Feladatok és megoldások a 9. heti gyakorlathoz
függetlenség
Építőkari Matematika A3

1. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában, a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy
   (a) mindkét gép dolgozik,
   (b) legalább az egyik gép dolgozik,
   (c) csak az egyik gép dolgozik,
   (d) mindkét gép áll?

2. Tegyük fel, hogy egy családban minden gyermek 50% eséllyel lesz fiú vagy lány, függetlenül a többi gyermektől. Egy 5 gyermekes családban számoljuk ki a következő valószínűségeket:
   (a) Minden gyermek egyforma nemű.
   (b) A három idősebb gyermek fiú, a két fiatalabb gyermek lány.
   (c) Pontosan három fiú van a családban.
   (d) A két legidősebb gyermek lány.
   (e) Legalább egy lány van.

3. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: $A = \{$a dobott számok összege 7$\}$, $B = \{$legalább az egyik kockán van hatos$\}$, $C = \{$mindkét kockával páratlant dobok$\}$, $D = \{$a két kockával különböző számokat dobok$\}$, $E = \{$a zöld kockával 4-est dobok$\}$.
   (a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?
   (b) Kizáróak-e az A és C események?
   (c) Mennyi a B esemény valószínűsége?
   (d) Hogyan viszonyul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És függetlenségükre nézve?
   (e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?
   (f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek
      i. függetlenek, de nem kizáróak,
      ii. kizáróak, de nem függetlenek.

4. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: $A = \{$a dobott számok összege 7$\}$, $B = \{$a piros kockával 3-ast dobok$\}$, $C = \{$a zöld kockával 4-est dobok$\}$.
   (a) Függetlenek-e az A és B események? Az A és C események? Hát a B és C események?
   (b) Függetlenek-e az A, B, C események?
   (c) Függetlenek-e az A és a $B \cap C$ események?
   (d) Tehát: függetlenek-e az A, B, C események?

5*. Egy szabályos érmedobás kimenetelét szeretnénk szimulálni, de sajnos csak egy meglehetősen gyanús kinézetű cinkelt érme áll rendelkezésünkre. Az érme feldobáskor p valószínűséggel mutat fejet, és bár p értékét nem ismerjük, minden okunk megvan feltételezni, hogy $p \neq 1/2$. Hogy mégis szabályos érmedobást szimuláljunk, a következő algoritmus szerint járunk el:

(1) Feldobjuk az érmét.

(2) Megint feldobjuk az érmét.

(3) Ha mindkét dobás fej, illetve ha mindkét dobás írás, akkor visszatérünk az (1) lépéshez.

(4) Ha a két dobás különböző, akkor a másodikat tekintjük az algoritmusunk kimenetelének.

(a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyenlő valószínűséggel fog fej és írás eredményt adni.

(b) Lehetne-e egyszerűsíteni az algoritmust a következőképpen: egymás után addig dobáljuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást adjuk meg kimenetelként?

6. Egy cinkelt érme p valószínűséggel mutat fejet feldobáskor. Az érmét egymás után sokszor feldobjuk. Mi a valószínűsége, hogy az első négy dobás eredménye

   (a) F, F, F, F,

   (b) $Í$, F, F, F?

   (c*) Mi a valószínűsége, hogy az ($Í$, F, F, F) sorozatot előbb fogjuk látni, mint a (F, F, F, F) sorozatot? (Tipp: Hogyan történhet meg az, hogy az (F, F, F, F) sorozatot látjuk előbb?)

7. Egy vetélkedőn egy házaspár alkot egy csapatot. Amikor a műsorvezetőtől egy eldöntendő kérdést kapnak, a férj és a feleség is egymástól függetlenül p valószínűséggel mondaná a helyes választ. Az alábbiak közül melyik a jobb stratégia?

   (a) Egyiküket kijelölik, aki a másikra nem hallgatva válaszol a kérdésre, vagy

   (b) mindketten gondolkodnak a kérdésen, és ha egyetértenek válaszolnak, ha pedig különböző a véleményük akkor feldobnak egy szabályos pénzt, hogy eldöntsék melyikük véleményét fogják válaszolni?

