Markó Zoltán

Középiskolai tanulmányok alapján átismétlendő, illetve önállóan feldolgozandó anyag

GEOMETRIA

ЯMK

Tartalomjegyzék

A sík egybevágósági és hasonlósági transzformációi

Egybevágósági transzformációk tulajdonságai

Definíció: geometriai transzformáció a ponthalmazok között értelmezett függvény. A következőkben az alaphalmaz és a képhalmaz is ugyanaz a sík, a tárgyalt transzformációk tehát a sík pontjai között létesítenek függvénykapcsolatot.
Geometriai transzformáció megadásakor a függvények megadásának szempontjait kell figyelembe venni, vagyis meg kell adnunk az alaphalmazt, a képhalmazt, és a hozzárendelési szabályt. Amennyiben nem kötjük ki külön, a geometriai transzformációk alaphalmaza a sík.
A geometriai transzformációk során alkalmazott legfontosabb fogalmak:
Tárgypont: az a pont, „amelyhez" hozzárendelünk (a függvények változóival analóg fogalom). Jelölése a magyar ábécé nagybetűivel történik, pl. *A*, *B*, *C*.
Képpont: az a pont, „amit" hozzárendelünk (a függvények helyettesítési értékével analóg fogalom). Jelölése vonással történik, pl. *A* pont képe *A'*.

Távolságtartás definíciója: azon geometriai transzformáció távolságtartó, melyben bármely két tárgypont távolsága egyenlő képpontjaik távolságával. A definícióból következik, hogy ha egy geometriai transzformáció távolságtartó, akkor szakasz képe vele megegyező hosszúságú szakasz.

Szögtartás definíciója: azon geometriai transzformáció szögtartó, melyben bármely szög képe az eredetivel megegyező nagyságú szög.
A távolságtartó transzformációk az egybevágósági transzformációk, míg a szögtartó transzformációk a hasonlósági transzformációk. Mindkét típussal lentebb részletesen foglalkozunk.
A távolságtartásból következik a szögtartás, és hogy egyenes képe egyenes.

Fixpont: olyan pont, melynek képe önmaga. Hasonlóan az olyan alakzatot, melynek képe önmaga, fixalakzatnak nevezzük.

Invariáns alakzat: olyan alakzat, melynek képe önmaga, de nem minden pontja fix.

Körüljárási irány: bármely sokszöget két lehetséges irányba tudunk körüljárni: megállapodás szerint az óramutató járásával ellentétes irányt tekintjük pozitívnak, az óramutató járásával megegyező irányt pedig negatívnak.

Egybevágósági transzformációk

Definíció: Egybevágósági transzformációnak nevezzük a geometriai transzformációt akkor, ha bármely szakasz képe ugyanolyan hosszúságú, mint az eredeti szakasz.
A definíció tulajdonképpen azt mondja ki, hogy az egybevágósági transzformáció nem más, mint távolságtartó transzformáció.

Definíció: két alakzatot egybevágónak nevezünk, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át. Az egybevágóság jele: $\cong$.

Mivel bármely síkbeli alakzat háromszögekre darabolható, ezért az egybevágóság eldöntéséhez célszerű megvizsgálni a háromszögek egybevágóságát.

Háromszögek egybevágóságának alapesetei

Bizonyítás nélkül, axiómaszerűen fogadjuk el a háromszögek következő 4 egybevágósági alapesetét. Két háromszög egybevágó, ha
(1) megfelelő oldalaik egyenlők;
(2) két-két oldaluk és e két oldal által közrefogott szögük egyenlő;
(3) két-két oldaluk és e két oldal közül a nagyobbikkal szemközti szög egyenlő;
(4) egy-egy oldaluk és a rajta fekvő két szögük egyenlő.

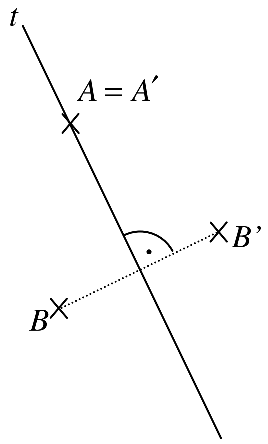
Ha e négy feltétel közül bármelyik is teljesül, akkor a két háromszög egybevágó. Két sokszöget akkor tekintünk egybevágónak, ha háromszögekre darabolva őket a háromszögek páronként egybevágók, és helyzetük megegyezik. Két kör akkor egybevágó, ha sugaraik hossza megegyezik.

A következőkben foglalkozunk a legfontosabb egybevágósági transzformációkkal.

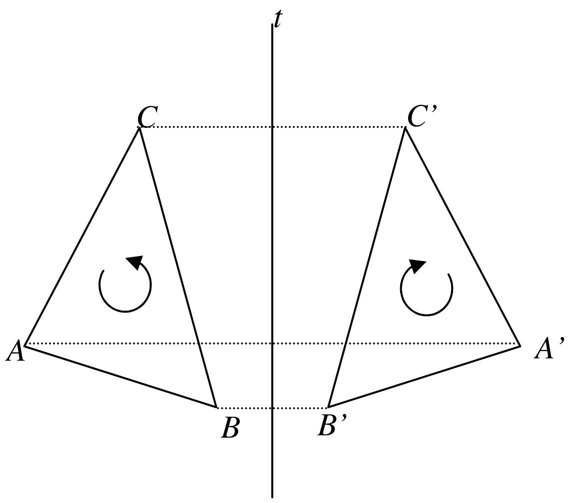
Tengelyes tükrözés

Definíció: Adott a síkon egy *t* egyenes, a tükrözés tengelye. A sík bármely *P* pontjához rendeljünk hozzá egy *P'* pontot úgy, hogy
- **ha $P \in t$, akkor $P' = P$,**
- **ha $P \notin t$, akkor *P*-hez olyan *P'*-t rendelünk, hogy a *PP'* szakasznak a *t* felezőmerőlegese legyen, vagyis $\overline{Pt} = \overline{P't}$.**

Ez a hozzárendelés egyértelmű, tehát függvény, értelmezési tartománya és értékkészlete is a sík.



A tengelyes tükrözés tulajdonságai:
(1) A tengelyen lévő pontok fixpontok, vagyis a tengelyen lévő pontok képe önmaga.
(2) A tengelyes tükrözés szimmetrikus, vagyis ha egy *P* pont képe *P'*, akkor *P'* képe *P*.
(3) A tengelyes tükrözés egyenestartó, vagyis egyenes képe egyenes. Ha az egyenes illeszkedik a tengelyre, akkor az egyenes fixegyenes. Ha az egyenes párhuzamos a tengellyel, akkor képe is párhuzamos a tengellyel és a tárgyegyenessel. Ha az egyenes merőleges a tengelyre, akkor a metszéspontjuk fixpont, és az egyenes képe önmaga, bár pontjai tükrözése miatt nem fix: invariáns egyenes.



(4) A tengelyes tükrözés szögtartó.
(5) A tengelyes tükrözés szakasztartó.
(6) A tengelyes tükrözés alakzattartó, az alakzatok körüljárási irányát megváltoztatja.

Középpontos tükrözés

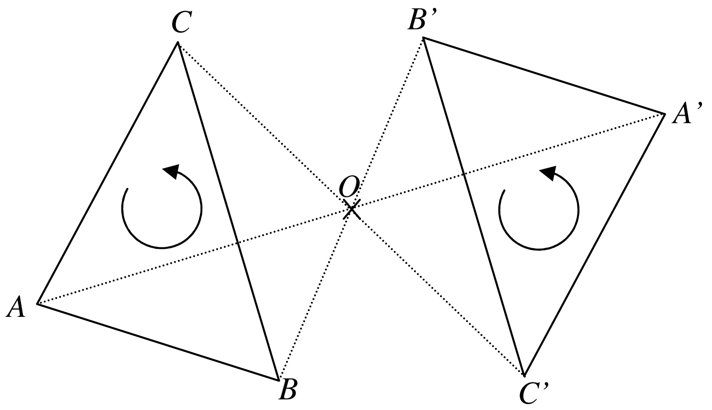
Definíció: Adott a síkon egy *O* pont, a tükrözés középpontja. A sík bármely *P* pontjához hozzárendelünk egy *P’* pontot úgy, hogy

- **ha** $P = O$**, akkor** $P = P'$**;**
- **ha** $P \neq O$**, akkor *P* képe olyan *P’* pont, melyre igaz, hogy a *PP’* szakasznak *O* a felezéspontja, vagyis** $PO = P'O$**.**

Ez a hozzárendelés egyértelmű, tehát függvény, értelmezési tartománya és értékkészlete is a sík.

A középpontos tükrözés tulajdonságai:

(1) Egyetlen fixpontja van, a tükrözés középpontja.
(2) A középpontos tükrözés szimmetrikus, vagyis ha egy *P* pont képe *P’*, akkor *P’* képe *P*.
(3) A középpontos tükrözés egyenestartó, ha az egyenes nem illeszkedik *O*-ra, akkor az egyenes képe párhuzamos az eredeti egyenessel. Ha az egyenes illeszkedik az *O*-ra, akkor az egyenes képe egybeesik az eredeti egyenessel, de mivel nem pontonként fix, ezért invariáns egyenesről beszélünk.
(4) A középpontos tükrözés szögtartó.
(5) A középpontos tükrözés szakasztartó.
(6) A középpontos tükrözés alakzattartó, az alakzatok körüljárási irányát nem változtatja meg:



A középpontos tükrözés nem más, mint egy 180°-os pont körüli forgatás (lásd lentebb).

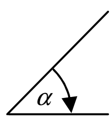
Pont körüli forgatás

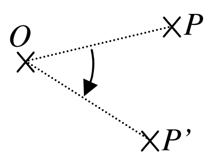
Definíció: Adott a síkban egy *O* pont, a forgatás középpontja és egy α szög, a forgatás szöge, és adott az elfogatás iránya, mely pozitív, ha az óramutató járásával ellentétes és negatív, ha azzal megegyező. A sík bármely *P* pontjához hozzárendelünk egy *P’* pontot úgy, hogy

- **ha** $P = O$**, akkor** $P' = P$**;**
- **ha** $P \neq O$**, akkor *P*-hez olyan *P’*-t rendelünk, hogy** $P'O = PO$**, és** $POP'\sphericalangle = \alpha$**.**

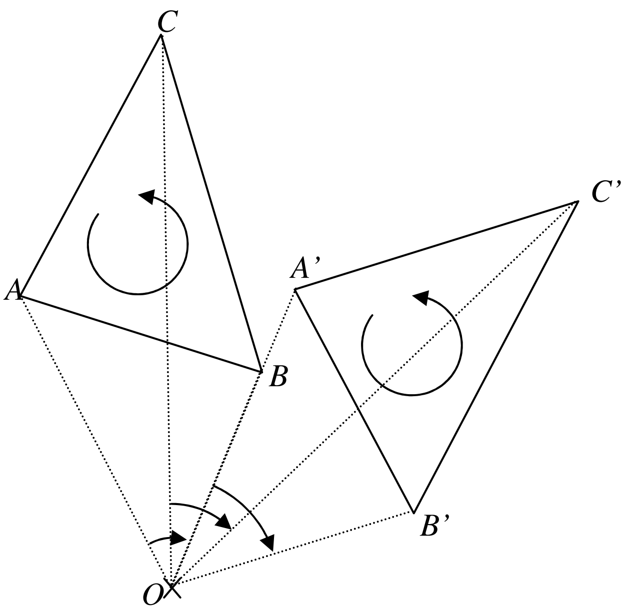
Ez a hozzárendelés egyértelmű, tehát függvény, értelmezési tartománya és értékkészlete is a sík.

A pont körüli forgatás tulajdonságai:





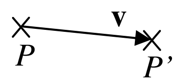
(1) Egyetlen fixpontja van, az *O* pont, ha $\alpha \neq 0°$. Ha $\alpha = 0°$, akkor minden pontja fixpont.
(2) Általános esetben nem szimmetrikus, ha $\alpha = 180°$, akkor a pont körüli forgatás középpontos tükrözés.
(3) Egyenestartó. Egyenes és képe egymással α szöget zár be.
(4) Szakasz- és távolságtartó.
(5) Szögtartó.
(6) Alakzattartó, a körüljárási irányt nem változtatja meg:



Eltolás

Definíció: Adott a síkban egy v vektor, az eltolás vektora. A sík bármely *P* pontjához hozzárendelünk egy *P'* pontot úgy, hogy $\overrightarrow{PP'} = \mathbf{v}$.

