

A3 I. Témakör. Gyakorló feladatok

Oldja meg a következő diff. egyenleteket!

Egzakt:

$$1. e^y + (xe^y - 2y)y' = 0 \quad 3. 2x^3 - xy^2 + (2y^3 - x^2y)y' = 0 \quad 5. \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) dy = 0$$
$$7. 1 + x\sqrt{x^2 + y^2} + (y\sqrt{x^2 + y^2} - y)y' = 0 \quad 9. \ln(y^2 + 1) dx + \frac{2y(x-1)}{y^2 + 1} dy = 0$$

Szétválasztható:

$$11. xy' + y = y^2 \quad 13. xy dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0$$
$$15. \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 + x^2} y' \quad 17. y' \sin x = y \ln y, \quad y(0) = 1$$

Változókbán homogén, $u = y/x$ helyettesítéssel:

$$29. (3xy - 2x^2)y' + xy - 2y^2 = 0 \quad 31. xe^{y/x} + y = xy'$$
$$33. y = xy' + \sqrt{x^2 + y^2} \quad 35. xy' = y - x \cos^2(y/x)$$

Elsőrendű lineáris:

$$37. y' = xy + x^3, \quad y(0) = 1 \quad 39. y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x \quad 41. y' + y \tan x = \sin 2x$$
$$43. y' + y = \sin 2x \quad 45. y' \sin x - y \cos x = e^x \sin^2 x$$

Hiányos másodrendű:

$$55. xy'' = y' \quad 57. y'' = \frac{y'}{x} + x \quad 59. 2xy'y'' = (y')^2 + 1$$
$$61. 4y'' - y = 0 \quad 63. y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}} \quad 65. y'' = 2yy'$$
$$67. 2y'' = 3y^2, \quad y(-2) = y'(-2) = 1 \quad 69. x^2 y'' = 2xy' - 3, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 3$$

Másodrendű lineáris, ahol y_1 egy fundamentális megoldása a homogén egyenletnek:

$$71. x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = (x \ln x - x)^2, \quad y_1 = x$$
$$73. y'' + 4y = \frac{8}{\cos 2x}, \quad y_1 = \sin 2x$$
$$75. 2(x+1)^2 y'' - (x+1)y' + y = x, \quad y_1 = \sqrt{x+1}$$

Másodrendű lineáris, konstans együtthatókkal:

$$77. y'' - 7y' + 10y = 0 \quad 79. y'' - 6y' = 0 \quad 81. y'' + 6y' + 9y = 0 \quad 83. y'' - 2y' + 2y = 0$$
$$85. y'' + y = 0 \quad 87. y'' - 2y' - 3y = 2 \cos 3x \quad 89. y'' + y = \tan x$$
$$91. y'' + y = -4 \cos x \quad 93. y'' - y' - 2y = 8e^{3x} \quad 95. y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$$
$$97. y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos \frac{x}{2} \quad 99. y'' - 9y = 3 \sinh 3x$$

Alkalmazza az ismert egzisztencia és unicitás tételt a 17. és 37. feladatbeli kezdeti érték problémákra!

Vázolja a következő autonóm diff. egyenletek iránymezőjét és fázisdiagramját! Jellemezze az egyensúlyi megoldásokat (stabil, instabil, félig stabil):

$$a. y' = (y+1)(y-2)(y-4) \quad b. y' = (y+1)^2(y-2)(y-3) \quad c. y' = (y+1)^2(y-2)^2 \quad d. y' = e^y - 1$$