8. Az A, B, és C városok között a következő utak épültek: $A-B$, $A-C$, $B-C$. Egy téli éjszakán mindhárom utat egymástól függetlenül p valószínűséggel eltorlaszolja a hó. Mi a valószínűsége, hogy másnap reggel valamilyen úton el lehet jutni A-ból C-be?

9. Az A, B, és C városok között a következő utak épültek: $A-B$, $A-B$ egy másik nyomvonalon is, $B-C$. Egy téli éjszakán mindhárom utat egymástól függetlenül q valószínűséggel eltorlaszolja a hó. Mi a valószínűsége, hogy másnap reggel valamilyen úton el lehet jutni A-ból C-be?

Eredmények

1.(a) $0.6 \cdot 0.7 = 0.42$

(b) $1 - 0.4 \cdot 0.3 = 0.88$

(c) $0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.46$

(d) $0.4 \cdot 0.3 = 0.12$

2.(a) $(1/2)^5 + (1/2)^5 = 1/16$

(b) $1/32$

(c) $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 5/16$

(d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$

(e) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 31/32$

3.(a) Nem, mert

(b) kizáró események.

(c) $1 - \mathbb{P}\{\text{egyik sem hatos}\} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$

(d) A-ból következik D, avagy $A \subset D$. Ezért $\mathbb{P}\{A\} \le \mathbb{P}\{D\}$, és pl. $5/6 = \mathbb{P}\{D\} \ne \mathbb{P}\{D \mid A\} = 1$ mutatja, hogy A és D nem lehetnek függetlenek.

(e) Az A esemény a 36 lehetséges kimenetelből hat esetben valósul meg, ezért valószínűsége $1/6$. Az E esemény valószínűsége is $1/6$, $A \cap E$ pedig pontosan egy esetben valósul meg, valószínűsége $1/36$. Így $\mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{E\} = \mathbb{P}\{A \cap E\}$, a két esemény független.

(f)
i. A és E;
ii. A és C.

4.(a) $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{C\} = 1/6$, és $\mathbb{P}\{AB\} = \mathbb{P}\{AC\} = \mathbb{P}\{BC\} = 1/36$, ezért A és B; A és C; B és C páronként függetlenek.

(c) Mivel $B \cap C \subset A$, $B \cap C$ és A nem lehetnek függetlenek.

(b),(d) A, B, C nem függetlenek. Erre utal a (c) eredmény, illetve az, hogy $1/36 = \mathbb{P}\{A \cap B \cap C\} \ne \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\} \cdot \mathbb{P}\{C\} = 1/216$.

4*.(a) Az algoritmus átfogalmazható a következőképp: kétszer feldobjuk az érmét. Ha egyezik a két eredmény, akkor a két dobásunk nem számít, újra kezdjük a kísérletet. Ha különböző a két eredmény, akkor tekintjük a második kimenetelt. Ebből a megfogalmazásból látszik, hogy az algoritmusunk kimenetelei egy feltételes eloszlást követnek:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\text{az algoritmus } F\text{-et ad}\} &= \mathbb{P}\{(\acute{I},\, F) \mid (\acute{I},\, F) \text{ vagy } (F,\, \acute{I})\} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{(\acute{I},\, F)\}}{\mathbb{P}\{(\acute{I},\, F) \text{ vagy } (F,\, \acute{I})\}} = \frac{(1-p)p}{(1-p)p + p(1-p)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Hasonlóan, az algoritmus $1/2$ valószínűséggel ad írást is.

(b) Bármilyen $0 < p < 1$ esetén előbb-utóbb biztosan lesz fej és írás is a dobások között. A (b) algoritmus ezért F-et ad akkor és csak akkor, ha az első dobás $Í$, ennek valószínűsége $1 - p$. Az algoritmus $Í$-t ad akkor és csak akkor, ha az első dobás F, ennek valószínűsége p. Így a (b) algoritmus nem ad szabályos pénzérmedobás-eredményeket.