Ez a hozzárendelés egyértelmű, tehát függvény, értelmezési tartománya és értékkészlete is a sík.



Az eltolás tulajdonságai:

(1) Fixpontjai általánosan nincsenek, ha az eltolás vektora a nullvektor, akkor minden pontja fixpont.

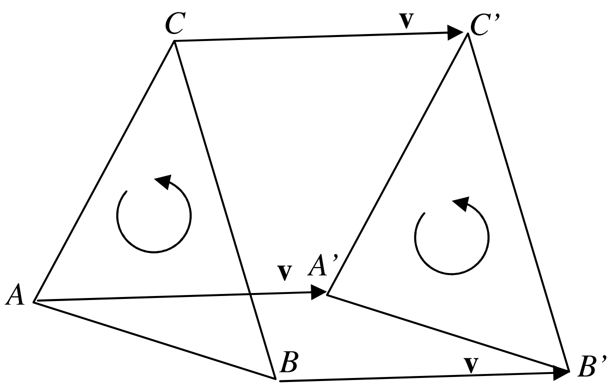
(2) Nem szimmetrikus.

(3) Egyenes képe egyenes, és a kép-egyenes párhuzamos a tárgy-egyenessel.

(4) Szakasz képe szakasz, az eltolás távolságtartó.

(5) Szögtartó.

(6) Alakzattartó, az alakzatok körüljárási irányát nem változtatja meg:



Egybevágósági transzformációk előállítása tengelyes tükrözések egymásutánjaként

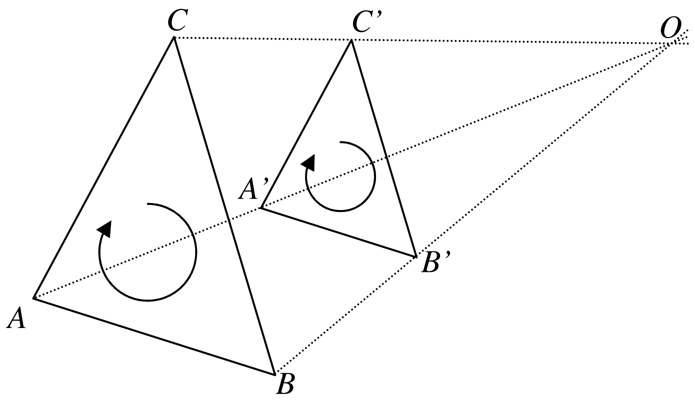
Könnyen belátható, hogy bármely tárgyalt egybevágósági transzformáció előáll tengelyes tükrözések egymásutánjaként, az irányításukat megtartó transzformációk esetén ez két megfelelő tengelyes tükrözést jelent, hiszen a tengelyes tükrözés az irányítást megfordítja.

Hasonlósági transzformációk

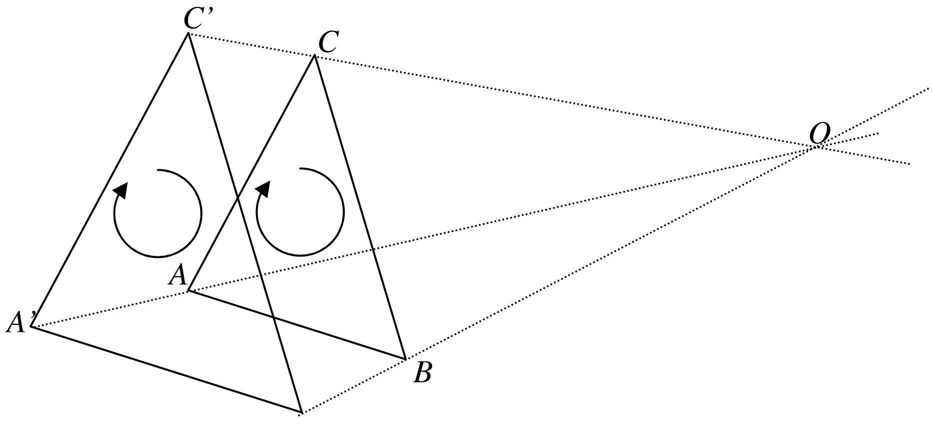
Definíció: hasonlósági transzformációknak nevezzük a szögtartó transzformációkat.
Belátható, hogy bármely hasonlósági transzformáció előállítható agy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció segítségével. Vizsgáljuk ezért először a középpontos hasonlóságot.

Középpontos hasonlóság

Definíció: Adott a síkon egy *O* pont, a hasonlóság középpontja, valamint adott egy 0-tól különböző *k* valós szám, a hasonlóság aránya. A sík minden *P* pontjához hozzárendelünk egy *P'* pontot úgy, hogy $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ teljesüljön.
Ha $0 < k < 1$, akkor a középpontos hasonlóság kicsinyítés, pl:



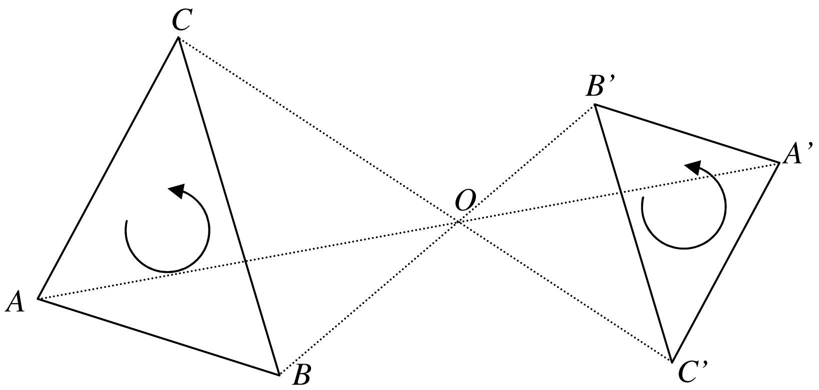
A kicsinyített kép körüljárási iránya megegyezik a tárgy körüljárási irányával.



Ha $k = 1$, akkor a középpontos hasonlóság helybenhagyás (identitás).

Ha $1 < k$, akkor a középpontos hasonlóság nagyítás, pl.:

Ha k negatív szám, akkor a középpontos tükrözéshez hasonlóan a P'-t a PO egyenesen vesszük fel, de az O-t tartalmazó félegyenesen. Ha $k = -1$, akkor a középpontos hasonlóság középpontos tükrözés, ha $-1 < k < 0$, akkor a középpontos hasonlóság kicsinyítés, ha pedig $k < -1$, akkor a középpontos hasonlóság nagyítás. Az alakzat körüljárása nem változik meg, pl.:



A k értékétől függetlenül, a középpontos hasonlóság tulajdonságai:
(1) Szögtartó.
(2) Egyenes képe vele párhuzamos egyenes;
(3) A szakasz hossza $|k|$-szorosára változik;
(4) Fixpontja O;
(5) A középpontra illeszkedő egyenesek invariáns egyenesek.

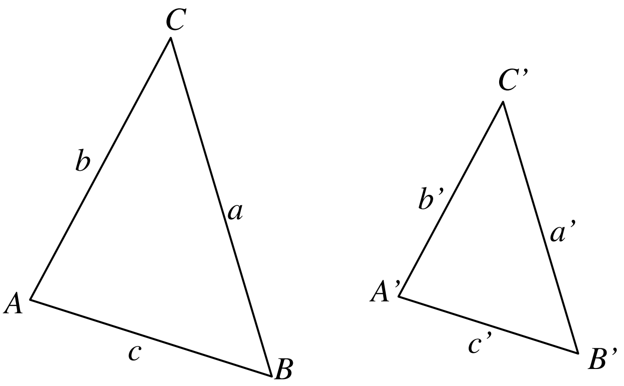
Hasonlóság

Definíció: Két síkbeli alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át. A hasonlóság jelölése: ~.
Bármely konvex sokszög háromszögekre darabolható, így célszerű megvizsgálni a háromszögek hasonlóságát.
Háromszögek hasonlóságának alapesetei

Axiómaszerűen, bizonyítás nélkül elfogadjuk a háromszögek hasonlóságának négy következő alapesetét:
Két háromszög hasonló, ha
(1) oldalaik hosszának arányai páronként egyenlők;
(2) két-két oldaluk hosszának aránya egyenlő és az általuk közbezárt szögek nagysága egyenlő;
(3) ha két-két oldaluk hosszának aránya egyenlő és a nagyobbikkal szemközti szögek nagysága egyenlő;
(4) ha szögeik páronként egyenlők.
A definícióból következik, hogyha két háromszög hasonló, akkor a megfelelő oldalaik aránya egyenlő. Például az ábrán látható ABC háromszög hasonló $A'B'C'$ háromszöghöz, és emiatt:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k\,,$$

ahol k a hasonlóság aránya.

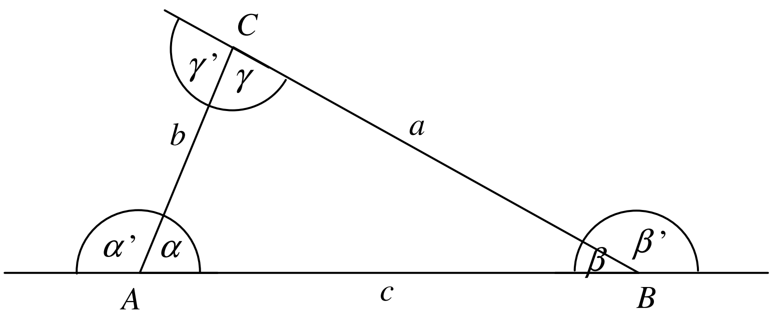


A háromszög

Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

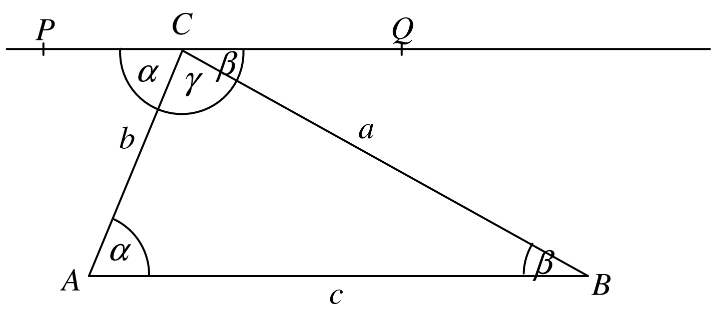
A háromszög belső és külső szögei

A háromszög belső szögei a már megfogalmazott α, β és γ szögek. Ezek mellékszögeit a háromszög külső szögeinek nevezzük.



Mivel a belső és külső szögek egymásnak mellékszögei, ezért $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = 180°$.
Tetszőleges háromszögre igazak a következő tételek:

Tétel: a háromszög belső szögeinek összege 180°.
Bizonyítás: Legyen adva az ABC háromszög, belső szögei rendre α, β és γ. Húzzunk párhuzamost C-n keresztül AB-vel. Ezen egyenesnek ábrán látható pontjai P és Q.



Mivel $PCA\sphericalangle$ és $CAB\sphericalangle$ váltószögek, ezért egyenlő nagyságúak. Hasonlóan, $QCB\sphericalangle$ és $CBA\sphericalangle$ is váltószögek, tehát ezek is egyenlők. Tehát $PCA\sphericalangle = \alpha$ és $QCB\sphericalangle = \beta$. Viszont az ábrán látható módon $PCA\sphericalangle + ABC\sphericalangle + QCB\sphericalangle = 180°$, és így $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Ezt kellett bizonyítanunk.

Tétel: a háromszög külső szögeinek összege 360°.
Bizonyítás: az előző tétel szerint $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, és tudjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' &= 180° \\ \beta + \beta' &= 180° \\ \gamma + \gamma' &= 180° \end{aligned}$$

Adjuk össze ezt a három egyenletet:

$$\begin{aligned} \underbrace{\alpha + \beta + \gamma}_{180°} + \alpha' + \beta' + \gamma' &= 540° \\ 180° + \alpha' + \beta' + \gamma' &= 540° \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= 360° \end{aligned}$$

Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, a tétel igaz.

