5. STATISZTIKA GYAKORLAT: Fischer info

1. Könyvben kiszámoljuk a normális eo. μ-jének Fischer infóját.

2. Fisher-információ: exp. eo. családban a reg. feltételek teljesülnek. Sokszor a 2. deriváltas képlettel egyszerű számolni,

$$I_1(\theta) = -\mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L_\theta(X) \right)$$

vagy azzal, hogy

$$I_1(\theta) = \mathbb{D}_\theta^2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L_\theta(X) \right).$$

Ezután

$$I_n(\theta) = nI_1(\theta).$$

3. Kapcsolat az entrópiával, melyet Claude E. Shannon vezetett be 1949-ben.

Vázlatosan, az entrópia azt az *átlagos meglepetés*t méri, melyet egy val.változó megfigyelése okoz.

Ha egy p val.ségű A esemény bekövetkezik, kevésbé vagyunk meglepve, ha p nagy, és sokkal jobban, ha p kicsi. A meglepetés olyan mértékét keressük, melyre:

- a biztos esemény feletti meglepetés 0;
- a meglepetés folytonos, szigorúan csökkenő fv-e p-nek;
- független események bekövetkezése kapcsán meglepetésünk összeadódik.

Bizonyíthatóan a $-\log p$ fv teljesíti ezt (bármely 1-nél nagyobb alappal, de a kódelméletben 2 alapot használnak).

Ha egy X val. változót figyelünk meg, akkor átlagos melepetésünket az entrópia fejezi ki.

Definíció Az X diszkrét val. változó entrópiája

$$H(X) = \mathbb{E}(-\log p(X)),$$

ahol p a súlyfv. Az X absz. folytonos val. változó entrópiája

$$H(X) = \mathbb{E}(-\log f(X)),$$

ahol f a sfv.

Feltesszük persze, hogy a várható érték létezik. Használjuk a $0 \log 0 = 0 \log \frac{0}{0} = 0$ konvenciót is. Vegyük észre, hogy paraméteres esetben az entrópia a paraméter fv-e.

Paraméteres, reguláris eloszláscsaládban így

$$I_1(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} H(\theta),$$

ha természetes alapú logaritmust használunk. Mivel $I_1(\theta) \geq 0$, az entrópia konvex fv-e a paraméternek.

4. Pl. ELTE Példatár 2.6, 70.a: Legyen $X_1, \dots, X_n$ fae. minta az

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}}, \quad x \geq 0$$

sfv.-ű eo-ból, $\theta > 0$ par. $I_n(\theta)$=?

$$\begin{aligned}
I_1(\theta) &= -\mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial\theta} (\frac{\partial}{\partial\theta} (\ln\theta - (\theta+1)\ln(1+X)) \right) \\
&= -\mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial\theta} (\frac{1}{\theta} - \ln(1+X)) \right) \\
&= -\mathbb{E}_\theta \left(-\frac{1}{\theta^2} - 0 \right) = \frac{1}{\theta^2}.
\end{aligned}$$

Így

$$I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}.$$

5. Elérhető-e az infó határ?

   Pl. legyen $X_1, \dots, X_n$ fae. minta λ-par. Poi eloszl.ból. Akkor

$$I_1(\lambda) = \mathbb{D}^2_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} (X\ln\lambda - \ln X! - \lambda) \right) = \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{D}^2_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Így

$$I_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda}.$$

Tudjuk, hogy a $\bar{X}$ torzítatlan becsléssel

$$\mathbb{D}^2_\lambda(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{I_n(\lambda)},$$

azaz az infó határ eléretik, $\bar{X}$ hatásos becslés.

6. Egyáltalán mikor és milyen par. fv-re érhető el az infó határ? A Cramer-Rao egyenlőtlenség biz.nál láttuk, hogy ha

$$T = \frac{\psi'(\theta)}{I_n(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln L_\theta(\mathbf{X}) + \psi(\theta). \tag{1}$$

statisztika (kiesik θ), akkor vele elérhető, különben nem.

Pl. számoljuk ki egy n-elemű, $Exp(\lambda)$ fae. minta Fisher-infóját! Mivel

$$\mathbb{E}_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} (\ln f_\lambda(X) \right) = \mathbb{E}_\lambda \left(\frac{1}{\lambda} - X) \right) = 0,$$

ezért

$$I_1(\lambda) = \mathbb{D}^2_\lambda \left(\frac{1}{\lambda} - X) \right) = \mathbb{D}^2_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Így

$$I_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Lássuk be, hogy

- A $\psi(\lambda) = 1/\lambda$ paraméterfüggvényre torzítatlan becsléssel elérhető a Cramer–Rao egyenlőtlenségbeli információs határ. Lássuk be egyrészt az elérhetőségre tanultak alapján, másrészt úgy, hogy verifikáljuk, $\bar{X}$ szórásnégyzete eléri a határt.

