1 zh. gyakorló feladatok

1. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta az

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, \text{ ha } 0 < x < 1$$

különben 0 sűrűségfüggvénnyel megadott eloszlásból, ahol $\theta > 0$ paraméter.

   (a) Keressen elégséges statisztikát θ-ra a minta alapján!

   (b) Adjon maximum likelihood becslést θ-ra a minta alapján!

   (c) Torzítatlan becslést ad-e a talált maximum likelihood becslés θ-ra?

   (d) Tagja-e a fenti eloszlás az exponenciális eloszlácsaládnak? Miért igen, ill. miért nem?

2. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta az

$$f_\theta(x) = \frac{3x^2}{2\theta^3}, \text{ ha } -\theta < x < \theta,$$

különben 0 sűrűségfüggvénnyel megadott eloszlásból, ahol $\theta > 0$ paraméter.

   (a) Keressen elégséges statisztikát θ-ra a minta alapján!

   (b) Adjon maximum likelihood becslést θ-ra a minta alapján!

   (c) Tagja-e a fenti eloszlás az exponenciális eloszlácsaládnak? Miért igen, ill. miért nem?

3. Legyen $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta a következő sűrűségfüggvénnyel megadott eloszlásból:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}}, \qquad \text{ha} \quad x \geq 0,$$

és 0 különben ($\theta > 0$ paraméter).

   (a) Tagja-e a fenti eloszlás az exponenciális eloszlácsaládnak?

   (b) Ha igen, számolja ki a fenti minta Fisher-információját!

   (c) Keressen elégséges statisztikát θ-ra a minta alapján!

   (d) Adjon maximum likelihood becslést θ-ra a minta alapján!

4. 20 teherautó mindegyike megérkezik Bécsből Budapestre 0 és 1 óra közt egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mi annak a valószínűsége, hogy az elsőnek és utolsónak érkező érkezése közt legfeljebb 30 perc telik el?

Megoldások

Az első két feladatot I.zh gyak. feladatok közt megoldottuk. Az utolsó feladat megoldása is visszavezethető arra, hogy az $Y_1, \ldots, Y_n$ $(0,1)$-en egyenletes fae. minta alapján $\mathbb{P}(Y_n^* - Y_1^* < \frac{1}{2})$=?. Itt 1/2 óra=30 perc és $n = 20$. Így az eredmény az I.zh gyak. feladatok alapján:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{19} \cdot \frac{21}{2}.$$

3. feladat mo.

- Igen, tagja, mert
$$f_\theta(x) = \theta e^{(-\theta-1)\ln(1+x)},$$
ahonnan $\sum_i \ln(1 + X_i)$ elégséges θ-ra.

-
$$\begin{aligned} I_1(\theta) &= -\mathbb{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(\ln\theta - (\theta+1)\ln(1+X))\right) \\ &= -\mathbb{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{\theta} - \ln(1+X))\right) \\ &= -\mathbb{E}_\theta\left(-\frac{1}{\theta^2} - 0\right) = \frac{1}{\theta^2}. \end{aligned}$$
Így
$$I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}.$$

-
$$L_\theta(\mathbf{x}) = \theta^n\left(\prod_i(1 + x_i)\right)^{-\theta-1},$$
ahonnan $\prod_i(1 + X_i)$ elégséges θ-ra, de $\sum_i \ln(1 + X_i)$ is az.

-
$$\ln L_\theta(\mathbf{x}) = n\ln\theta + (-\theta - 1)\sum_i \ln(1 + x_i),$$
ahonnan
$$\frac{\partial \ln L_\theta(\mathbf{x})}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_i \ln(1 + x_i) = 0,$$
ha
$$\theta = n\frac{1}{\sum_i \ln(1 + x_i)},$$
ami tényleg max. hely. Ezért az ML becslés
$$\hat\theta = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_i \ln(1 + X_i)}.$$