12. STATISZTIKA GYAKORLAT

II. Zh-ra gyakorlás. Anyag:

- Bayes becslés.
- ELEGER próbák konstrukciója.
- Egy paraméteres próba végrehajtása adatokon.
- Egy nemparaméteres próba végrehajtása adatokon.

ZH II. mintafeladatok

1. Adjon Bayes-becslést a geometriai eloszlás paraméterére az $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta alapján, ha a paraméter a priori eloszlása $(0, 1)$-en folytonos egyenletes! Vizsgálja meg a kapott becslés viselkedését $n \to \infty$ esetén!

2. Legyen $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ fae. minta!

   (a) Monoton likelihood-hányadosú-e az eloszláscsalád? Miért?

   (b) Konstrualjon egyenletesen legerősebb próbát a

   $$H_0 : \lambda \geq 1 \quad \text{vers.} \quad H_1 : 0 < \lambda < 1$$

   alternatívák közötti döntésre (azaz adja meg az α terjedelmű próba kritikus tartományának alakját és azt, hogy hogyan határozná meg az α-hoz tartozó kritikus értéket).

   (c) $n = 1$, egyetlen x realizáció és $\alpha = 0.01$ mellett számolja ki a kritikus értéket és adja meg a próba erőfüggvényét! Vizsgálja meg az erőfüggvény monotonitását az ellenhipotézisbeli λ értékekre $(0 < \lambda < 1)$!

3. 15 pollenallergiától szenvedő páciensen azt tesztelték, vajon egy antihisztamin tablettának tényleg az-e a mellékhatása, hogy szignifikánsan csökkenti a vérnyomást, és így aluszákonyságot okoz. Az első sor adatai a gyógyszer szedése előtti vérnyomásértékekt tartalmazzák, míg a második soré az egy hónapos gyógyszerszedés utániakat:

   70 80 72 76 76 76 72 78 82 64 74 92 74 68 84

   68 72 62 70 58 66 68 52 64 72 74 60 74 72 74

   Nyilatkozzon a kérdésről különböző szignifikanciaszinteken!

4. Nekem is, barátomnak is van egy-egy pénzérménk. Tesztelni akarom, hogy szabályos-e a pénzérmém. Feldobom 100-szor, és azt találom, hogy a fej–írás relatív gyakoriság 0,4–0,6. Barátom 1000-szer dobja fel a saját érméjét, és ugyanezeket a relatív gyakoriságokat kapja. Azt mondja, ezek után bármilyen szinten azonosan kell döntenünk arról, hogy szabályos-e a pénzérménk. Igaza van-e? Ha igen, indokolja meg, miért; ha nem, akkor a táblázat alapján mutasson legalább egy olyan szignifikanciaszintet, melyen különbözőképpen döntenénk a két esetben.

Megoldások

1. Legyen $X_1, \dots, X_n$ fae. minta θ paraméterű geometriai eloszlásból. Mivel θ apriori eo-a (0,1)-en egyenletes,

$$f(\mathbf{x}, t) = L_t(\mathbf{x})q(t) = \prod_{i=1}^{n}[(1-t)^{x_i-1}t] \cdot 1 = t^n(1-t)^{\sum x_i - n}.$$

Ezért θ a posteriori ea-a az $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ feltétel mellett:

$$q(t|\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}, t)}{\int_0^1 f(\mathbf{x}, t)dt} = c(\mathbf{x})t^n(1-t)^{\sum x_i - n}, \quad 0 < t < 1.$$

Látható, hogy ez Beta-eloszlás $n+1$ és $\sum x_i - n + 1$ paraméterekkel, melynek várható értéke

$$\mathbb{E}(\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \frac{n+1}{\sum x_i - n + 1 + n + 1} = \frac{n+1}{\sum x_i + 2}.$$

Így

$$\hat{\theta} = \mathbb{E}(\theta|\mathbf{X}) = \frac{n+1}{\sum X_i + 2}$$

a Bayes becslés és

$$\hat{\theta} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\bar{X} + \frac{2}{n}} \to \frac{1}{\bar{X}}, \quad n \to \infty$$

1 val.séggel (utóbbi θ ML-becslése).

2. A $\theta = \frac{1}{\lambda}$ helyettesítéssel:

$$H_0 : \theta \leq 1 \quad \text{vers.} \quad H_1 : \theta > 1$$

(a) MLH, mert $\theta' > \theta$ esetén

$$\frac{L_{\theta'}(\mathbf{x})}{L_\theta(\mathbf{x})} = \frac{(\frac{1}{\theta'})^n e^{-\frac{1}{\theta'}\sum x_i}}{(\frac{1}{\theta})^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum x_i}} = (\frac{\theta}{\theta'})^n e^{\sum x_i(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta'})},$$

ami monoton nő $T(\mathbf{x}) = \sum x_i$-ben.

(b) Folytonos eo, ezért

$$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x} : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq c_\alpha\},$$

ahol $\mathbb{P}_1(\sum_{i=1}^n X_i \geq c_\alpha) = \alpha$ azaz c_α az $n, 1$ paraméterű Γ-eo. $1-\alpha$ kvantilise.

(c) $n = 1$:

$$\alpha = \mathbb{P}_1(X_1 \geq c_\alpha) = 1 - F_1(c_\alpha) = e^{-c_\alpha},$$

ahonnan $c_\alpha = -\ln \alpha > 0$. Ha $\alpha = 0.01$, akkor $c_\alpha = \ln 100$.
Erőfv: ha $\theta > 1$,

$$\gamma(\theta) = \mathbb{P}_\theta(X_1 \geq c_\alpha) = 1 - F_\theta(c_\alpha) = e^{-\frac{1}{\theta}c_\alpha} = \alpha^{\frac{1}{\theta}} \to 1 \quad \theta \to \infty$$

monoton növőleg, összhangban a tanultakkal.

3. X: gyógyszerszedés előtti, Y:utáni vérnyomása ugyanozknak. Páros mintás, egyoldali t-próba a $D_i = X_i - Y_i$ $(i = 1, \ldots, 15)$ megfigyelésekkel.

$$H_0 : \mathbb{E}(D) \leq 0, \quad H_1 : \mathbb{E}(D) > 0.$$

$t = \frac{\bar{D}-0}{S_D^*}\sqrt{15} = 3.1 > t_\alpha(14)$ elég kis α-val. El tudjuk utasítani H_0-t, azaz szignifikánsan csökkenti az antihisztamin a vérnyomást.

4. $H_0 : \mathbb{P}(\text{fej}) = \mathbb{P}(\text{írás}) = \frac{1}{2}$.

$$\chi^2 = \frac{(40-50)^2}{50} + \frac{(60-50)^2}{50} = 4 > \chi^2_{0.05}(2-1),$$

de $\chi^2 < \chi^2_{0.01}(2-1)$, így 0.01 szignifikanciával nem tudjuk elutasítani H_0-t 100 dobással.

1000 dobással

$$\chi^2 = \frac{(400-500)^2}{500} + \frac{(600-500)^2}{500} = 40 > \chi^2_{0.01}(2-1),$$

így 0.01 szignifikanciával el tudjuk utasítani H_0-t, még sokkal kisebbel is.