Matematika ÉP2

Kétváltozós függvények deriválása, 5. feladatsor

2017/18. tavaszi félév

1. Elméleti összefoglaló

Iránymenti derivált

Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli gradiens vektorának nevezzük az adott pontbeli parciális deriváltakból álló vektort:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)\right)$$

A parciális deriváltakhoz hasonlóan határértékkel definiálható a függvény (x_0, y_0) pontbeli tetszőleges $\underline{v}$ irányú iránymenti deriváltja. Ez a $\underline{v}$ irányú egységvektor és a gradiens vektor skalárszorzataként számolható:

$$f'_{\underline{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

A képletről leolvasható, hogy az iránymenti derivált a gradiens irányában a legnagyobb és a gradienssel ellentétes irányban a legkisebb.

Lokális szélsőértékek

Legyen f függvény egy olyan tartományon definiálva, melynek (x_0, y_0) belső pontja. (x_0, y_0) lokális maximum/ minimum hely, ha van olyan (x_0, y_0) középpontú nyílt körlap, melyben minden értelmezési tartomány beli pont függvényértéke kisebb vagy egyenlő/ nagyobb vagy egyenlő $f(x_0, y_0)$-nál. A továbbiakban feltételezzük, hogy f értelmezési tartománya egy nyílt T halmaz és f elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak a T nyílt halmazon, aminek eleme (x_0, y_0).

*Kritikus pont*nak nevezzük a T értelmezési tartomány azon pontjait, melyekben mindkét elsőrendű parciális derivált nulla.

*Nyeregpont*nak nevezzük a T értelmezési tartomány azon (x_0, y_0) pontjait, melyekben mindkét elsőrendű parciális derivált nulla és minden (x_0, y_0) középpontú nyílt körlapon van olyan pontja az értelmezési tartománynak, melynek függvényértéke kisebb az $f(x_0, y_0)$ értéknél, és van olyan is, melynek nagyobb.

Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele: Ha (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van f-nek, akkor itt $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele: Ha $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$ és f második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az (x_0, y_0)-t tartalmazó nyílt T halmazon, akkor

1. Ha $det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor f-nek (x_0, y_0)-ban lokális minimuma van és ez a minimum érték $f(x_0, y_0)$.

2. Ha $det\begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix} > 0$ és $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$, akkor f-nek (x_0,y_0)-ban lokális maximuma van és ez a maximum érték $f(x_0,y_0)$.

3. Ha $det\begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix} < 0$, akkor f-nek (x_0,y_0)-ban nyeregpontja van.

***Abszolút szélsőértékek**

Ha a folytonos $f(x,y)$ korlátos és zárt halmazon értelmezett, akkor ott felveszi a maximumát és minimumát. Ezen most *abszolút maximumot*, vagy *abszolút minimumot* értünk. Az abszolút szélsőérték megkeresésének menete a következő:

- A tartomány belsejében megnézzük a lehetséges szélsőértékhelyeket.
- A tartomány határán megnézzük a lehetséges szélsőértékhelyeket.
- Kiszámoljuk az előzőekre a függvényértékeket és kiválasztjuk közülük a legnagyobbat és a legkisebbet.

***Feltételes szélsőértékek**

Adott feltételek melletti lokális szélsőértékek, azaz a *feltételes lokális szélsőértékek* kiszámításának fontos a Lagrange-multiplikátoros módszer. Ha az $f(x,y)$-t szeretnénk minimalizálni vagy maximalizálni egy $g(x,y)=0$ feltétel mellett, akkor ezt megtehetjük a

$$h(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

segédfüggvény segítségével (λ a Lagrange multiplikátor). Az eredeti probléma lokális feltételes szélsőértékeit a segédfüggvény kritikus pontjai között kell keresni.

2. Feladatok

1. Határozza meg a következő függvények adott irány szerinti iránymenti deriváltját a megadott pontban!

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 \ln y}{x^2+3y^2}, \quad \underline{v} = (-3,4), \quad P_0(-1,1)$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{xy(1+y)}{x^2+y^2}, \quad \underline{v} = (-4,3), \quad P_0(3,1)$

   (c) $f(x,y) = x^4[2-\ln(1+y^2)], \quad \underline{v} = (1,3), \quad P_0(1,0)$

   (d) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right), \quad \underline{v} = (1,3), \quad P_0(-3,-4)$

2. Határozza meg mely irány esetén lesz nulla az $f(x,y) = x^3+y^3-3xy+e^y$ függvény $P_0(2,0)$ pontbeli iránymenti deriváltja! És mely irány esetén lesz maximális az iránymenti derivált?

3. Milyen irányban lesz az $f(x,y) = y^3 e^{-2x-1}$ függvény $(\frac{1}{2},1)$ pontbeli iránymenti deriváltja maximális, illetve minimális?

4. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek hol lehet lokális szélsőértéke, van-e, s ha létezik, akkor minimum vagy maximum!

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3x - y + 5$

   (c) $f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$

   (d) $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 - 1$

   (e) $f(x,y) = x^2y^3(6 - x - y)$

   (f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

   (g) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

   (h) $f(x,y) = (x - y + 1)^2 - (x^2 - 2)^2$

   (i) $f(x,y) = xy(x + 8)(y - 6)$

   (j) $f(x,y) = (x^3 - 9)(y^2 + 4y)$

   (k) $f(x,y) = x^3y^2(4 - x - y)$

   (*l) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$

   (*m) $f(x,y) = \cos x \cos y \cos(x + y)$

5. Ossza fel a 12-t három részre úgy, hogy a három szám szorzata maximális legyen!

6. Egy derékszögű hasáb egy csúcsába összefutó éleinek összege $45\ cm$. Hogyan kell az éleket megválasztani, hogy a hasáb térfogata maximális legyen?

7. Téglatest alakú, felül nyitott $4\ m^3$ térfogatú tartályt akarunk készíteni a lehető legkevesebb anyag felhasználásával. Mekkorák legyenek a téglatest élei?

8. Ossza fel a 18-at három részre úgy, hogy az első rész négyzetének, a második rész köbének és a harmadik résznek a szorzata maximális legyen!

9. Mikor a legnagyobb a 400 méter kerületű szimmetrikus trapéz alakú telek területe? (Mekkorák a szárai és a hosszabbik alapon fekvő szögei?)

*10 Egy lapos körlap alakú tányér alakját a $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely (x,y) pontban a hőmérséklet értéke $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ lesz. Keressük meg a tányér legforróbb és leghidegebb pontját!