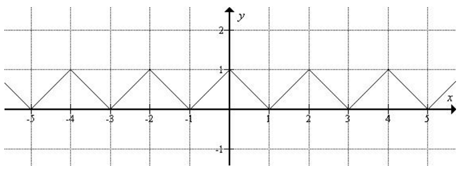
Egy mindenütt folytonos, sehol sem differenciálható függvény

2009. május 28.

Közismert, hogy ha egy egyváltozós valós függvény adott intervallumon differenciálható, akkor ott folytonos is. Fordítva viszont ez az állítás nem igaz, ugyancsak ismert példa az abszolútérték-függvény, amely minden pontban folytonos, de az $x = 0$ pontban nem differenciálható.

Az már meglepőbb állításnak tűnik, hogy van olyan függvény, amely mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható: a következőkben egy ilyen függvényre mutatunk példát. Az alapötlet, hogy az $f(x) = |x|$ függvény $x = 0$-beli "hibáját" ismételjük meg végtelen sokszor, a valós számok mentén végtelen sűrűn.

Legyen e célból az alapfüggvényünk: $\varphi(x) = |x|$, ha $|x| \leq 1$, és $\varphi(x+2) = \varphi(x)$, azaz φ 2-periodikus (képe az 1. ábrán).



1. ábra. Az alapfüggvény

Ez már megszámlálható sok pontban nem differenciálható. Sűrítsük a hibát, legyen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

Megmutatjuk, hogy ez a függvény mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható. A folytonosság a függvénysorokra vonatkozó Weierstrass-tételből következik, ugyanis

$$f(x) < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

hiszen $|\varphi| < 1$, vagyis f konvergens numerikus sorral becsülhető felülről, így egyenletesen konvergens, és így folytonos.

Ha a függvény sehol sem folytonos, akkor kell találnunk egy olyan 0-hoz tartó δ_m-et, melyre $\left|\dfrac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| \to \infty$ minden x-re.

Legyen $\delta_m = \pm\dfrac{1}{2\cdot 4^m}$, az előjelet úgy választjuk, hogy $4^m x$ és $4^m(x+\delta_m)$ közé ne essen egész (két hibás pont között "egy száron maradunk"). Akkor a differenciahányados:

$$\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\varphi\left(4^n\left(x\pm\frac{1}{2\cdot 4^m}\right)\right)-\varphi\left(4^n x\right)\right)}{\pm\frac{1}{2\cdot 4^m}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot a_n.$$

Vizsgáljuk a_n értékét n és m viszonyában. Ha $n>m$, akkor

$$\varphi\left(4^n x \pm \frac{4^n}{2\cdot 4^m}\right)-\varphi\left(4^n x\right)=0,$$

mivel φ 2-periodikus, és $\dfrac{4^n}{2\cdot 4^m}$ páros egész. Vagyis ha $n>m$, akkor $a_n = 0$. A differenciahányados tehát a választott δ_m-re véges összeg.

Ha most $n<m$, akkor $|a_n|$:

$$\left|\frac{\varphi\left(4^n x\pm\frac{4^n}{2\cdot 4^m}\right)-\varphi\left(4^n x\right)}{\pm\frac{1}{2\cdot 4^m}}\right| = \left|\frac{\varphi\left(4^n x\pm\frac{4^n}{2\cdot 4^m}\right)-\varphi\left(4^n x\right)}{\pm\frac{4^n}{2\cdot 4^m}}\right|\cdot 4^n \le 4^n,$$

ugyanis a φ függvény lipschitzes, azaz $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le|x-y|\ \forall x,y$, így

$$\varphi\left(4^n x\pm\frac{4^n}{2\cdot 4^m}\right)-\varphi\left(4^n x\right)\le\pm\frac{4^n}{2\cdot 4^m},$$

amiből már adódik a felírt egyenlőtlenség. Tehát ha $n<m$, akkor $a_n\le 4^n$.

Ha pedig $n=m$, akkor

$$\left|\frac{\varphi\left(4^m x\pm\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(4^m x\right)}{\pm\frac{1}{2\cdot 4^m}}\right| \le \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2\cdot 2^m}} = 4^m.$$

Így végül a fordított háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva a differenciahányados abszolútértéke alulról becsülhető:

$$\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| \ge \left|\left|\left(\frac{3}{4}\right)^m\cdot a_m\right| - \sum_{n\ne m}\left(\frac{3}{4}\right)^n|a_n|\right| \ge$$

$$\left|\frac{3^m}{4^m}\cdot 4^m - \sum_{n=0}^{m-1}\frac{3^n}{3^n}4^n\right| = 3^m - \frac{3^m-1}{3-1} = \frac{3^m+1}{2}.$$

Azaz ha $\delta_m\to 0$, miközben $m\to\infty$, akkor $\left|\dfrac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| > \dfrac{3^m}{2}\to\infty$, ami éppen azzal ekvivalens, hogy f sehol sem differenciálható, és ezt akartuk belátni.