6. STATISZTIKA GYAKORLAT

1. Momentum becslés

1. Adjon mom. becslést az (a, b)-n folyt. egyenletes eo. a, b parameterere egy n-elemű minta alapján (könyv: 124. old.) Itt a mom. becsl. más, mint az ML.

2. Exp. eo. családban a mom. becslés=ML becslés, ui. a likelihood egyenlet, mint láttuk, ekvivalens azzal, hogy
$$\mathbb{E}(T(\mathbf{X})) = T(\mathbf{X}),$$
ahol T a kanonikus elégséges stat. Mivel T komponensei valamilyen momentumok, a fenti egyenlet a valódi és az empirikus momentumok egyenlőségét jelenti.

3. (Példatár, 2.4, 38/a): Legyen $X_1, \ldots, X_n$ fae. minta az
$$f_\theta(x) = \frac{2x}{3\theta^2}, \quad \theta \le x \le 2\theta$$
sfv.-ű eo-ból, $\theta > 0$ par. Adjunk mom. becslést θ-ra:
$$\mathbb{E}_\theta(X) = \int_\theta^{2\theta} x \frac{2x}{3\theta^2}\, dx = \frac{14}{9}\theta.$$
Ezért
$$\frac{14}{9}\theta = \bar{X},$$
utóbbi az első empirikus mom. Innen $\hat{\theta} = \frac{9}{14}\bar{X}$.

2. Blackwellizálás

Példatár 2.5
48. példa: $X_1, \ldots, X_n$ fae. Bernoulli minta p par. $(n > 2)$.

- Adjon elégs. stat.-ot p-re. Láttuk, hogy $T = \sum_i X_i$ az.
- Adjon X_1 és X_2 fv-eként torzítatlan becslést a $\psi(p) = p(1-p)$ par. fv-re: $S = X_1(1 - X_2)$.
- Blackwellizáljunk, azaz $U = \mathbb{E}(S|T)$=? S feltételes eo.-a $T = t$ mellett:
$$\mathbb{P}(S = 1|T = t) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, \sum_{i=3}^n X_i = t-1)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = t)} =$$
$$= \frac{p(1-p)\binom{n-2}{t-1}p^{t-1}(1-p)^{(n-2)-(t-1)}}{\binom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t}} = \frac{\binom{n-2}{t-1}}{\binom{n}{t}}.$$
Ezért
$$\mathbb{E}(S|T = t) = \mathbb{P}(S = 1|T = t) = \frac{\binom{n-2}{t-1}}{\binom{n}{t}} = \frac{t(n-t)}{n(n-1)}$$

és
$$\mathbb{E}(S|T) = \frac{T(n-T)}{n(n-1)} = \bar{X}(1-\bar{X})\frac{n}{n-1}.$$

FONTOS: a feltételes eo. is Bernoulli, melynek vh. értéke a paraméter!
53. példa: $X_1, \dots, X_n$ fae. minta θ par. Poi eo.-ból.

- Adjon elégs. stat.-ot θ-ra. Láttuk, hogy $T = \sum_i X_i$ az.
- Adjon X_1 fv-eként torzítatlan becslést a $\psi(\theta) = \theta^2 e^{-\theta}$ par. fv-re: $S = 2I_{X_1=2}$.
- Blackwellizáljunk, azaz $U = \mathbb{E}(S|T)$=? $I_{X_1=2}$ feltételes eo.-a $T = t$ mellett:
$$\mathbb{P}(X_1 = 2|T = t) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 2, \sum_{i=2}^n X_i = t-2)}{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i = t)} =$$
$$= \frac{\frac{\theta^2}{2}e^{-\theta} \cdot \frac{((n-1)\theta)^{t-2}}{(t-2)!}e^{-(n-1)\theta}}{\frac{(n\theta)^t}{t!}e^{-n\theta}} =$$
$$= \frac{(n-1)^{t-2}t(t-1)}{2n^t}.$$

Igy
$$\mathbb{E}(S|T) = 2\frac{(n-1)^{T-2}T(T-1)}{2n^T} = \frac{(n-1)^{\sum_i X_i - 2} \cdot (\sum_i X_i)(\sum_i X_i - 1)}{n^{\sum_i X_i}}.$$

