

## LUKÁCS TÉTEL és következménye

**Lukács tétel.** Legyen  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  fae. val. változók. Akkor

1.  $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$ ;
2.  $nS_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ , vagy ekvivalens módon  $(n-1)S_n^{*2}/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ ;
3.  $\bar{X}$  és  $S_n^2$  függetlenek egymástól, vagy ekvivalens módon  $\bar{X}$  és  $S_n^{*2}$  is függetlenek.

**Bizonyítás.** Az (1) állítás nyilvánvaló. A (2) és (3) állítás bizonyításához transzformáljuk  $X_i$ -ket egy olyan  $n \times n$ -es  $\mathbf{V}$  ortogonális mátrixszal, amelynek utolsó sorában végig az  $1/\sqrt{n}$  értékek állnak, a többi sora pedig tetszőleges (persze ortogonális az utolsó sorra, így az első  $n-1$  sorban a sorösszegek 0-k lesznek). A transzformáció tehát:

$$Y_i = \sum_{k=1}^n v_{ik} X_k, \quad (i = 1, \dots, n),$$

ahol  $v_{ik}$ -k a  $\mathbf{V}$  mátrix elemei. Az így definiált  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  val. változók nyilván normális eloszlásúak lesznek és függetlenek egymástól, ugyanis

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, Y_j) &= \mathbb{E}[(Y_i - \mathbb{E}Y_i)(Y_j - \mathbb{E}Y_j)] = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n v_{ik}(X_k - \mathbb{E}X_k) \sum_{l=1}^n v_{jl}(X_l - \mathbb{E}X_l)\right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n v_{ik}v_{jl} \mathbb{E}[(X_k - \mathbb{E}X_k)(X_l - \mathbb{E}X_l)] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n v_{ik}v_{jl} \delta_{kl} \sigma^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n v_{ik}v_{jk} \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^n v_{ik}v_{jk} = \sigma^2 \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy  $Y_i$ -k korrelálatlanok, és a normalitás miatt függetlenek is, továbbá varianciájuk  $\sigma^2$ . Várható értékük:

$$\mathbb{E}Y_i = \sum_{j=1}^n v_{ij} \mathbb{E}X_j = \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, n-1 \\ \sqrt{n}\mu, & i = n. \end{cases}$$

mivel a  $\mathbf{V}$  mátrix első  $n-1$  sorában a sorösszeg 0. Ezért a független  $Y_1, \dots, Y_{n-1}$  változók eloszlása  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2)$  lesz, míg tőlük függetlenül  $Y_n \sim \mathcal{N}(\sqrt{n}\mu, \sigma^2)$ , sőt  $Y_n = \sqrt{n}\bar{X}$ . Ugyanakkor

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n v_{ik} X_k\right) \left(\sum_{l=1}^n v_{il} X_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n X_k X_l \sum_{i=1}^n v_{ik} v_{il} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n X_k X_l \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

Végül a Steiner formulával:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.$$

Innen

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{Y_i}{\sigma} \right)^2,$$

ami  $\chi^2(n-1)$ -eloszlású (hisz  $\frac{Y_i}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$  fae,  $i = 1, \dots, n-1$ ) és független  $Y_n$ -tól (így  $\bar{X}$ -tól is).

**Következmény:** A  $\chi^2$  eo. paramétereit nézve,

$$\mathbb{E} \left( (n-1)S_n^{*2} / \sigma^2 \right) = n-1,$$

ezért

$$\mathbb{E} \left( S_n^{*2} \right) = \sigma^2.$$

Továbbá

$$\mathbb{D}^2 \left( (n-1)S_n^{*2} / \sigma^2 \right) = 2(n-1),$$

ezért

$$\mathbb{D}^2(S_n^{*2}) = \frac{2(n-1)}{(n-1)^2} \sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{(n-1)} \rightarrow 0$$

as  $n \rightarrow \infty$ . Így  $S_n^{*2}$  négyzetes középben konzisztens becslése a valódi szórásnégyzetnek.