A3 vizsga MINTA

1. Oldjuk meg a következő kezdetiérték problémát: $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$ és $y(1) = 3$.
2. A következő differenciálegyenlet $y' = f(y)$ alakú. Rajzolja le az $f(y)$ függvény grafikonját, rajzolja be a fázis vonalakat. Határozza meg az egyensúlyi állapotokat és jellemezze őket a stabilitásuk szempontjából. $y' = 1 - y^2$.
3. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását: $y'' + 2\,y' + 5\,y = \sin(2\,x)$.
4. Egy kis egyetemen egy bizonyos napon az csak az A és a B tárgyakból rendeznek vizsgát. Tudjuk, hogy az aznap vizsgázó hallgatók 30% az A tárgyból és 70% B tárgyból vizsgázott. Azt is tudjuk, hogy az A és a B tárgyak vizsgáin a bukás arány rendre 5% és 10% volt. Találkozunk ezen egyetem egy hallgatójával akiről csak annyit tudunk, hogy ezen a bizonyos napon vizsgázott és, hogy megbukott. Kérdés, mi annak a valószínűsége, hogy a hallgató az A tárgyból vizsgázott?
5. Egy szabályos dobókockával addig dobunk amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?
6. Egy városban a heti tűzesetek száma Poisson eloszlású. Annak valószínűsége, hogy egy héten nincs tűz, 0,3. Mi a valószínűsége, hogy a következő héten legalább két tűzesethez riasztják a tűzoltókat?
7. Egy rádió élettartama években mérve exponenciális eloszlású $\lambda = 1/8$ paraméterrel.Ha valaki vesz egy ilyen típusú rádiót, mi a valószínűsége, hogy a következő tizenhat évben nem romlik el?
8. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet rendszer általános megoldását:

$$\begin{aligned} x'(t) - 9y(t) &= \mathrm{e}^t && (1) \\ y'(t) &= x(t). && (2) \end{aligned}$$

9. Egy szabályos kockát folyamatosan dobunk addig amíg a dobások összege nem haladja meg a 300-at. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy legalább 101 dobásra van szükségünk. Segítség: kockadobásnál várható érték: 7/2 szórás: $\sqrt{35/12}$. Számoljunk négy tizedes jeggyel.

Eredmények

1. Az általános megoldás: $y_{\text{alt}} = cx + \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x|$, a kezdetiérték probléma megoldása: $y_{\text{part}} = -\frac{1}{2}x + \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x|$
2. $y = -1$ instabil, $y = 1$ asszimptotikusan stabil.
3. $y(x) = e^{-x}\sin(2\,x)\_C2 + e^{-x}\cos(2\,x)\_C1 + \frac{1}{17}\sin(2\,x) - \frac{4}{17}\cos(2\,x)$
4. $A = \{$ A-ból vizsgázott $\}$, $B = \{$ B-ből vizsgázott $\}$, $M = \{$ Megbukott$\}$.

$$\begin{aligned} P(A|M) &= \frac{P(M|A)P(A)}{P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B)} && (3) \\ &= \frac{0.05 \cdot 0.3}{0.05 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.7}. && (4) \end{aligned}$$

5. Elöször dobok valamit azután akkor állok meg amikor az elöbb dobotat dobom újra. Tehát ez 1+geometriai(1/6) aminek várható értéke 1+6=7.
6. $P(X = 0) = e^{-\lambda} = 0,3$, amiből λ meghatározható. Ekkor $P(X \geq 2) = 1 - 0,3 - \lambda 0,3$.
7. Legyen X a rádió élettartama. Ekkor X az Exponencilis(1/8). Tehát $P(X > 16) = 1 - P(X < 16) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-16\cdot\frac{1}{\lambda}}) = \mathrm{e}^{-2}$.
8. $x(t) = 3c_1\mathrm{e}^{3t} - 3c_2\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^t$, $y(t) = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^t$,
9. Legalább 101 dobás kell ha az első 100 dobás összege S_{100} nem haladja meg a 300-at.

$$\begin{aligned} P(S_{100} \leq 300) &= P\left(\frac{S_{100} - 100\cdot 7/2}{\sqrt{100\cdot 35/12}} \leq \frac{300 - 100\cdot 7/2}{\sqrt{100\cdot 35/12}}\right) && (5) \\ &= \Phi(-2.672) = 1 - \Phi(2.672) = 1 - 09962 = 0.0038. && (6) \end{aligned}$$