3. Bayes becslés

Példatár 4.1/ *2. példa*: $X_1, \dots, X_n$ fae. minta θ par. Exp eo.-ból ($n \geq 3$). Adjon Bayes becslst a $\psi(\theta) = \theta^{-3}$ par. fv-re, ha az apriori eo. 2 par. Exp.
Megoldás: a könyv jelöléseivel, θ a posteriori eo.-a $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ feltétel mellett
$$f(t|\mathbf{x}) = L_t(\mathbf{x})q(t) = \prod_{i=1}^n te^{-tx_i} \cdot 2e^{-2t} = 2t^n e^{-(\sum_i x_i + 2)t}.$$

Innen felismerjük, hogy θ a posteriori eo-a az $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ feltétel mellett $\Gamma_{n+1}(\sum_i x_i + 2)$. Ezért egy ilyen Gamma-eo. -3-adik momentuma kell.

Ha $Y \sim \Gamma_\alpha(\lambda)$, akkor ennek m-edik momentuma (m egész):
$$\mathbb{E}(Y^m) = \int_0^\infty x^m \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\lambda^m} \int_0^\infty \frac{\lambda^{m+\alpha} x^{m+\alpha-1}}{\Gamma(m+\alpha)} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\lambda^m}.$$

Innen $m = -3$, $\alpha = n+1$, $\lambda = \sum_i x_i + 2$ esetre aktualizálva:
$$\mathbb{E}(\theta^{-3}|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \frac{\Gamma(-3+n+1)}{\Gamma(n+1)(\sum_i x_i + 2)^{-3}},$$

ahonnan egyszerűsítés után $\psi(\theta)$ Bayes becslése:
$$\mathbb{E}(\theta^{-3}|\mathbf{X}) = \frac{(\sum_i X_i + 2)^3}{n(n-1)(n-2)}.$$

FONTOS: nem kell integrálni, hanem felismerve az eloszlást, a konstansok átpakolásával dolgozunk. A normáló konstans így végül kijön, beleépül $\mathbf{x}$.

Megjegyzzük, hogy $m = 1$, $\alpha = n + 1$, $\lambda = \sum_i x_i + 2$ esetre aktualizálva:

$$\mathbb{E}(\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \frac{\Gamma(1 + n + 1)}{\Gamma(n + 1)(\sum_i x_i + 2)^1},$$

ahonnan egyszerűsítés után θ Bayes becslése:

$$\hat{\theta} = \mathbb{E}(\theta|\mathbf{X}) = \frac{n + 1}{\sum_i X_i + 2}.$$

4. Konfidenciaintervallum

Adjunk meg 90%-os konfidenciaintervallumot az exp. eo. paraméterére, ha n nagy' ($n \geq 30$).

A Rao–Blackwell–Kolmogorov tétel miatt $\frac{1}{\bar{X}}$ hatásos becslés λ-ra. A CHT értelmében nagy' n-re $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{n\lambda^2})$. Ezért

$$\mathbb{P}_\lambda \left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\sqrt{n}\lambda}} < z_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha.$$

Leosztva az egyenlőtlenségben $\sqrt{n}\bar{X}$-al:

$$\mathbb{P}_\lambda \left(\frac{-z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\bar{X}} < \frac{1 - \frac{1}{\lambda\bar{X}}}{\frac{1}{\lambda}} < \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\bar{X}} \right) = 1 - \alpha.$$

Ekvivalens módon

$$\mathbb{P}_\lambda \left(\frac{-z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\bar{X}} < \lambda - \frac{1}{\bar{X}} < \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\bar{X}} \right) = 1 - \alpha,$$

ahonnan

$$\mathbb{P}_\lambda \left(\frac{1}{\bar{X}} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\bar{X}} < \lambda < \frac{1}{\bar{X}} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\bar{X}} \right) = 1 - \alpha,$$

ahonnan $\left(\frac{1}{\bar{X}} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\bar{X}}, \frac{1}{\bar{X}} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\bar{X}} \right)$ szimmetrikus konf. interrvallum λ-ra $\frac{1}{\bar{X}}$ körül.

Pl. árhullámok (4m feletti) túllépéseire: $n = 41$, $\bar{x} = 0.84$, a 90%-os konf. int. $(0.93, 1.57)$, ahol $\alpha = 0.1$ és $z_{\alpha/2} = 1.645$.