

STATISZTIKA 2, HÁZI FELADAT 1.

1. Legyen $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ fae. minta! Bizonyítsa be, hogy $X_1, X_1+X_2, \dots, X_1+X_2+\dots+X_{n-1}$ együttes eloszlása az $X_1+X_2+\dots+X_n=t$ feltétel mellett megegyezik egy $n-1$ elemű $\mathcal{U}[0, t]$ rendezett minta együttes eloszlásával!
2. Legyen X, Y együttes eloszlása az

$$f(x, y) = 2e^{-(x+y)}, \quad \text{ha } 0 < x < y$$

sűrűségfüggvénnyel megadva! Integrálás nélkül, csupán az exponenciális rendezett mintára gondolva bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(Y < 3X) = 1/2!$

3. Keressen minimális elégséges statisztikát a geometriai eloszlás paraméterére! Tagja-e a geometriai eloszlás az exponenciális eloszláscsaládnak?
4. Legyen X_1, \dots, X_n fae. minta a θ eltolásparaméteres Cauchy-eloszlásból, melynek sűrűségfüggvénye

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (x - \theta)^2}.$$

Számolja ki a fenti minta Fisher-információját!

5. Elárultak nekünk egy elemet az n -elemű $\mathcal{U}[0, 1]$ fae. mintából (x). Adjon maximum likelihood becslést arra, hogy ez az elem hányadik a rendezett mintában! Adja meg az ML-becslést az $n = 100, x = 0,384$ esetben!
6. Legyen X_1, \dots, X_n fae. minta λ paraméterű Poisson-eloszlásból. Adjon meg X_1 függvényében torzítatlan becslést a $\psi(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}$ paraméterfüggvényre, majd blackwellizálja azt egy elégséges statisztikával!
7. Legyen $X_1, \dots, X_n \sim \Gamma_{\alpha}(\lambda)$ fae. minta, ahol $\alpha > 0, \lambda > 0$ ismeretlen valós paraméterek! Adjon momentum becslést az (α, λ) paraméterpárra a fenti n -elemű minta alapján!
8. Legyen $X_1^* \leq \dots \leq X_n^*$ egy $\mathcal{U}[a, b]$ fae. mintából nyert rendezett minta! Mutassa meg, hogy az $(X_1^* + X_n^*)/2$ statisztika torzítatlan és hatásosabb becslése a várható értéknek, mint \bar{X} !
9. Adjuk meg a $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ paraméterű,

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}, \quad x > 0$$

sűrűségfv.-ű lognormális eloszlás paramétereinek becslését maximum likelihood módszerrel az X_1, \dots, X_n fae. minta alapján! Adjunk elégséges statisztikapárt is a paraméterekre a minta alapján! Tagja-e az eloszlás az exponenciális eloszláscsaládnak?

10. Az X_1, \dots, X_n fae. minta alapján adjon Bayes-becslést a Poisson-eloszlás paraméterére, ha annak a priori eloszlása $\Gamma_{\alpha}(\lambda)$, ahol $\alpha > 0, \lambda > 0$ adott valós számok!