Tétel: a háromszög egy külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.
Bizonyítás: belátjuk, hogy $\alpha' = \beta + \gamma$. Tudjuk, hogy $\alpha + \alpha' = 180° \Rightarrow \alpha' = 180° - \alpha$. Ugyanakkor azt is bizonyítottuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - \beta - \gamma$. Ezt felhasználva:

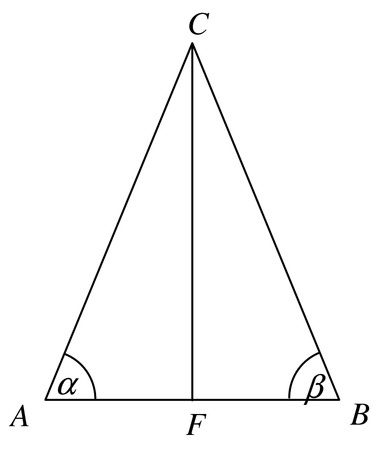
$$\begin{aligned} \alpha' &= 180° - \alpha \\ \alpha' &= 180° - (180° - \beta - \gamma) \\ \alpha' &= 180° - 180° + \beta + \gamma \\ \alpha' &= \beta + \gamma \end{aligned}$$

Ehhez hasonlóan a tétel a többi külső szögre is belátható.

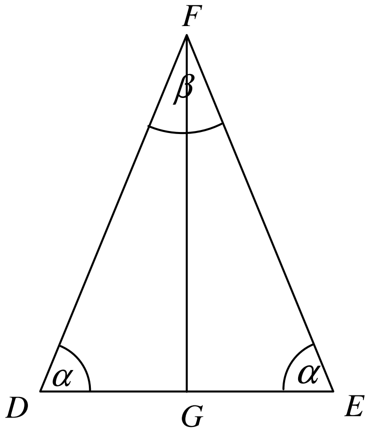
Összefüggés a háromszög oldalai és szögei között

Tétel: egy háromszögben két oldal akkor és csak akkor egyenlő, ha a velük szemközti szögek nagysága megegyezik: $a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Bizonyítás: először igazoljuk, hogyha egy háromszög két oldala egyenlő hosszúságú, akkor a megfelelő szögek nagysága egyenlő. Induljunk ki az ábrán látható ABC egyenlő szárú háromszögből, ahol $AC = BC$. Húzzuk be az AB oldal F felezőpontját C-vel összekötő szakaszt. Ily módon kapjuk AFC és FBC háromszöget. Ezen háromszögek megfelelő oldalai egyenlők, emiatt megfelelő szögeik is megegyeznek. Ebből következik, hogy ha $AC = BC$, akkor $\alpha = \beta$.

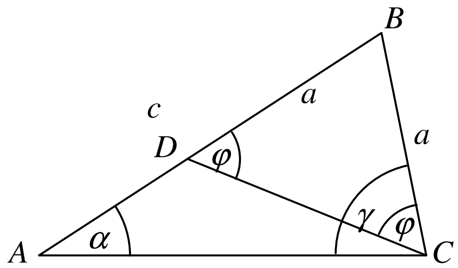


Most lássuk be ennek megfordítását: ha egy háromszögben két szög megegyezik, akkor a szögekkel szemközti szögek is megegyeznek. Tekintsük a következő *DEF* háromszöget, amelynek az ábrán látható szögek megegyeznek. Húzzuk be β szög szögfelezőjét! Ily módon kapjuk *DGF* és *GEF* háromszöget, melyeknek megegyezik egy oldaluk (*FG*) és minden szögük, tehát a két háromszög egybevágó. Ebből viszont már következik, hogy a megfelelő oldalaik megegyeznek, tehát a *DEF* háromszög egyenlő szárú, és ezt kellett bizonyítanunk.

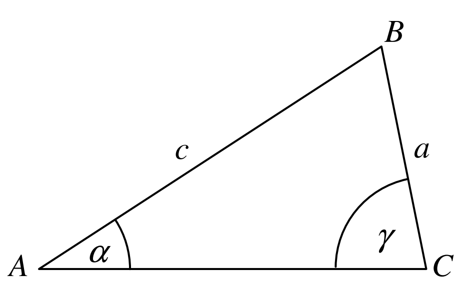


Tehát a tétel mindkét állítását beláttuk.
Ezen tételből következik, hogy a szabályos (egyenlő oldalú) háromszögnek minden szöge megegyezik, és mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért a szabályos háromszög egy szöge 60°-os.

Tétel: Egy háromszögben a hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van és viszont: $a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$.
Bizonyítás: először belátjuk, hogy egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van. Tekintsük az ábrán látható ABC háromszöget, melynek c oldala legyen nagyobb a-nál: $c > a$. Bizonyítandó ekkor, hogy $\gamma > \alpha$.
Vegyük fel a D pontot AB-n úgy, hogy $DB = BC = a$ teljesüljön. Ekkor DCB háromszög egyenlő szárú, és az ábrán látható szögei megegyeznek. Látszik, hogy $\varphi < \gamma$, és emellett $\alpha < \varphi$, hiszen BDC$\sphericalangle$ az ACD háromszög egy külső szöge, és így $\varphi = \alpha + (\gamma - \varphi)$. Felhasználva e két összefüggést kapjuk, hogy $\alpha < \varphi < \gamma$, vagyis $\alpha < \gamma$, és ezt kellett bizonyítanunk.



Most bizonyítsuk e tétel megfordítását, vagyis hogy a háromszögben nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal van. Tekintsük a DEF háromszöget, ahol az ábrán látható módon $\gamma > \alpha$. Bizonyítandó ekkor, hogy $c > a$.
Végezzük a bizonyítást indirekt úton, vagyis tegyük fel, hogy a $c > a$ nem igaz. Ekkor egyrészt teljesülhet az egyenlőség a két oldal között, másrészt a $c < a$ reláció.
Ha $c = a$, akkor $\gamma = \alpha$, és ez ellentmond a kiindulási feltételnek, tehát ez az eset nem lehetséges.
Ha $c < a$, akkor $\gamma < \alpha$, és ez szintén ellentmond a kiindulási feltételnek. Tehát csak a $c > a$ reláció fordulhat elő, ha $\gamma > \alpha$. Ezt kellett bizonyítanunk.



Háromszög-egyenlőtlenség

Tétel: a háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál. Ezt az összefüggést háromszög-egyenlőtlenségnek nevezzük. A tétel szerint a szokásos jelölésekkel: $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$.

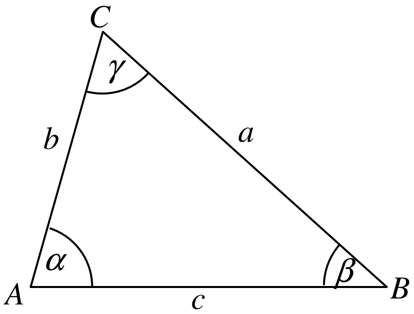
Bizonyítás: a tétel közvetlenül következik a háromszög megszerkeszthetőségéből. Ha ugyanis a háromszög két oldalának összege kisebb lenne, mint a harmadik oldal, akkor e három szakasz nem határozna meg háromszöget. Emiatt a háromszög létezéséhez a háromszög-egyenlőtlenségnek teljesülnie kell.

Megjegyzés: előadáson vettük az egzakt bizonyítást.

Szinusztétel

Szinusztétel: A háromszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint a velük szemközti szögek szinuszai. A szokásos jelölésekkel:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta};\ \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma};\ \frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$



Bizonyítás: A háromszög területét meghatározhatjuk a trigonometrikus területképlet segítségével. Felírva ezt úgy, hogy α és β legyen az oldalak által közbezárt szögek:

$$T=\frac{bc\sin\alpha}{2} \text{ és } T=\frac{ac\sin\beta}{2}.$$

A két terület értelemszerűen megegyezik, vagyis:

$$\frac{bc\sin\alpha}{2}=\frac{ac\sin\beta}{2}$$
$$b\sin\alpha=a\sin\beta$$

Mivel a háromszög egyik oldala és egyik szögének szinusza sem lehet 0, ezért a kapott egyenletet a következő alakra rendezhetjük:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

A tétel hasonlóan belátható bármely két oldal esetén.

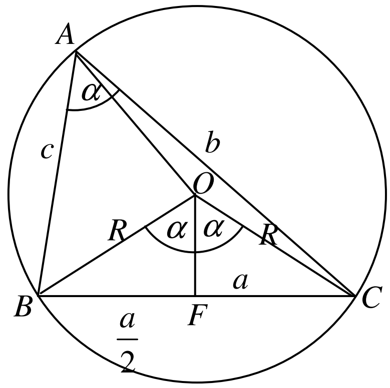
Általános szinusztétel

Általános szinusztétel: Egy háromszög egy oldalának és a vele szemközti szög szinuszának hányadosa állandó, értéke a háromszög köré írható kör sugarának kétszerese.

A szokásos jelölésekkel, ha a háromszög köré írható kör sugara *R*:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R\,.$$

Bizonyítás: A háromszög köré írható kör középpontja legyen az ábrán látható módon O. Ekkor a kerületi és középponti szögek tétele alapján $BOC\sphericalangle=2\alpha$, és ekkor BOC háromszög egyenlő szárúsága miatt $BOC\sphericalangle=\alpha$. Írjunk fel a BOF derékszögű háromszögben szinusz szögfüggvényt:



$$\sin\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{R}\Rightarrow a=2R\sin\alpha\,.$$

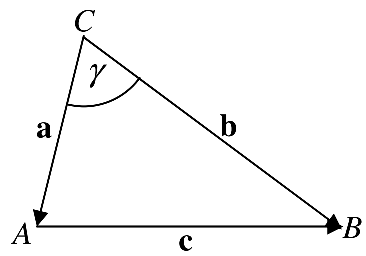
Hasonlóan belátható a másik két oldalra is, hogy:

$$b=2R\sin\beta \text{ és } c=2R\sin\gamma\,.$$

A kapott egyenleteket a szögek szinuszával osztva adódik a tétel.

Koszinusztétel

Koszinusztétel: A háromszög egyik oldalának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetösszegéből kivonjuk e két oldal és ezen két oldal által bezárt szög koszinuszának szorzatát.
A szokásos jelölésekkel: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. A koszinusztétel nem más, mint a Pitagorasz-tétel általánosítása, illetve a Pitagorasz-tétel a koszinusztétel speciális esete, ha a tételben szereplő szög 90°-os.
Bizonyítás: Tekintsük az ábrán látható háromszöget, és vezessük be a következő vektorokat: $\overrightarrow{CA}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$. Ekkor $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Írjuk fel $\mathbf{c}$ vektor négyzetét:



$$\mathbf{c}^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{ab}=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma\,.$$

Ugyanakkor egy vektor négyzet egyenlő abszolút értékének négyzetével, és a jelölt vektorok abszolút értékei nem mások, mint a háromszög oldalainak hosszai. Így:

$$\mathbf{c}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma$$
$$|\mathbf{c}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma$$
$$c=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

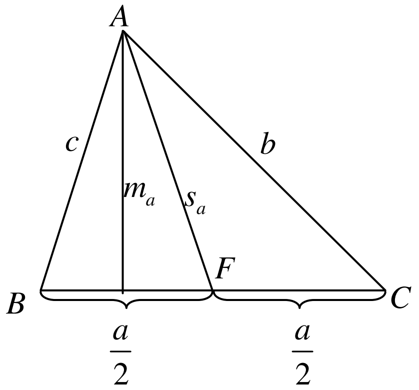
Ezzel a tételt igazoltuk.

Nevezetes pontok, vonalak, körök

Súlyvonal, súlypont

Definíció: a háromszög súlyvonala a csúcspontot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.
A súlyvonal szemléletes jelentése szerint, ha a homogén anyagból készített háromszöglapot súlyvonala mentén támasztunk alá, akkor az egyensúlyban marad.

Tétel: a háromszög súlyvonala felezi a háromszög területét.
Bizonyítás: tekintsük az ábrán látható s_a súlyvonalat, az a oldalt metssze F pontban. E súlyvonal a definíció szerint felezi a oldalt. Húzzuk be a háromszög a-hoz tartozó magasságát!
Ekkor BFC háromszög területe:



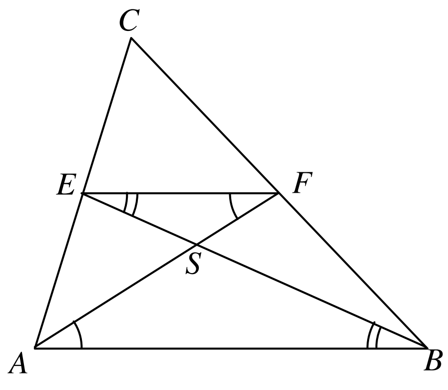
$$T_{BFC} = \frac{\frac{a}{2} \cdot m_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{1}{2} T_{ABC}.$$

Hasonlóan az FCA háromszög területe:

$$T_{FCA} = \frac{\frac{a}{2} \cdot m_a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{1}{2} T_{ABC}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $T_{BFC} = T_{FCA} = \frac{1}{2} T_{ABC}$, és ezt kellett bizonyítanunk. A tétel hasonlóan belátható a többi súlyvonalra is.