A feladatban a nehézséget annak megfogalmazása jelenti, hogy miért nem igaz az (a)-ban adott érvelésünk a (b) algoritmus esetén. Az (a) algoritmus fenti átfogalmazásában *teljesen rögzített* két érmedobást (az első kettőt) tekintünk, míg a (b) algoritmusban *véletlen sorszámú* két dobásról van szó, arról a kettőről, melyekben először látunk változást a fej-írás sorozatban. Ez az ártalmatlannak tűnő különbség lényegesen eltorzítja a $(F,\, Í)$ illetve az $(Í,\, F)$ kimenetelek valószínűségét, így (a)-beli érvelésünk a (b) esetben így nézne ki:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\text{az algoritmus } F\text{-et ad}\} &= \mathbb{P}\{(Í,\, F)\,|\,(Í,\, F) \text{ vagy } (F,\, Í)\}\\ &= \frac{\mathbb{P}\{(Í,\, F)\}}{\mathbb{P}\{(Í,\, F) \text{ vagy } (F,\, Í)\}} = \frac{(1-p)}{(1-p)+p} = 1-p,\end{aligned}$$

és hasonlóan az algoritmus $Í$ kimenetelének valószínűsége p.

6(a) p^4

(b) $(1-p)\cdot p^3$

(c*) Az első megállapításunk, hogy $0 < p < 1$ esetén előbb-utóbb biztosan latni fogjuk az $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozatot. Tegyük fel, hogy az első ilyen sorozat az n-edik dobással kezdődik. Ha $n > 1$, akkor az $n-1$-edik dobás nem lehet F, mert akkor az első $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozat már az n-edik dobás előtt elkezdődött volna. Ezért ilyenkor az $n-1$-dik dobás mindenképpen $Í$, és így az $n-1$-edik dobással kezdődően az $(Í,\, F,\, F,\, F,\, F)$ sorozatot látjuk. Ebben pedig az $(Í,\, F,\, F,\, F)$ sorozat előbb jelenik meg, mint az $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozat. Azaz az $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozat csak akkor jöhet az $(Í,\, F,\, F,\, F)$ sorozat előtt, ha mindjárt az $n = 1$ helyen elkezdődik, vagyis ha az első négy dobás mindegyike fej. Ennek esélye p^4.

7. Az (a) esetben a helyes választ p valószínűséggel adja a csapat. A (b) esetben legyen E az az esemény, hogy a csapat a helyes eredményt adja, J illetve R, hogy a feleség vagy a férj a jó illetve rossz választ adná (azaz pl. $(J,\, J)$ az az esemény, hogy mindketten a helyes választ tudnák). Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{E\} &= \mathbb{P}\{E\,|\,(J,\, J)\}\cdot\mathbb{P}\{(J,\, J)\} + \mathbb{P}\{E\,|\,(J,\, R)\}\cdot\mathbb{P}\{(J,\, R)\}\\ &\quad+ \mathbb{P}\{E\,|\,(R,\, J)\}\cdot\mathbb{P}\{(R,\, J)\} + \mathbb{P}\{E\,|\,(R,\, R)\}\cdot\mathbb{P}\{(R,\, R)\}\\ &= 1\cdot p^2 + \frac{1}{2}\cdot p(1-p) + \frac{1}{2}\cdot(1-p)p + 0\cdot(1-p)^2 = p.\end{aligned}$$

A két stratégia között tehát nincs különbség. A (b)-hez hasonló stratégiák nagyobb csapatok (és $p > 1/2$) esetén segítenek.

8. Jelöljük a keresett eseményt $A \leftrightsquigarrow C$-vel, és az A és B közötti út átjárhatóságát $A \leftrightarrow B$-vel. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C\} &= \mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C\,|\,A \leftrightarrow C\}\cdot(1-p) + \mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C\,|\,A \not\leftrightarrow C\}\cdot p\\ &= 1\cdot(1-p) + \mathbb{P}\{A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C\}\cdot p = 1-p+(1-p)^2\cdot p.\end{aligned}$$

9. Az előző feladat jelöléseivel az $A \leftrightsquigarrow B$ és $B \leftrightsquigarrow C$ események függetlenek. Ezért

$$\mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C\} = \mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow B\}\cdot\mathbb{P}\{B \leftrightsquigarrow C\} = [1-q^2]\cdot(1-q).$$