Cardano-képlet

Szerkesztette: Markó Zoltán

2009. január 15.

A harmadfokú egyenlet általános alakja:

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0 \tag{1}$$

Megoldóképletének levezetéséhez legyen $y := x - \frac{a}{3}$, ekkor (1) a következő alakot ölti:

$$x^3 - \frac{a^3}{27} - ax^2 + \frac{xa^2}{3} + ax^2 + \frac{a^3}{9} - \frac{2xa^2}{3} + bx - \frac{ab}{3} + c = 0$$

Ez a megfelelő összevonások után

$$x^3 + px + q = 0 \tag{2}$$

alakba írható, jelölje x_0 enneke egy gyökét $\mathbb{C}$-ben.

Tekintsük az $u^2 - x_0u - \frac{p}{3} = 0$ másodfokú egyenletet, jelöljük gyökeit α, β-val. A másodfokú egyenlet gyökeire és együtthatóira vonatkozó összefüggések szerint ekkor

$$\alpha + \beta = x_0 \tag{3}$$

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3} \tag{4}$$

(4) szerint $3\alpha\beta + p = 0$. Helyettesítsük be (3) szerint x_0-ra kapott értéket (2)-be:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + p\alpha + p\beta + q &= 0 \\ \alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)\alpha + (3\alpha\beta + p)\beta + q &= 0 \\ \alpha^3 + \beta^3 &= -q \end{aligned}$$

Tehát $\alpha^3 + \beta^3 = -q$, és (4)-t köbre emelve $\alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}$. Ez éppen azt jelenti, hogy α^3 és β^3 gyökei a $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ egyenletnek. A másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint megoldásai:

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

ahol $z_1 = \alpha^3$, $z_2 = \beta^3$, így tehát (komplex) köbgyököt vonva:

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

És ekkor

$$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{5}$$

(5) az ún. *Cardano-képlet.* x_0 ismeretében 1 gyökei már könnyen meghatározhatók.