Tétel: a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, ezt a pontot a háromszög súlypontjának nevezzük. A súlypont a súlyvonalnak ponttól távolabbi harmadolópontja.
A súlypont szemléletes jelentése szerint, ha egy homogén anyagból készült háromszöglapot a súlypontja alatt támasztunk alá, akkor az egyensúlyban marad.
Bizonyítás: Legyen az ábrán látható módon az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja E, BC oldalának felezőpontja F, az AF és EB súlyvonalak metszéspontja S.



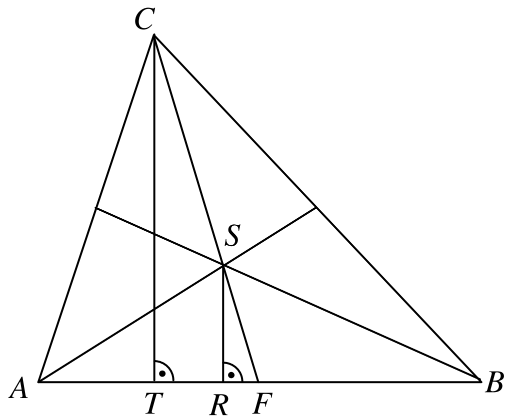
EF két oldalfelező pontot összekötő szakasz, vagyis a háromszög AB oldallal párhuzamos középvonala. Ekkor viszont az ABS és az ESF háromszögek hasonlók egymáshoz, mert a párhuzamosság miatt szögeik megegyeznek. A hasonlóság arányát is ismerjük, mivel EF középvonal fele az AB szakasznak. Ha viszont hasonlóak, akkor a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{ES}{SB}$$

$$\frac{ES}{SB} = \frac{1}{2}$$

Tehát S harmadolja EB-t, és egy másik arányt felírva kapjuk, hogy S harmadolja AF-et is. E két súlyvonal metszéspontja tehát oldalakhoz közelebbi (csúcsoktól távolabbi) harmadolópont.
Belátható, hogy a harmadik súlyvonal is illeszkedik az S pontra. Ugyanis pl. az AB oldalt felező és az AC oldalt felező súlyvonalat berajzolva, azok szintén EB csúcstól távolabbi harmadolópontjában metszenék egymást, és e pont az AB oldalt felező súlyvonalat is harmadolja.
Ezzel a tételt beláttuk.

Tétel: a háromszög súlypontját a háromszög csúcsaival összekötve három egyenlő területű háromszöget kapunk. Másképp: a súlypont és a csúcsok által meghatározott szakaszok a háromszöget három egyenlő területű részre osztják.
Bizonyítás: legyen adott az ABC háromszög, súlypontja az ábrán látható módon az S pont. AB oldal felezéspontja legyen F. Húzzuk be a háromszög AB oldalához tartozó magasságát, talppontja legyen T, valamint S pontból az AB-re bocsátott merőleges szakaszt, mely AB-t metssze R-ben.



Ekkor TFC háromszög hasonló RFS háromszöghöz, mivel a párhuzamosság miatt szögeik megegyeznek. Ekkor a megfelelő oldalak aránya megegyezik. Használjuk fel, hogy a súlypont a súlyvonalnak csúcstól távolabbi harmadolópontja:

$$\frac{CT}{SR} = \frac{CF}{SF} \Rightarrow \frac{CT}{SR} = 3 \Rightarrow SR = \frac{CT}{3}.$$

Viszont CT és SR nem más, mint az ABC háromszögnek, illetve az ABS háromszögnek az AB oldalhoz tartozó magasságai. Így ABS háromszög és ABC háromszög területe:

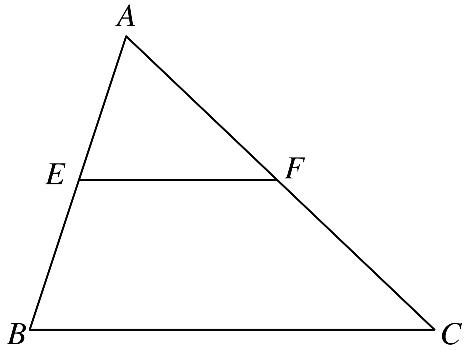
$$T_{ABS} = \frac{AB \cdot SR}{2} \text{ és } T_{ABC} = \frac{AB \cdot CT}{2}.$$

Vagyis $T_{ABS} = \frac{AB \cdot SR}{2} = \frac{AB \cdot \frac{CT}{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot CT}{2} = \frac{1}{3} T_{ABC}$. Ehhez hasonlóan belátható, hogy ASC, SBC háromszögek területe is harmada ABC háromszög területének, és ezt kellett bizonyítanunk.

Középvonal-háromszög

Definíció: a háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakaszt a háromszög középvonalának nevezzük.
A definícióból adódóan egy háromszögnek három középvonala van.

Tétel: a háromszög középvonala párhuzamos a nem felezett oldallal, és nagysága annak fele.
Bizonyítás: Legyen AB oldal felezéspontja E, AC oldal felezéspontja F. Azt kell belátni, hogy EF a BC oldallal párhuzamos és nagysága annak fele.



AEF háromszög hasonló ABC háromszöghöz, mivel szögeik megegyeznek. Ekkor, mivel AE párhuzamos AB-vel és AF párhuzamos AC-vel, EF párhuzamos BC-vel. Ugyanakkor a hasonlóság arányát is felírhatjuk:

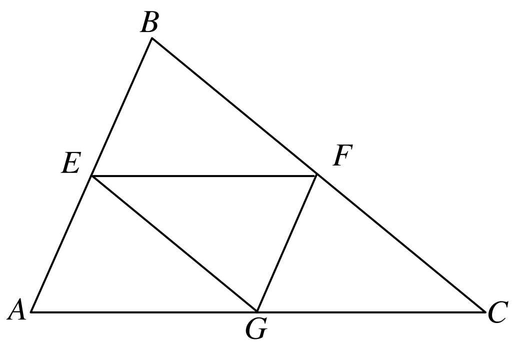
$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

Mivel E oldalfelező pont, ezért $\frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$, vagyis EF csakugyan fele a vele párhuzamos oldalnak, és ezt kellett bizonyítanunk.

Példa

1. Szerkesszünk egy adott háromszöggel hasonló háromszöget, amelynek területe negyede az eredeti háromszögének!

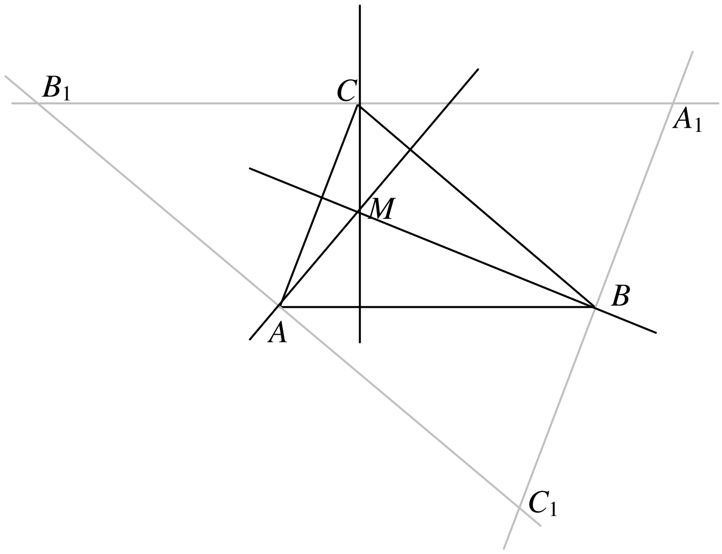
Megoldás: a háromszög egy középvonalát berajzolva máris ilyen háromszöget kapunk, ilyen pl. a bizonyítás ábráján látható AEF háromszög. Ugyanis ez a háromszög az eredeti háromszöghöz hasonló, a hasonlóság aránya pedig $\frac{1}{2}$. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyezik meg, az AEF háromszög területe az eredeti háromszög területének negyede, így megfelel a feladat feltételének.
Ebből viszont már az is következik, hogy a háromszög középvonalai az eredeti háromszöget négy egyenlő területű háromszögre osztják, és e háromszögek egybevágók (mivel oldalaik megegyeznek: az eredeti háromszög egyes oldalainak felei).



Magasságvonal, magasságpont

Definíció: a háromszög egy csúcsából a szemközti oldalra bocsátott merőleges szakaszt a háromszög magasságának nevezzük.
A magasság háromszögön túli meghosszabbítása a magasságvonal. A definícióból adódóan egy háromszögnek három magasságvonala van.

Tétel: a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög magasságpontja.
Bizonyítás: Húzzunk A-n, B-n és C-n keresztül a szemközti oldalakkal párhuzamos egyeneseket, az ezek által meghatározott háromszög csúcsai legyenek az ábrán látható módon A_1, B_1 és C_1.
A párhuzamosság miatt ABA_1C négyszög paralelogramma, emiatt $AC = A_1B$. Hasonlóan, AC_1BC négyszög is paralelogramma, így $AC = BC_1$. Ekkor viszont $A_1B = BC_1$, vagyis B az A_1C_1 szakasz felezéspontja.

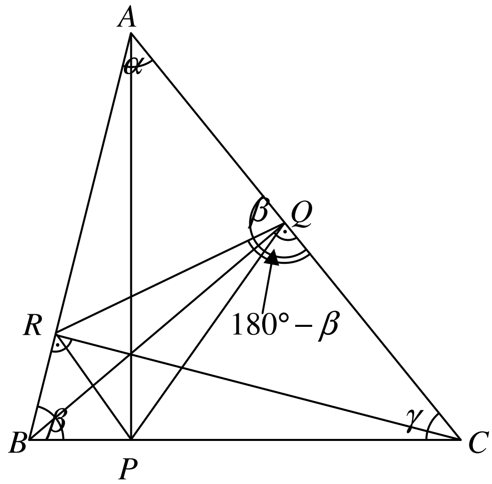


Hasonlóan belátható, hogy A a B_1C_1, míg C a B_1A_1 szakaszok felezéspontjai. Húzzuk meg $A_1B_1C_1$ háromszög oldalfelező merőlegeseit! Ezekről tudjuk, hogy egy pontban metszik egymást. Viszont mivel AC párhuzamos A_1C_1-gyel, ezért A_1C_1 oldalfelező merőlegese merőleges AC-re is, és mivel B-re illeszkedik, ezért ez az oldalfelező nem más, mint ABC háromszög AB-hez tartozó magassága.
Hasonlóan belátható, hogy $A_1B_1C_1$ háromszög oldalfelezői rendre megegyeznek ABC háromszög magasságvonalaival, és mivel az oldalfelezők egy pontban metszik egymást, ez a magasságvonalakra is igaz. Ezzel a tételt igazoltuk.
A maggáspont helyzete más és más a különböző típusú háromszögek esetén (ez az oldalfelező merőlegesekkel az előbbi bizonyításban talált kapcsolat miatt van így). Hegyesszögű háromszög esetén a háromszög magasságpontja a háromszög belsejében van, derékszögű háromszög esetén a derékszögű csúccsal egybeesik, míg tompaszögű háromszögnél a háromszögön kívül helyezkedik el.

Talpponti háromszög

Definíció: A hegyessszögű háromszög magasság-talppontjai által meghatározott háromszöget talpponti háromszögnek nevezzük.

