æ

STATISZTIKA 2, HÁZI FELADAT 2.

1. Adjuk meg az $\alpha > 0$, $\beta > 0$ paraméterű,

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}, \quad ha \quad x \geq \alpha$$

különben 0 sűrűségfv.-ű Pareto eloszlás paramétereinek becslését maximum likelihood módszerrel az $X_1, \dots, X_n$ fae. minta alapján!

2. Legyen $X_1, \dots, X_n$ fae. minta az $\mathcal{N}(\mu, 1)$ eloszlásból! Adjon Bayes becslést μ-re, ha μ a priori eloszlása $\mathcal{N}(0, 1/9)$!

3. Egy gyár kétféle szabvány szerint gyárt csavarokat. A csavarok valamely mérete normális eloszlású 0.2 szórással, a várható érték pedig a

$$H_0 : \mu = 4.2 \quad \text{ill.} \quad H_1 : \mu = 4.5$$

alternatíva valamelyike. Találunk egy 4.3 méretű csavart, nem tudjuk, hogy melyik szabvány szerint gyártották. A Neyman–Pearson tétel felhasználásával konstruáljon 0.05 terjedelmű, egyenletesen legerősebb próbát a H_0 és H_1 közötti választásra, és ennek segítségével 95%-os szinten döntse el, hogy melyik szabványba sorolná a csavart! Adja meg a másodfajú hiba valószínűségét is!

4. Bizonyítsa be, hogy a λ paramérterű Poisson eloszlások családja monoton likelihood-hányadosú ($\lambda > 0$)! Az $X_1, \dots, X_n$ fae. Poisson minta alapján konstruáljon ε terjedelmű, egyenletesen legerősebb véletlenített próbát a következő alternatívák közötti döntésre:

$$H_0 : \lambda \leq 3 \quad , \quad H_1 : \lambda > 3.$$

Adja meg a randomizált próba konstansait $n = 3$ és $\varepsilon = 0.1$ esetén!

5. A centrális határeloszlás tétel segítségével adjon 95%-os aszimptotikus megbízhatósági szintű konfidenciaintervallumot a Poisson eloszlás paraméterére az $X_1, \dots, X_n$ fae. minta alapján (n "nagy")!

6. Legyen $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$ fae. minta! Alkalmazzon likelihood-hányados próbát a

$$H_0 : \lambda = 3 \quad \text{vers.} \quad H_1 : \lambda \neq 3$$

alternatívák közötti döntésre (azaz adja meg az ε terjedelmű próba kritikus tartományának alakját), ha

a. $n = 1$;

b. n "nagy".

7. Egy lepkefaj fénycsapdás gyűjtésére két (A és B) csapdatípust próbálunk ki, $n_1 = 11$ ill. $n_2 = 8$ alkalommal végezve a kísérletet. A befogott egyedek számára a következő adatokat kaptuk:

$$A : 41, 34, 33, 36, 40, 25, 31, 37, 34, 30, 38$$
$$B : 52, 57, 62, 55, 64, 57, 56, 55.$$

Jelölje X ill. Y az A ill. B csapdatípussal végzett kísérlet során adódó egyedszámokat, mint v.v.-kat! Feltesszük, hogy X és Y normális eloszlásúak. 90%-os szinten döntsön a szórások egyenlőségéről:

$$H_0 : \mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(Y) \quad \text{vers.} \quad H_1 : \mathbb{D}^2(X) \neq \mathbb{D}^2(Y)!$$

Utána vizsgálja meg a

$$H_0 : \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \quad \text{vers.} \quad H_1 : \mathbb{E}(X) \neq \mathbb{E}(Y)$$

hipotézist 95%-os szinten!

8. A feladat ugyanaz, mint 7.-ben, csak most a C és D csapdát szeretnénk összehasonlítani:

$$C : 41, 45, 50, 58, 47, 48, 44, 60, 48$$
$$D : 36, 32, 52, 44, 60, 48, 64, 56, 52, 65, 30, 45, 38, 33, 30, 35.$$

9. 200 embert megfigyelve, szemszínükre és hajszínükre a következők adódtak:

	szőke haj	barna haj	fekete haj
kék szem	42	28	3
barna szem	17	89	21

95 és 99%-os szinten is döntse el, független-e a szemszín a hajszíntől!

10. 90%-os szinten vizsgálja meg, hogy az alábbi 100 elemű minta származhat-e
    a. 3 paraméterű Poisson eloszlásból? A mintában a 0,1,2,3,4 értékek fordultak elő a következő gyakoriságokkal:

    $$12, 32, 25, 21, 10.$$

    (Használja a Poisson- és χ^2-eloszlások táblázatát!)
    b. Egyáltalán származhat-e a minta Poisson eloszlásból?