További kombinatorika feladatok a 6-7. hétre

1. TÉTEL: (A leszámlálás alapelve:) Tegyük fel, hogy *r* kísérletet hajtunk végre, úgy, hogy az első kísérlet n_1 különböző eredménnyel végződhet és ezen n_1 eredmény mindegyikére a második kísérlet n_2 különböző eredménnyel végződhet és az első két kísérlet mindegyik lehetséges eredményére a harmadik kísérlet n_3 eredménnyel végződhet és így tovább, akkor az r kísérlet összesen $n_1 n_2 \cdots n_r$ eredménnyel végződhet.

1. Egy gyermekfaluban minden hónapban kiosztják a "Hónap anya-gyerek" címet. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a faluban 10 anya él, és mindegyik anyához 3 gyerek tartozik?
2. Egy gimnázium diák tanácsát 5 elsős, 6 másodikos, 7 harmadikos, és 4 negyedikes alkotja. Ebből a tanácsból albizottságot alakítanak, amelybe mindegyik csoportból egy-egy főt delegálnak. Hány albizottság alakítható ki?
3. Hány különböző 6 karakterű rendszám készíthető, ha az első három karaktert betűk, a második három karaktert számok alkotják?
4. Hány különböző függvény létezik, melyeknek értelmezési tartománya az $\{1, 2, \ldots, m\}$ halmaz és értékkészlete az $\{1, 2\}$ halmaznak részhalmaza.
5. 8 fiú és 6 lány vizsgázik matematikából. Eredményességük alapján rangsoroljuk őket. Nincs két diák, aki ugyanazt az eredményt érte volna el.

   (a) Hány különböző rangsor készíthető?

   (b) Ha a fiúk is kizárólag maguk között állítanak fel egy sorrendet és a lányok is kizárólag maguk között állítanak fel egy sorrendet, akkor az hányféleképpen tehető meg?
6. 12 könyvből 5 matematikával, 2 kémiával, 3 történelemmel, és 2 angol nyelvtannal foglalkozik. A 12 könyvet úgy szeretnénk egy könyvespolcon elhelyezni, hogy az azonos témájú könyvek egymásmellé kerüljenek. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
7. Hányféleképpen rendezhetők sorba a következő betűk: B A B B A C?
8. Egy 4 fős bizottságot választanak 22 emberből. Hányféleképpen tehető ez meg?
9. 5 nőből és 9 férfiból olyan bizottságot akarnak létrehozni, amelyben 3 nő és 4 férfi van. Hány bizottság hozható létre, ha a 9 férfiból van kettő olyan aki nem hajlandó egy bizottságban dolgozni?

Megoldások:

1. Mivel minden anyához 3 gyerek tartozik, minden anyánál 3 lehetséges párosítás jön szóba. Mivel 10 anya van, ezért:

$$10 \cdot 3 = 30$$

2. Mindegyik évfolyamból 1 embert delegálnak, így mivel *n* elemből 1-et *n*-féleképp lehet kiválasztani:

$$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4$$

3. Az angol ABC betűit használva egy 26 elemű betűhalmaz, illetve egy 10 elemű számjegyhalmaz áll rendelkezésünkre. A 3 betű ill. a 3 szám helyére is Bármelyik betű ill. szám kerülhet, így:

$$26^3 \cdot 10^3$$

4. Bináris értékkészlettel rendelkező függvény értelmezési tartományának minden egyes eleme 2 értéket vehet fel. Mivel 1-től *m*-ig tart az értelmezési tartomány *m*-szer tudunk a 2 érték közül választani:

$$2^m$$

5.
   a) Az első helyre 14 diák kerülhet, a másodikra 13, és így a tovább, az utolsó helyezettett már csak 1 személyből „választhatjuk ki”:

   $$14!$$

   b) Ha a fiúk és a lányok külön-külön állítanak fel maguk közt sorrendet, akkor az előző analógiájára:

   $$8! \cdot 6!$$

6. Vegyük úgy, mint ha az azonos tematikájú könyvek össze lennének kötve 1-1 blokkba. Így 4 blokkunk van, amit értelmszerűen 4!-féleképp tudunk sorbarendezni. Viszont még az egyes tantárgyakon belüli *n* db könyvet is *n*!-képpen tudjuk sorbarendezni, ezért:

$$4! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 2!$$

7. 6 különböző elemet 6! módon lehet sorbarendezni, mivel azonban az azonos betűk különböző sorrendje nem minősül különböző sorbarendezésnak, azok, faktoriálisával osztani kell:

$$\frac{6!}{2! \cdot 3!}$$

8. Definíció alapján n emberből k db-ot kiválasztani $\binom{n}{k}$ - féleképp lehet, így:

$$\binom{22}{4}$$

9. Az 5 nőből 3-at természetesen $\binom{5}{3}$ módon tudunk kiválasztani. A 9 férfiból 4-et $\binom{9}{4}$ - féleképp lehet kiválasztani, ebből viszont le kell vonni azon eseteket, mikor a két ominózus férfi együtt szerepelne, ekkor melléjük még 2 embert $\binom{7}{2}$ - képpen választhatunk. Így a végeredmény:

$$\binom{5}{3} \cdot \left(\binom{9}{4} - \binom{7}{2}\right)$$