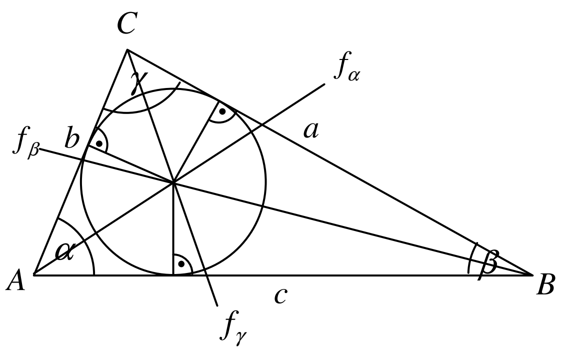
Tétel: A háromszög magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői.
Bizonyítás: Tekintsük *ABC* hegyesszögű háromszöget, a talpponti háromszög csúcsai legyenek az ábrán látható módon *P*, *Q* és *R*. Mivel $BRC\sphericalangle = BQC\sphericalangle = 90°$, ezért *R* és *Q* rajta van *BC* szakasz Thalész-körén. Vagyis *B*, *C*, *Q*, *R* ponton egy körön vannak, tehát *BCQR* húrnégyszög. Ekkor a húrnégyszögek tétele miatt $RQC\sphericalangle = 180° - \beta$, és így $AQR\sphericalangle = \beta$. Hasonlóan belátható, hogy *ABPQ* négyszög is húrnégyszög, így $AQP\sphericalangle = 180° - \beta$, azaz $PQC\sphericalangle = \beta$.
De akkor $RQB\sphericalangle = 90° - \beta$ és $BQP\sphericalangle = 90° - \beta$, ami éppen azt jelenti, hogy *BQ* magasság felezi a talpponti háromszög *RQP* szögét.
Az állítás hasonlóan belátható a másik két magasságvonalra is.



Emellett a bizonyításból az is látszik, hogy *ARQ*, *BPR*, *PCQ* háromszögek hasonlók az *ABC* háromszöghöz, mivel szögeik megegyeznek.

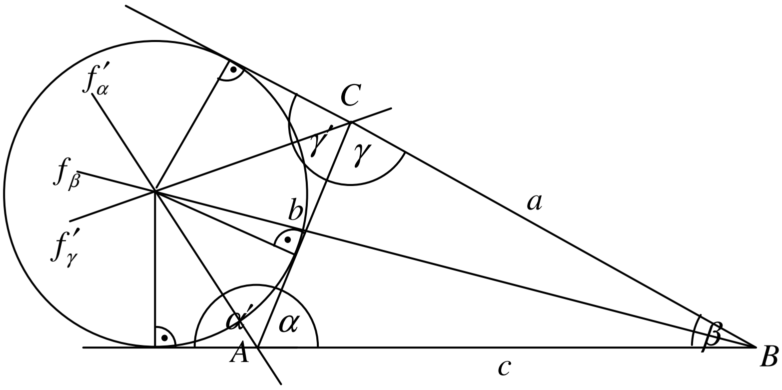
Külső és belső szögfelezők, beírt és hozzáírt körök

A háromszög belső szögeinek felezőjére érvényes a következő tétel:
Tétel: a háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszögbe írható kör középpontja.
Bizonyítás: az ábrán látható módon legyenek a belső szögek felezői f_α, f_β és f_γ.



Ekkor a definíció szerint f_α azon pontok halmaza a síkban, amelyek *b*-től és *c*-től egyenlő távolságra vannak. Ugyanakkor f_β azon pontok halmaza a síkban, amelyek *c*-től és *a*-tól egyenlő távolságra vannak. A metszéspontjuk az a pont, amely egyenlő távolságra van *b*-től és *c*-től, emellett *c*-től és *a*-tól is, vagyis mindhárom oldaltól egyenlő távolságra van. Ekkor viszont már egyenlő távolságra van *a*-tól és *b*-től is, így rajta kell hogy legyen f_γ egyenesen is.
Kaptuk tehát, hogy a három szögfelező egy pontban metszi egymást. Mivel ez a pont egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom oldalától, ez a pont a háromszögbe írható kör középpontja. A beírt kör sugarát általában *r*-rel jelöljük.

A beírt körhöz hasonlóan definiálható a háromszög hozzáírt köre.
Tétel: a háromszög egy belső és nem mellette fekvő két külső szögének felezői egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög egy hozzáírt körének középpontja.
Ez a pont egyenlő távolságra van a háromszög egy oldalától, és a másik két oldal egyenesétől.
Bizonyítás: Bizonyítás: az ábrán látható módon legyenek a belső szögfelező f_β, a nem mellette fekvő külső szögek felezői f'_α és f'_γ.

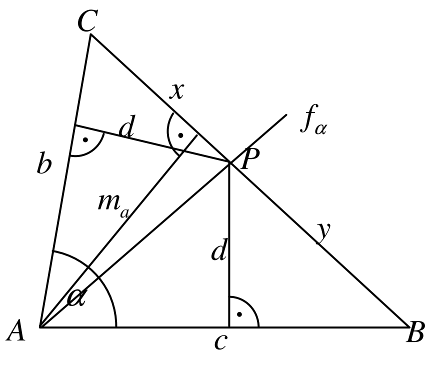


Ekkor a definíció szerint f_β azon pontok halmaza a síkban, amelyek *a* egyenesétől és *c* egyenesétől egyenlő távolságra vannak. Ugyanakkor f'_α azon pontok halmaza a síkban, amelyek *c* egyenesétől és *b*-től egyenlő távolságra vannak. A metszéspontjuk az a pont, amely egyenlő távolságra van *a* egyenesétől és *c* egyenesétől, emellett *c* egyenesétől és *b*-től is, vagyis az *a* és *c* egyenesétől, valamint *b* oldaltól is egyenlő távolságra van. Ekkor viszont már egyenlő távolságra van *b*-től és *a* egyenesétől is, így rajta kell hogy legyen f'_γ egyenesen is.

Kaptuk tehát, hogy a három szögfelező egy pontban metszi egymást. Mivel ez a pont egyenlő távolságra van a háromszög két oldalegyenesétől és harmadik oldalától, ez a pont a háromszöghöz írható egyik kör sugara.
Az értelmezés miatt egy háromszögnek három hozzáírt köre van, ezek sugarát r_a-val, r_b-vel és r_c-vel jelöljük.

Szögfelezőtétel

Tétel: A háromszög belső szögfelezője a felezett szöggel szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.
Bizonyítás: Az ábra jelöléseivel azt kell belátnunk, hogy $\frac{x}{y}=\frac{b}{c}$.
Ehhez írjuk fel *APC* és *ABP* háromszög területét is kétféleképpen. Az ábra jelöléseinek megfelelően:



$$T_{APC}=\frac{b\cdot d}{2}=\frac{m_a\cdot x}{2}$$
$$T_{ABP}=\frac{c\cdot d}{2}=\frac{m_a\cdot y}{2}$$

E két összefüggésből kapjuk a következő egyenletrendszert:

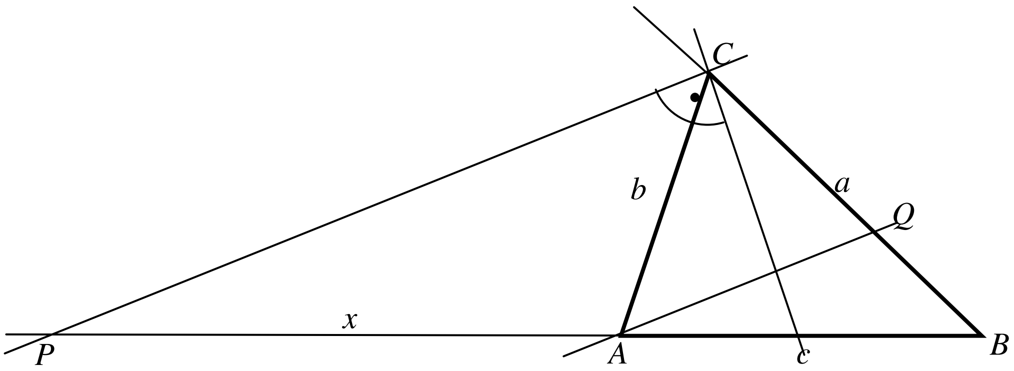
$$\left.\begin{aligned} b \cdot d &= m_a \cdot x \\ c \cdot d &= m_a \cdot y \end{aligned}\right\}$$

A kapott két egyenletet osztva egymással adódik, hogy $\frac{b}{c} = \frac{x}{y}$, és ezt kellett bizonyítanunk.

A szögfelezőtételhez hasonló állítás igaz a háromszög külső szögfelezőjére is, ha az metszi a szöggel szemközti oldal egyenesét.

Tétel: Ha a háromszög külső szögfelezője metszi a szemközti oldal egyenesét, akkor ezen oldalegyenesből a szomszédos oldalak arányában metsz ki szakaszokat.

Bizonyítás: a tétel állítása az ábra jelölései szerint a következő: $\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a}$



A C csúcsnál lévő külső szög felezője metssze az AB oldal egyenesét P-ben. Húzzunk A-n keresztül PC-vel párhuzamost, ez BC-t metssze Q-ban. A C csúcsnál lévő belső és külső szög szögfelezői egymásra merőlegesek, így a belső szög felezője merőleges AQ-ra. Ebből viszont következik, hogy e belső szögfelező az AQC háromszög magassága és szögfelezője is, így AQC egyenlő szárú háromszög, és $AC = CQ$.

A párhuzamos szelők tétele alapján:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{CQ}{CB}$$

$$\frac{x}{x+c} = \frac{b}{a}$$

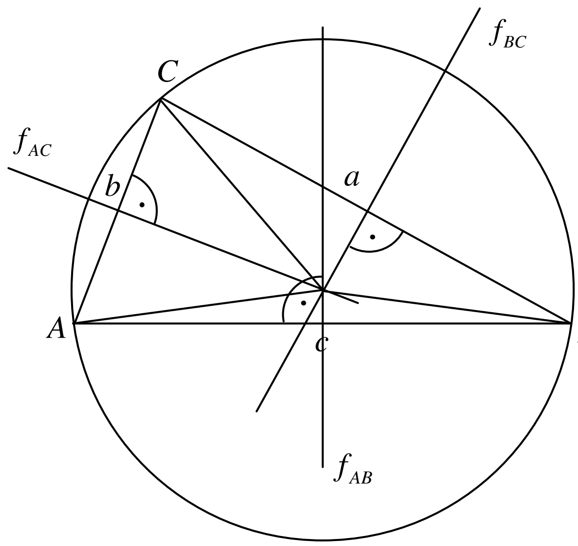
Ezzel a tételt beláttuk.

Oldalfelező merőlegesek, körülírt kör

Definíció: a háromszög oldalainak, mint szakaszoknak a felezőmerőlegesét a háromszög oldalfelező merőlegeseinek nevezzük.

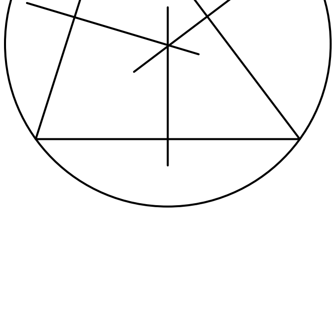
Az oldalfelező merőlegesek tehát olyan pontok halmazai, amelyek a háromszög két-két csúcsától egyenlő távolságra vannak.

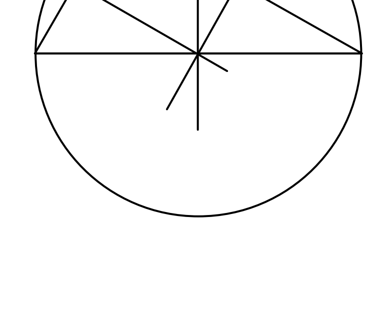
Tétel: a háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ez a pont a háromszög köré írható körének középpontja.
Bizonyítás: Legyenek az ábrán látható jelölések szerint az oldalfelező merőlegesek f_{AB}, f_{BC} és f_{AC}.

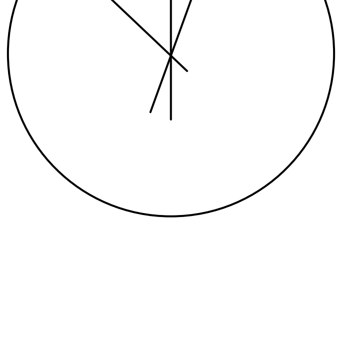


Ekkor a definíció szerint f_{AB} azon pontok halmaza a síkban, amelyek *A*-tól és *B*-től egyenlő távolságra vannak. Ugyanakkor f_{BC} azon pontok halmaza a síkban, amelyek *B*-től és *C*-től egyenlő távolságra vannak. E két egyenes metszi egymást, mivel *AB* és *BC* egyenesek metszik egymást, és f_{AB} és f_{BC} az előbbiekre merőleges egyenesek. A metszéspontjuk tehát az a pont, amely egyenlő távolságra van *A*-tól és *B*-től, emellett *B*-től és *C*-től is, vagyis mindhárom csúcsponttól egyenlő távolságra van. Ekkor viszont már egyenlő távolságra van *A*-tól és *C*-től is, így rajta kell hogy legyen f_{AC} egyenesen is.
Kaptuk tehát, hogy a három oldalfelező egy pontban metszi egymást. Mivel ez a pont egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom csúcspontjától, ez a pont a háromszög köré írható kör középpontja. A körülírt kör sugarát általában *R*-rel jelöljük.