  Valóban, az (1) képlettel

  $$T = \frac{-\frac{1}{\lambda^2}}{\frac{n}{\lambda^2}}(\frac{n}{\lambda} - \sum_i X_i) + \frac{1}{\lambda} = \bar{X}$$

  eléri a határt. Másrészt

  $$\mathbb{D}^2_\lambda(\bar{X}) = \frac{1}{n\lambda^2}$$

  és az infó határ

  $$\frac{\psi'(\lambda)^2}{I_n(\lambda)} = \frac{[-\frac{1}{\lambda^2}]^2}{\frac{n}{\lambda^2}} = \frac{1}{n\lambda^2}.$$

  Így $\bar{X}$ eléri az infó határt és ő a hatásos becslés $\psi(\lambda) = 1/\lambda$-ra.

- A $\psi(\lambda) = \lambda$ paraméterfüggvényre torzítatlan becsléssel nem érhető el a Cramer–Rao egyenlőtlenségbeli információs határ. Valóban, az (1) képlettel

  $$T = \frac{1}{\frac{n}{\lambda^2}}(\frac{n}{\lambda} - \sum_i X_i) + \lambda = 2\lambda - \lambda^2\bar{X}$$

  függ λ-tól, nem statisztika, nem érhető el a határ.

  Ugyanakkor kiszámoltuk, hogy

  $$\mathbb{E}_\lambda(\frac{1}{\bar{X}}) = \frac{n}{n-1}\lambda,$$

  így $\frac{n-1}{n}\frac{1}{\bar{X}}$ lesz torzítatlan λ-ra. Mivel (a várható értékhez hasonlóan kiszámolható) $n > 2$-re

  $$\mathbb{D}^2_\lambda(\frac{n-1}{n}\frac{1}{\bar{X}}) = \frac{\lambda^2}{n-2}$$

  nagyobb, mint az infó határ $\frac{\lambda^2}{n}$, nem éri el azt. Mégis, ő a hatásos becslés, mert egy elégséges, teljes statisztika torzítatlanná tett fv-e (Rao-lackwell-Kolmogorov tétel). Aszimptotikusan azért eléri az info határt, akárcsak az ML becslést adó $\frac{1}{\bar{X}}$ (Cramer-Dugue tétel).

7. *Fischer info paraméter-transzformációval*: Legyen θ az új és λ a régi paraméter, melyek közt bijekció közvetít: $\lambda = h(\theta)$ és $\theta = h^{-1}(\lambda)$. Akkor

$$I_1(\theta) = \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)^2 I_1(\lambda). \tag{2}$$

Biz: absz. folyt. esetben

$$\begin{aligned} I_1(\theta) &= \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_\theta(X)\right)^2 = \mathbb{E}_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln f_{h(\theta)}(X) \frac{d\lambda}{d\theta}\right)^2 \\ &= \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)^2 \mathbb{E}_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln f_\lambda(X)\right)^2 = \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)^2 I_1(\lambda). \end{aligned}$$

8. Pl. ELTE Példatár 2.6/71: Legyen $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta az

$$f_\theta(x) = \frac{\theta+1}{2\theta} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad -1 < x < 1$$

sfv.-ű eo-ból, $\theta > 0$ par. $I_n(\theta)$=?

Megoldás: Alkalmazzuk a $\lambda = \frac{1}{\theta} > 0$ par. trf-t. Mivel

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{2}(1+\lambda) \left(\frac{1-x}{2}\right)^\lambda, \quad -1 < x < 1,$$

ezért

$$I_1(\lambda) = -\mathbb{E}_\lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \ln f_\lambda(X)\right) = -\mathbb{E}_\lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \ln(1+\lambda)\right) = \frac{1}{(1+\lambda)^2}.$$

A (2) képlet szerint:

$$I_1(\theta) = \left(\frac{d\lambda}{d\theta}\right)^2 I_1(\lambda) = \frac{1}{\theta^4} \frac{\theta^2}{(1+\theta)^2} = \frac{1}{\theta^2(1+\theta)^2}.$$

A regularitás miatt

$$I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2(1+\theta)^2}.$$