4. STATISZTIKA GYAKORLAT: Torzítatlanság, konzisztencia, konfidencia intervallum

1. (ELTE, példatár 2.2/32). Legyen $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{U}[-\alpha, \alpha]$ fae. minta.
   (a) Keressünk elégséges statisztikát az ismeretlen $\alpha > 0$ paraméterre!
   (b) Keressünk ML-becslést az ismeretlen $\alpha > 0$ paraméterre!
   (c) Torzítatlan-e ez a becslés?
2. (ELTE, példatár 2.2/33). Legyen $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta az
   $$f_\alpha(x) = x^{\alpha-2}(\alpha - 1), \quad 0 < x < 1$$
   különben 0 sfv-ű eloszlásból, $\alpha > 1$ ismeretlen paraméter.
   (a) Adjunk torzítatlan becslést az $\frac{1}{\alpha}$ par. fv-re!
   (b) Adjunk konzisztens becslést is az $\frac{1}{\alpha}$ par. fv-re!
3. Lássuk be, hogy n-elemű exponenciális eloszlású mintánál a mintaátlag reciproka négyzetes középben konzisztens becslése a paraméternek ($n > 2$).
4. Tagja-e a Bernoulli eo. az exp. eo. családnak? Adjunk elégséges statisztikát és ML becslést a paraméterére!

Megoldások

1. $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{U}[-\alpha, \alpha]$ fae. minta.

   (a)
   $$L_\alpha(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\alpha} \cdot I(|x_i| \leq \alpha,\, i = 1, \dots, n) = \frac{1}{2^n \alpha^n} \cdot I(\max_i |x_i| \leq \alpha).$$
   Ezért $\max_i |X_i| = \max\{-X_1^*, X_n^*\}$ elégséges α-ra.

   (b) $\max_i |X_i| = \max\{-X_1^*, X_n^*\}$ egyben ML-becslás is az ismeretlen $\alpha > 0$ paraméterre, ui. $\frac{1}{2^n\alpha^n}$ a legnagyobb, ha α a lehető legkisebb a $\max_i |X_i| \leq \alpha$ feltétel mellett.

   (c) Nem torzítatlan ez a becslés, mert 1 val.séggel kisebb a becsülendő α paraméternél (a transzformált beta-eloszlás miatt).
   Másképpen, mivel $Y_i = \frac{X_i+\alpha}{2\alpha} \sim \mathcal{U}(0,1)$, $(i = 1, \dots, n)$, ezért
   $$\mathbb{E}(X_n^*) = 2\alpha\mathbb{E}(Y_n^*) - \alpha = 2\alpha\frac{n}{n+1} - \alpha = \frac{2\alpha n - (n+1)\alpha}{n+1} = \frac{n\alpha - \alpha}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}\alpha < \alpha.$$
   Hasonlóan
   $$\mathbb{E}(X_1^*) = 2\alpha\mathbb{E}(Y_1^*) - \alpha = 2\alpha\frac{1}{n+1} - \alpha = \frac{2\alpha - (n+1)\alpha}{n+1} = -\frac{n-1}{n+1}\alpha > -\alpha,$$
   és $\mathbb{E}(-X_1^*) < \alpha$. Ezért $\mathbb{E}(\max\{-X_1^*, X_n^*\}) < \alpha$.

2. (a) Mivel
   $$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot x^{\alpha-2}(\alpha-1)\, dx = (\alpha-1)\left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_0^1 = \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha},$$
   ezért $1 - \bar{X}$ torzítatlan becslés az $\frac{1}{\alpha}$ par. fv-re (ui. $\bar{X}$ torzítatlan becslés a várható értékre.

   (b) Mivel
   $$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot x^{\alpha-2}(\alpha-1)\, dx = (\alpha-1)\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1},$$
   ezért
   $$\mathbb{D}^2(X) = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^2 = \frac{(\alpha-1)\alpha^2 - (\alpha-1)^2(\alpha+1)}{(\alpha+1)\alpha^2} = \frac{\alpha-1}{(\alpha+1)\alpha^2}.$$
   Így
   $$\mathbb{D}^2(1-\bar{X}) = \mathbb{D}^2(\bar{X}) = \frac{\alpha-1}{n(\alpha+1)\alpha^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$
   Ebből a tanult tétel alapján következik, hogy $1 - \bar{X}$ négyzetes középben, és így gyengán is konzisztens becslés az $\frac{1}{\alpha}$ par. fv-re.

3. Tanultuk (2. fejezet, 13.Állítás), hogy ha ha egy statisztikasorozat valamely par.fv.-re aszimptotikusan torzítatlan becslést ad, és szórasnégyzete 0-hoz tart, akkor a becslés négyzetes középben konzisztens.

$$\mathbb{E}_\lambda(\frac{1}{\bar{X}}) = \mathbb{E}_\lambda\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \int_0^\infty \frac{n}{x}\,\frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}\,dx =$$
$$= \frac{n}{n-1}\lambda \int_0^\infty \frac{\lambda^{n-1} x^{n-2} e^{-\lambda x}}{(n-2)!}\,dx = \frac{n}{n-1}\lambda = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\lambda \to \lambda,$$

ha $n \to \infty$, ezért $\frac{1}{X}$ aszimptotikusan torzítatlan λ-ra. (Ehhez $n > 1$ is elég, $n = 1$-re $\frac{1}{X}$ eloszlása Cauchy, aminek nem létezik várható értéke.)

Számoljuk ki a szórásnégyzetét!

$$\mathbb{E}_\lambda(\frac{1}{\bar{X}})^2 = \mathbb{E}_\lambda\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^2 = \int_0^\infty \frac{n^2}{x^2}\,\frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}\,dx =$$
$$= \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\lambda^2 \int_0^\infty \frac{\lambda^{n-2} x^{n-3} e^{-\lambda x}}{(n-3)!}\,dx = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\lambda^2,$$

ha $n > 2$. Így

$$\mathbb{D}^2_\lambda(\frac{1}{\bar{X}}) = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\lambda^2 - (\frac{n}{n-1}\lambda)^2 = \lambda^2\cdot\frac{n^2(n-1)-n^2(n-2)}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\lambda^2 n^2}{(n-1)^2(n-2)} \to 0,$$

ha $n \to \infty$, ami $n > 2$ esetén bizonyítja a négyzetes középben való, és így gyenge konzisztenciát is.

4. Legyen $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{I}(\theta)$ fae. Bernoulli minta, $0 < \theta < 1$ paraméter. Ezért $x \in \{0, 1\}$ esetén:

$$p_\theta(x) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x (1-\theta) = (1-\theta)e^{x \ln \frac{\theta}{1-\theta}},$$

vagyis exp. eo. családban vagyunk és $\ln \frac{\theta}{1-\theta}$ a kanonikus paraméter; $\sum_{i=1}^n X_i$ elégséges stat. Az ML becslés kapató az

$$\mathbb{E}_\theta(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n X_i$$

egyenletből, ahonnan $n\theta = \sum_{i=1}^n X_i$ és $\hat{\theta} = \bar{X}$.