A beírt kör középpontjának elhelyezkedése más és más a különböző háromszög-típusok esetén. Hegyesszögű háromszög esetén a háromszögön belül található, derékszögű háromszögnél az átfogó felezéspontjára illeszkedik (ez Thalész-tételéből következik), míg tompaszögű háromszög esetén a háromszögön kívül található.



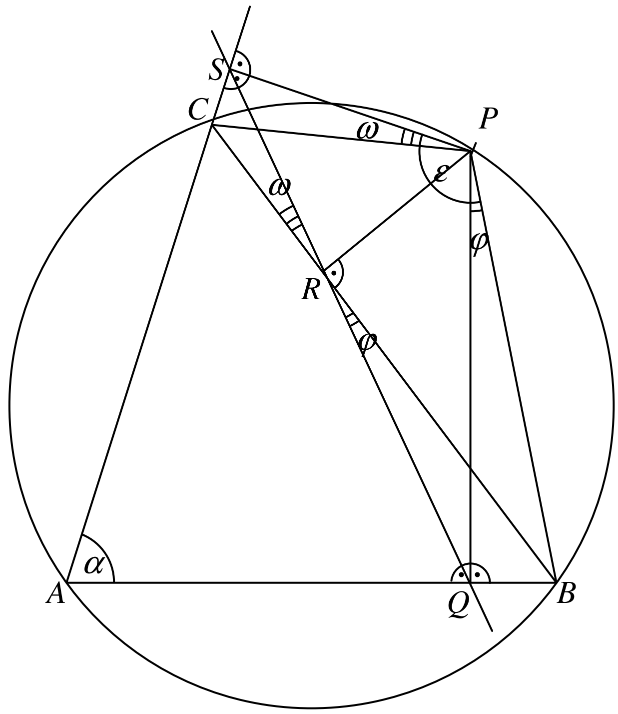




Simson-egyenes

Tétel: Legyen *ABC* háromszög köréírt körének tetszőleges (nem csúcsponttal egybeeső) pontja *P*. Akkor *P* merőleges vetületei a háromszög oldalegyeneseire egy egyenesre esnek, ez a Simson-egyenes.

Bizonyítás: Legyen *P* az ábrán látható helyzetű, a vetületei az oldalak egyenesére rendre *Q*, *R*, *S*.



Q és *R* rajta van *PB* szakasz Thalész-körén, így *QBPR* húrnégyszög. Akkor *R* és *P* rajta van *QB* szakasz egy látókörívén, vagyis $QRB\sphericalangle = QPB\sphericalangle = \varphi$.

Hasonlóan, *CRPS* is húrnégyszög, és *R* és *P* rajta van *CS* egy látókörívén, azaz $CRS\sphericalangle = CPS\sphericalangle = \omega$.

Ugyanakkor *ABPC* szintén húrnégyszög, és így a húrnégyszögek tétele szerint:

$$\alpha+\varepsilon+\varphi=180°.$$

De *AQPS* négyszög is húrnégyszög, mert *AQP* és *ASP* szögekre teljesül a húrnégyszögek tétele. Akkor a másik két szemközti szögre:

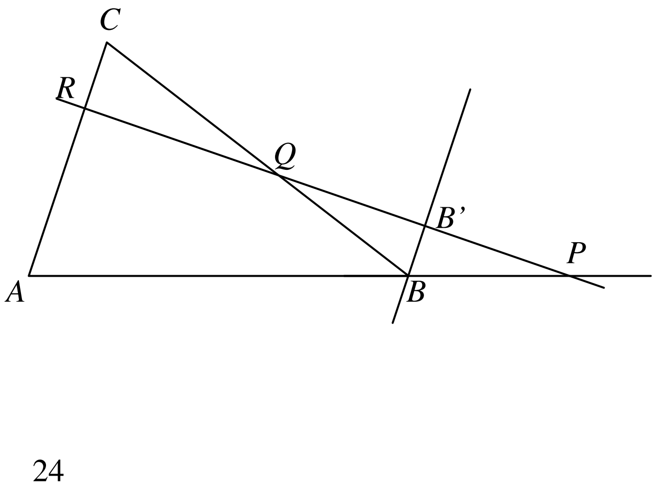
$$\alpha+\varepsilon+\omega=180°.$$

A kapott két egyenlet szerint: $\varphi=\omega$, ez pedig éppen azt jelenti, hogy *S*, *R* és *Q* egy egyenesre esnek.

Menelaosz-tétel

Menelaosz-tétel: Legyenek egy *ABC* háromszög oldalegyeneseinek egy tetszőleges egyenessel való metszéspontjai az ábrán látható módon *P*, *Q* és *R*. Akkor $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=-1$, ahol az oldalak irányítottak.

Bizonyítás: Húzzunk *B*-n keresztül *AC*-vel párhuzamost, ennek *PR* egyenessel legyen a metszéspontja *B'*. Akkor írjuk fel a párhuzamos szelőszakaszok tételét *APR* szögre és *BB'*, illetve *AR* szelőire:



$$\frac{PA}{PB}=\frac{AR}{BB'}\Rightarrow\frac{-AP}{PB}=\frac{-RA}{BB'}\Rightarrow\frac{AP}{PB}=\frac{RA}{BB'}.$$

Ugyanakkor a párhuzamosság miatt

RQC háromszög és *QBB'* háromszögek hasonlóak, így megfelelő oldalaik arányai megegyeznek:

$$\frac{QB}{QC}=\frac{BB'}{CR}\Rightarrow\frac{BQ}{QC}=\frac{BB'}{RC}.$$

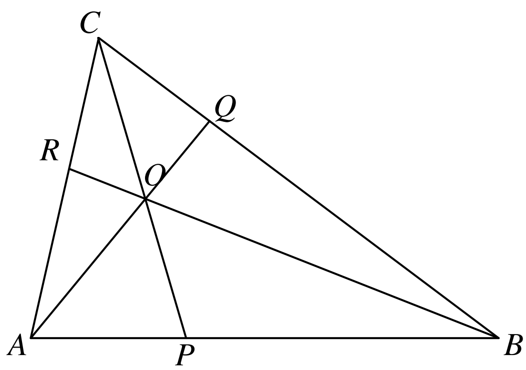
A kérdéses szorzat ekkor:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{RA}{BB'}\cdot\frac{BB'}{RC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{-RC}{RC}=-1.$$

Ceva-tétel

Ceva-tétel: Legyen három pont az *ABC* háromszög oldalain, *AB*-n, *BC*-n és *CA*-n rendre *P*, *Q* és *R*. Ekkor ha *AQ*, *BR* és *CP* egyenesek egy pontban metszik egymást (*O*), akkor $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$, ahol az oldalak irányítottak.

Bizonyítás: Írjuk fel Menelaosz tételét *APC* háromszögre és a *BOR* szelőre:



$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PO}{OC}\cdot\frac{CR}{RA}=-1.$$

Ugyancsak a Menelaosz-tétel *BCP* háromszögre és *AOQ* szelőre:

$$\frac{BA}{AP}\cdot\frac{PO}{OC}\cdot\frac{CQ}{QB}=-1.$$

E két egyenletet osztva egymással:

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PO}{OC}\cdot\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AP}{BA}\cdot\frac{OC}{PO}\cdot\frac{QB}{CQ}=1.$$

Felhasználva, hogy az irányítás miatt $AB=-BA$, $BQ=-QB$, $CQ=-QC$ illetve $BP=-PB$, éppen a bizonyítandó állítás adódik:

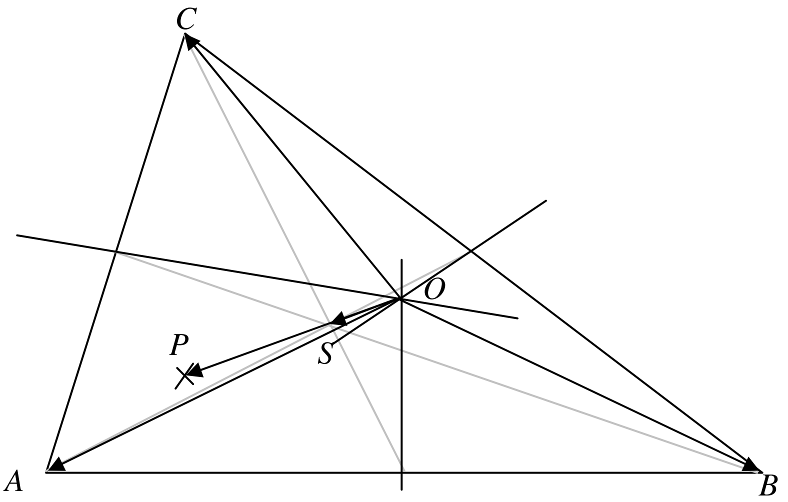
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1.$$

Euler-egyenes

A következő tétel megfogalmazása és bizonyítása Euler nevéhez fűződik, innen is kapta a benne szereplő nevezetes egyenes a nevét.

Tétel: A háromszög *M* magasságpontja, *S* súlypontja és a köré írható kör *O* középpontja egy egyenesen van. Ezt az egyenest a háromszög Euler-egyenesének nevezzük. A súlypont az *MO* szakasz *O*-hoz közelebbi harmadolópontja.

Bizonyítás: a tétel többféleképpen is bizonyítható, a legegyszerűbb talán a következő bizonyítás, mely vektorokat használ fel. A tétel állítása a szabályos háromszög esetén nyilvánvaló, ekkor mindhárom pont egybeesik (csak az arány felírásának nincs értelme).
Általános *ABC* háromszög esetén legyen körülírt körének középpontja *O*, súlypontja *S*. Ezek nyilvánvalóan egy egyenesre illeszkednek.



Adjuk meg *A*, *B* és *C* pontok helyét az *O*-ból indított vektorokkal: $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$.
Ekkor a háromszög súlypontjába mutató vektor: $\mathbf{s}=\overrightarrow{OS}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$.
Legyen *P* pont az ábrán látható módon olyan, hogy **p** vektor az **s** vektor háromszorosa legyen: $\mathbf{p}=\overrightarrow{OP}=3\mathbf{s}=3\cdot\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.
Elegendő belátni, hogy *P* a háromszög magasságpontja, hisz ekkor igazoltuk az állítást (*M*, *S* és *O* egy egyenesbe esik, és *S* az *MO* *O*-hoz közelebbi harmadolópontja). Ehhez azt kell igazolni, hogy $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$, mert akkor hasonló módon igazolható lenne, hogy $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{AC}$.
Ha $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$, akkor e két vektor skaláris szorzata 0:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}&=0\\
(\mathbf{c}-\mathbf{p})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})&=0\\
(\mathbf{c}-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}))\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})&=0\\
(\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{a})&=0\\
(-\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{b}-\mathbf{a})&=0\\
-\mathbf{ab}+\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2+\mathbf{ab}&=0\\
\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2&=0
\end{aligned}$$

A kapott egyenlőség viszont igaz. Ugyanis $\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2=R^2$ és $\mathbf{b}^2=|\mathbf{b}|^2=R^2$, és $R^2-R^2=0$.
Tehát $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$, hasonlóan $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{AC}$, vagyis *P* pont csakugyan a háromszög magasságpontja.
Ezzel a tételt beláttuk.

Euler-féle összefüggés

Euler-tétel: A háromszög köré és a háromszögbe írható körök középpontjainak távolságának négyzete: $d^2 = R^2 - 2rR$, ahol R a köré írt kör, r a beírható kör sugara.
Bizonyítás: Vektorokkal: Legyen a vonatkoztatási pont a köréírt kör O középpontja, és a csúcsokba mutató vektorok: $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Akkor a beírt kör K középpontjába mutató vektor igazolhatóan: $\mathbf{k} = \overrightarrow{OK} = \dfrac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}}{a+b+c}$.

