldsymbol{4}}$$

4,

a) A feladat hasonló az előző feladat **a)** részéhez. Itt is az első esetben még bármelyik nevet húzhatja az n ember közül, a második esetben azonban már csak $\frac{n-1}{n}$ a valószínűsége, hogy új nevet húz a börtönőr. Ez így megy az n-edik húzásig, ahol már csak $\frac{1}{n}$ annak a valószínűsége, hogy ott is új ember nevét húzza ki. Ezért:

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} = \boldsymbol{\frac{n!}{n^n}}$$

Ez a kifejezés $n \to \infty$ esetén természetesen 0-ba tart.

b) Dolgozzunk komplementer eseménnyel; mennyi a valószínűsége, hogy nem szabadul ki? Minden egyes húzásnál $\frac{n-1}{n}$ a valószínűsége, hogy nem a maffia főnökének nevét húzza ki a börtönőr, mivel n húzás van (és komplementer eseményt néztünk), ezért:

$$\boldsymbol{P(B) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}}$$

A törtet n-el egyszerűsítve: $1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, ami $n\to\infty$ esetén $1-\frac{1}{e}$-be tart ($\cong 0.63$).

c) Legyen A esemény, hogy a főnök kiszabadul, B esemény, hogy a barátja kiszabadul. A De Morgan azonosságok felhasználásával:

$$\boldsymbol{P(A\cap B)} = 1-P(\overline{A\cap B}) = 1-P(\bar{A}\cup\bar{B}) = 1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})] =$$
$$= 1-\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n-\left(\frac{n-2}{n}\right)^n\right]$$
$$= \boldsymbol{1-2\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(\frac{n-2}{n}\right)^n}$$

$n\to\infty$ esetén következőképp alakulnak a tagok: Az $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ - es tag a fentihez hasonlóan ismét $\frac{1}{e}$-hez fog tartani, az $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n$ -es tag esetén egy kis átrendezés után azt kapjuk, hogy: $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$, ami pedig $\frac{1}{e^2}$-hez fog tartani. Így a teljes kifejezés $n\to\infty$ esetén a következő értékhez tart:

$$1-2\cdot\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}\cong\boldsymbol{0.4}$$

5,

a) 3 kockával 17-et dobni 2 db 6-os és egy db 5-ös dobásával tudunk. A 3 kockából a 2 db 6-ost (vagy az 1 db 5-öst) $\binom{3}{2}$-féleképp tudjuk kiválasztani. Mind a 6-os, mind az 5-ös dobások valószínűsége $\frac{1}{6}$, ezért a 17-es dobás valószínűsége:

$$\boldsymbol{\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3}$$

b) Vegyük észre, hogy a kockák összegének eloszlása szimmetrikus (pl. 3-as, és 18-as összeg dobásának valószínűsége ugyanannyi), a szimmetriatengely pedig pont 10.5-nél helyezkedik el. Ez azt jelenti, hogy 10-es összegnél kisebb vagy egyenlőt dobni ugyanakkora valószínűséggel fogunk, mint 10-nél nagyobbat, vagyis a két tartomány valószínűsége megegyezik : **50%**.

$$\boldsymbol{P(x>10)=0.5}$$

6,

Számoljunk komplementer eseményt: Mi a valószínűsége annak, hogy nincs két olyan ember a tankörben, akik egy napon születtek?

$$P(A)=1-P(\bar{A})$$

Az első ember még bármelyik nap születhetett, $\frac{365}{365}=1$ a valószínűsége, hogy nem született mással egy napon. A második embernek már csak a többi 364 nap marad, azaz: $\frac{364}{365}$. Ahogy haladunk előre, minden embernél eggyel csökken a számláló, hiszen az évből eggyel-eggyel kevesebb nap marad szabadon. 20 ember van a tankörben, ezért: $P(\bar{A})=\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{346}{365}$

$$\boldsymbol{P(A)} = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left[\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{346}{365}\right] \cong \mathbf{41,2}\%$$

8,

Mivel *n!* féle táncrendet tudunk létrehozni, annak a valószínűsége, hogy mindenki a párjával táncol:

$$P(mindenki\ a\ házastársával\ táncol) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!}$$

A_i : az i-edik férfi a feleségével táncol

Legyen P_n a keresett valószínűségünk. Ez az eset akkor következik be, ha egyik házaspár sem táncol együtt, azaz mindenki más házastársával táncol. A De Morgan azonosságokat felhasználva:

$$P_n = P(\overline{A_1}\overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = P\left(\overline{\sum_{\iota=1}^{n} A_\iota}\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot S_k$$

Ahol S_k azon valószínűségek összege, amikor k db pár együtt táncol (ezeket rendre $\binom{n}{k}$-féleképp tudjuk kiválasztani):

$$\boldsymbol{S_k} = \sum_{i \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}!}$$

Ezt az eredményt behelyettesítve:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$\boldsymbol{P_n} = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{(\mathbf{-1})^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}$$

Az utolsó lépés azért tehető meg, mert $0! = 1! = 1$.

Azaz a keresett valószínűségünk:

$$\boldsymbol{P_n} = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{(\mathbf{-1})^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}$$

9,

Az előző feladat mintájára belátható, hogy annak a valószínűsége, hogy senki nem húzza ki a saját nevét:

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{k=0}^{20} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

Ennek a komplementer eseményét keressük, azaz:

$$\boldsymbol{P(Van\ aki\ a\ saj\text{á}t\ nev\text{é}t\ h\text{ú}zta) = 1 - P(A) = 1 - \sum_{k=0}^{20} \frac{(-1)^k}{k!}}$$