A vonatkoztatási pont választása miatt $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R$, és pl.

$$|\mathbf{b} - \mathbf{c}| = a \Rightarrow a^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2 = \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{bc} + \mathbf{c}^2 = |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{bc} + |\mathbf{c}|^2 = R^2 - 2\mathbf{bc} + R^2 = 2R^2 - 2\mathbf{bc}.$$

Azaz $2\mathbf{bc} = 2R^2 - a^2$, hasonlóan $2\mathbf{ca} = 2R^2 - b^2$ és $2\mathbf{ab} = 2R^2 - c^2$. Az origó választása miatt a kérdéses távolság négyzete:

$$d^2 = \mathbf{k}^2 = \left(\frac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}}{a+b+c} \right)^2 = \frac{(a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c})^2}{4\left(\frac{a+b+c}{2} \right)^2} = \frac{1}{4s^2}(a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c})^2 =$$

$$= \frac{1}{4s^2}\left(a^2|\mathbf{a}|^2 + b^2|\mathbf{b}|^2 + c^2|\mathbf{c}|^2 + 2ab\mathbf{ab} + 2bc\mathbf{bc} + 2ca\mathbf{ca} \right) =$$

$$= \frac{1}{4s^2}\left(R^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2ab\mathbf{ab} + 2bc\mathbf{bc} + 2ca\mathbf{ca} \right) =$$

$$= \frac{1}{4s^2}\left(R^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + ab\left(2R^2 - c^2\right) + bc\left(2R^2 - a^2\right) + ca\left(2R^2 - b^2\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4s^2}\left(R^2(a+b+c)^2 - abc(a+b+c) \right) = R^2 - \frac{abc}{2s}.$$

Ugyanakkor a háromszög területe: $T = sr$ és $T = \dfrac{abc}{4R}$, azaz $sr = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow \dfrac{abc}{2s} = 2rR$. Vagyis éppen a bizonyítandó állítást kapjuk: $d^2 = R^2 - \dfrac{abc}{2s} = R^2 - 2rR$.

Izogonális pont

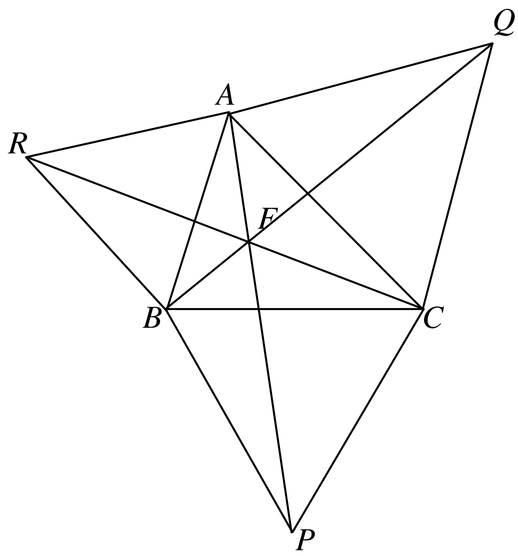
Definíció: Egy háromszög izogonális pontja az a pont a háromszög síkjában, melyet a háromszög csúcsaival összekötve a keletkező összekötő szakaszok összhossza minimális.

Ha a háromszögnek nincs 120°-nál nagyobb szöge, akkor az izogonális pont egyben az a pont, amelyből minden oldal egyenlő szög alatt látszik. Ha van 120°-nál nem kisebb szöge, akkor ezen szöghöz tartozó csúcs az izogonális pont.

Tétel: Adott háromszög esetén az izogonális pontot megkapjuk, ha az oldalakra kifelé szabályos háromszögeket emelünk, majd ezek újonnan keletkező csúcsait összekötjük a szemközti csúcsokkal, akkor ezek egy pontban metszik egymást, és ez az izogonális pont.

Bizonyítás: Legyen F az RC és BQ egyenesek metszéspontja. Azt akarjuk megmutatni, hogy az AFP görbe egyenes.
Mivel $AR = AB$ és $AC = AQ$, ezért

$$RAC\sphericalangle = RAB\sphericalangle + BAC\sphericalangle, \text{ és } BAQ\sphericalangle = BAC\sphericalangle + CAQ\sphericalangle.$$



Emellett $RAB\sphericalangle$ és $CAQ\sphericalangle$ 60°-osak, mivel belső szögei a szabályos háromszögeknek, és így

$$RAC\sphericalangle = BAQ\sphericalangle.$$

Ebből következik, hogy RAC és BAQ háromszögek egybevágóak.
Vagyis $ARF\sphericalangle = ABF\sphericalangle =$ és $AQF\sphericalangle = ACF\sphericalangle$, így a látókörívek tétele miatt $ARBF$ és $AQCF$ húrnégyszögek. Emiatt:

$$AFB\sphericalangle = AFC\sphericalangle = BFC\sphericalangle = 120°.$$

De $BFCP$ szintén húrnégyszög, hiszen $BFC\sphericalangle + BPC\sphericalangle = 180°$, így

$$BFP\sphericalangle = BCP\sphericalangle = 60°.$$

Tehát $AFP\sphericalangle = AFB\sphericalangle + BFP\sphericalangle = 180°$, azaz A, F és P egy egyenesre esnek. A húrnégyszögek tétele miatt pedig következik, hogy F-ből a háromszög oldalai 120°-os szögben látszanak, vagyis F az izogonális pont.

Feuerbach-kör, Feuerbach-tétel

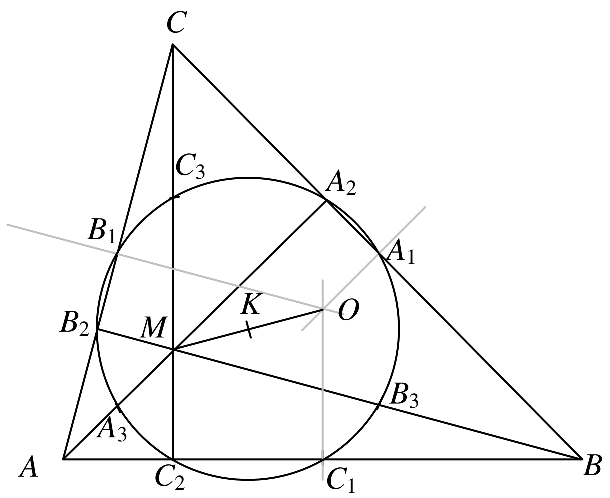
A következő tétel helyességének megsejtése Feuerbach nevéhez fűződik, bár ő még csak az oldalfelező pontokról és a magasságok talppontjairól látta be, hogy egy körön vannak.

Tétel: A háromszög oldalfelező pontjai, magasságtalppontjai valamint a magasságpont és a csúcsok által meghatározott szakaszok felezéspontjai egy körön vannak. Ezt a kört a háromszög Feuerbach-körének (vagy kilenc pont körének) nevezzük. A Feuerbach-kör középpontja a magasságpont és a háromszög köré írható körének középpontja által meghatározott szakasz felezéspontja, sugara a körülírható kör sugarának fele.

Bizonyítás: szintén vektorok segítségével történik. Legyenek az ABC háromszög oldalfelező pontjai az ábrán látható módon A_1, B_1 és C_1, a magasságok talppontjai A_2, B_2, C_2, a magasságpont (M) és a csúcspontok által meghatározott szakaszok felezéspontjai A_3, B_3 és C_3, a körülírt kör középpontja O. A tételt elegendő belátni egy megfelelő ponthármasra is, mert a pontok egyenrangúsága miatt akkor a tétel már a többi pontra is bizonyítható.

Legyen MO szakasz felezéspontja K. Használjuk O pontot vonatkoztatási pontnak. Legyenek a következő vektorok: $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Ekkor igazolhatóan $\mathbf{m} = \overrightarrow{OM} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, és így $\mathbf{k} = \overrightarrow{OK} = \frac{\mathbf{m}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}$.

A C_1-be mutató helyvektor: $\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{OC_1} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$, ekkor $\overrightarrow{KC_1} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{k} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} = -\frac{\mathbf{c}}{2}$.
Azt kaptuk, hogy KC_1 szakasz hossza a körülírt kör sugarának fele, mivel $\mathbf{c}$ vektor hossza a körülírt kör sugara.
Az MC szakasz M_3 felezéspontjába mutató helyvektor: $\mathbf{c}_3 = \overrightarrow{OC_3} = \frac{\mathbf{m} + \mathbf{b}}{2} = \mathbf{k} + \frac{\mathbf{c}}{2}$. Ekkor $\overrightarrow{KC_3} = \mathbf{c}_3 - \mathbf{k} = \mathbf{k} + \frac{\mathbf{c}}{2} - \mathbf{k} = \frac{\mathbf{c}}{2}$. Tehát KC_3 szakasz hossza ugyancsak fele a körülírt kör sugarának.



Vagyis C_1 és C_3 biztos rajta van a K középpontú körön, ahol K az MO szakasz felezéspontja. De e két pont egyúttal átmérőt is határoz meg, mivel a K-ból C_1-be illetve C_3-ba mutató vektorok csak előjelükben különböznek egymástól. C_1C_3 tehát a Feuerbach kör átmérője.
C_2 pontból C_1C_3 szakasz derékszög alatt látszik, így Thalész tétele miatt rajta kell lennie a C_1C_3 átmérőjű körön. Ezzel beláttuk, hogy C_1, C_2, C_3 pontok mindegyike rajta van az MO szakasz felezéspontja körül a körülírt kör sugarának felével, mint sugárral rajzolt körön. Az előbbi gondolatmenethez hasonlóan igazolható, hogy A_1, A_2, A_3, valamint B_1, B_2, B_3 pontok is rendre illeszkednek a körre.

Feuerbach-tétel: A Feuerbach-kör belülről érinti a háromszög beírt körét, valamint kívülről a háromszög hozzáírt köreit.
Bizonyítás: A tételt a beírt kör esetén bizonyítjuk, a hozzáírt körökre hasonlóan belátható. Legyen a Feuerbach-kör középpontja F, a beírt köré K. Ha a köréírt kör sugara R, akkor a Feuerbach-kör sugara: $\frac{R}{2}$. Legyen emellett a beírt kör sugara r.

Ha igaz a tétel, vagyis a beírt kör belülről érinti a Feuerbach-kört, akkor $FK = \frac{R}{2} - r$. Megmutatjuk, hogy ez igaz. A bizonyítás ismét vektorokkal történik: legyen a vonatkoztatási pont a köréírt kör O középpontja, ekkor $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, a beírt kör középpontjára így $\mathbf{k} = \overrightarrow{OK} = \dfrac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}}{a+b+c}$.

Emellett $\mathbf{f} = \overrightarrow{OF} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$, így

$$FK = \left|\overrightarrow{FK}\right| = |\mathbf{f} - \mathbf{k}| = \left|\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2} - \frac{a\mathbf{a}+b\mathbf{b}+c\mathbf{c}}{2s}\right| = \left|\frac{(s-a)\mathbf{a} + (s-b)\mathbf{b} + (s-c)\mathbf{c}}{2s}\right|.$$

Felhasználva, hogy $2\mathbf{bc} = 2R^2 - a^2$, hasonlóan $2\mathbf{ca} = 2R^2 - b^2$ és $2\mathbf{ab} = 2R^2 - c^2$ (bizonyítás az Euler-tételnél), a kérdéses távolság négyzete:

$$\begin{aligned}
FK^2 &= \frac{1}{4s^2}\Big(R^2\big(3s^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2s(a+b+c)\big) + \\
&+ 2\mathbf{ab}(s-a)(s-b) + 2\mathbf{bc}(s-b)(s-c) + 2\mathbf{ca}(s-c)(s-a)\Big) = \\
&= \frac{1}{4s^2}\Big(R^2\left(a^2+b^2+c^2-s^2\right) + \left(2R^2 - c^2\right)(s-a)(s-b) + \\
&+ \left(2R^2 - a^2\right)(s-b)(s-c) + \left(2R^2 - b^2\right)(s-c)(s-a)\Big) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4s^2}\Big(R^2\left(a^2+b^2+c^2-s^2+6s^2-2s(2a+2b+2c)+2ab+2bc+2ac\right) - \\
&- c^2(s-a)(s-b) - a^2(s-b)(s-c) - b^2(s-c)(s-a)\Big) = \\
&= \frac{1}{4s^2}\left(s^2R^2 - sabc + \frac{1}{4}\left(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2\right)\right).
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $T = sr$ és $T = \dfrac{abc}{4R}$, valamint a Heron-képlet bizonyításánál látottak szerint:

$$16T^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2,$$

ezért

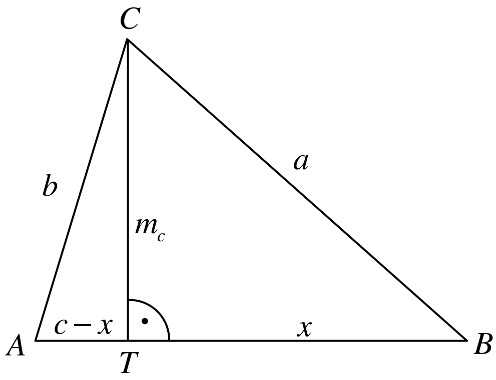
$$FK^2 = \frac{1}{4s^2}\left(s^2R^2 - 4sTR + 4T^2\right) = \frac{R^2}{2} - rR + r^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

Az Euler-tétel egyszerű következménye, hogy $\dfrac{R}{2} - r \geq 0$, így mindkét oldalból négyzetgyököt vonva adódik az állítás: $FK = \dfrac{R}{2} - r$.

Heron-képlet

Tétel: Az a, b és c oldalú háromszög területe $T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol s a háromszög félkerülete.

Bizonyítás: húzzuk meg az ABC háromszög c oldalához tartozó magasságát, melynek talppontja legyen T. Az a oldal c-re vonatkozó merőleges vetülete legyen x, ekkor b oldal merőleges vetülete c-re $c-x$.



Írjuk fel Pitagorasz tételét ATC és TBC háromszögben is:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= x^2+m_c^2 \\ b^2 &= (c-x)^2+m_c^2 \end{aligned}\right\}$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$a^2-b^2=x^2+m_c^2-\left(c^2-2cx+x^2\right)-m_c^2$$
$$a^2-b^2=x^2-c^2+2cx-x^2$$
$$a^2-b^2=2cx-c^2$$

Ebből az egyenletből: $2cx=a^2-b^2+c^2$. Szorozzuk az $a^2=x^2+m_c^2$ egyenlet mindkét oldalával $4c^2$-tel:

$$4a^2c^2=4c^2x^2+4c^2m_c^2$$
$$4a^2c^2=(2cx)^2+(2cm_c)^2$$

Írjuk be ebbe az egyenletbe a $2cx$-re kapott értéket, és használjuk fel, hogy a kapott egyenlet jobb oldalának második tagja nem más, mint a háromszög négyzetes területének a négyzete:

$$4a^2c^2=\left(a^2-b^2+c^2\right)^2+\left(4\cdot\frac{cm_c}{2}\right)^2$$
$$4a^2c^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)^2=16T^2$$

A kapott egyenlet bal oldalán elvégezzük a négyzetre emelést, majd azonos átalakításokat végzünk:

$$16T^2=4a^2c^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)^2$$
$$16T^2=4a^2c^2-\left(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2+2a^2c^2\right)$$
$$16T^2=4a^2c^2-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2-2a^2c^2$$
$$16T^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4$$
$$16T^2=\left(a^2+2ac+c^2-b^2\right)\left(b^2-a^2+2ac+c^2\right)$$

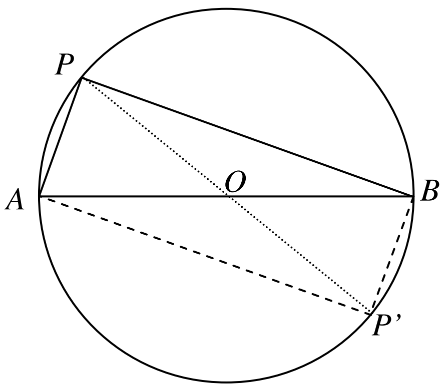
$$16T^2=\left((a+c)^2-b^2\right)\left(b^2-(a-c)^2\right)$$
$$16T^2=(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$$

Alakítsuk át a jobb oldalt úgy, hogy megjelenjen benne a félkerület:

$$16T^2=(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$$
$$16T^2=2\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot 2\cdot\frac{a+b+c-2b}{2}\cdot 2\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}\cdot 2\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}$$
$$16T^2=16s(s-b)(s-c)(s-a)$$
$$T^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

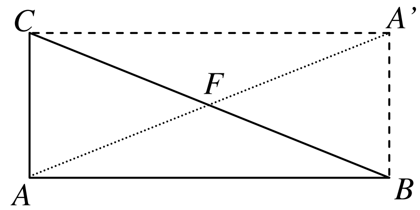
Mivel mindkét oldal nemnegatív, vonhatunk négyzetgyököt, és így épp a kívánt egyenlőséget kapjuk:
$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Thalész-tétel



Thalész tétele: Ha egy kör átmérőjének A és B végpontját összekötjük a körvonal egy harmadik P pontjával, akkor APB háromszög derékszögű, és átfogója AB.
Bizonyítás: Vegyük fel az ábrán látható P pontot az AB átmérőjű körvonalon úgy, hogy ne essen egybe A-val és B-vel. Tükrözzük APB háromszöget a kör O középpontjára, kapjuk az $AP'BP$ négyszöget. A tükrözés tulajdonságai miatt ezen négyszög PP' is a kör egy átmérője, így a kapott négyszög átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást. Az ilyen tulajdonságú négyszög viszont a téglalap. Tehát $AP'BP$ téglalap, ebből következően minden szöge derékszög. Így $APB\sphericalangle$ is derékszög, és ezt kellett bizonyítanunk.

A tétel megfordítása:
Tétel: Ha egy háromszög derékszögű, akkor köréírt körének középpontja az átfogó felezéspontja.

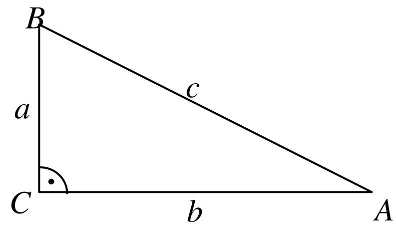


Bizonyítás: Tekintsük az ábrán látható ABC derékszögű háromszöget, és tükrözzük a háromszöget az átfogó F felezőpontjára! Ily módon kapjuk $ABA'C$ négyszöget, mely téglalap (ugyanis a tükrözés miatt szemközti oldalai megegyeznek, tehát paralelogramma, és a háromszög derékszögűsége miatt két szemközti szöge derékszög, emiatt minden szöge derékszög). A téglalap átlói egyenlők és felezik egymást. Emiatt $CF=BF=AF$, tehát F a háromszög csúcsaitól egyenlő távolsága van, ez pedig éppen azt jelenti, hogy a háromszög köré írt kör középpontja az F pont.

A két tétel együtt:
Tétel: A sík azon pontjainak halmaza, amelyből egy szakasz derékszög alatt látszik, a szakasz, mint átmérő fölé rajzolt kör, kivéve a szakasz két végpontját.

Ezen kört a szakasz Thalész-körének nevezzük.

Pitagorasz-tétel

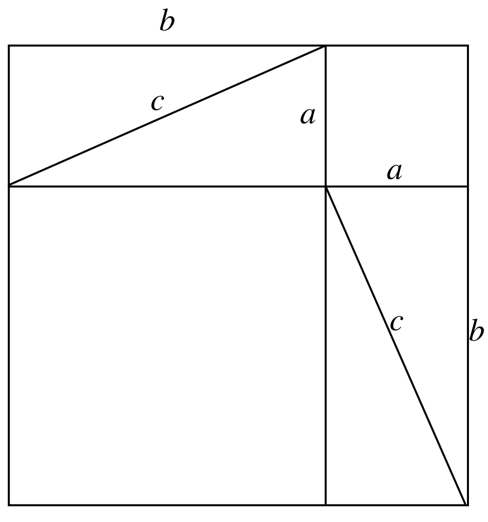


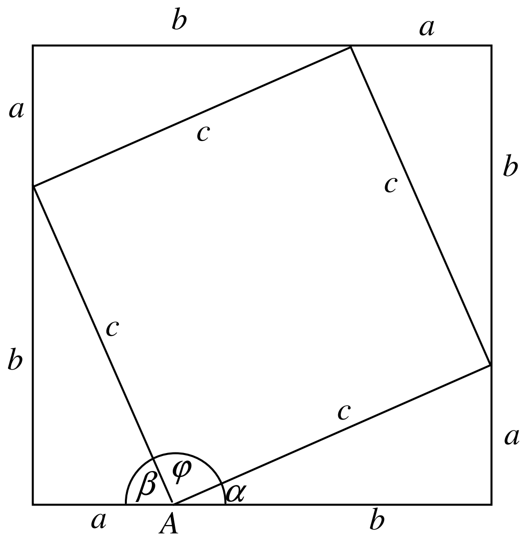
Pitagorasz tétele: a derékszögű háromszög befogójára emelt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra emelt négyzet területével.
A tételt többféleképpen is megfogalmazhatjuk, pl. így is: a derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével. Az ábra jelöléseit használva Pitagorasz tétele:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bizonyítás: a tételnek sokféle bizonyítása létezik. Mivel e tétel az egyik legnevezetesebb a geometriában, több bizonyítást is bemutatunk.
(1) Első bizonyítás: legyenek egy derékszögű háromszög befogói *a* és *b*, átfogója *c*. Rajzoljunk két egybevágó, $a+b$ oldalú négyzetet, és helyezzünk ezekben el a következő oldali ábrán látható módon négy-négy derékszögű háromszöget.

Ha a nagy négyzet területe *T*, a derékszögű háromszögé pedig *t*, akkor jól láthatóan az első négyzet területe: $T = 4t + a^2 + b^2$. A második négyzetben a derékszögű háromszögek egy rombuszt határolnak, ugyanis egy olyan négyszögről van szó, melynek minden oldala *c*. Derékszögű háromszögekről lévén szó, $\alpha + \beta = 90°$, így az *A* pontnál lévő szögekre: $\varphi = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°$. Hasonlóan belátható, hogy a második négyzetben a derékszögű háromszögek által közrefogott rombusznak minden szöge derékszög, vagyis a kérdéses rombusz egy *c* oldalú négyzet.





Ekkor a második négyzet területére felírható, hogy $T = 4t + c^2$. Ezt összevetve azzal, hogy $T = 4t + a^2 + b^2$:

$$4t + c^2 = 4t + a^2 + b^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

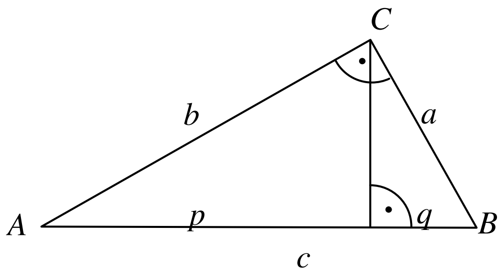
(2) Második bizonyítás: Írjuk fel az ábrán látható derékszögű háromszögben a befogótételt, majd adjuk össze a kapott két egyenletet:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= cq \\ b^2 &= cp \end{aligned}\right\} \downarrow +$$

$$a^2 + b^2 = cp + cq$$

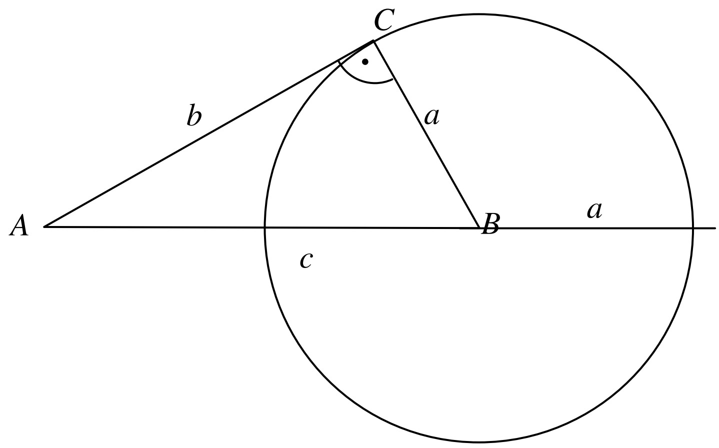
$$a^2 + b^2 = c\underbrace{(p+q)}_{c}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Ezzel a tételt beláttuk.

(3) Harmadik bizonyítás: Legyen a derékszögű háromszög két befogója a és b, átfogója c, és legyen a kisebb b-nél. Rajzoljunk ab-vel, mint sugárral egy kört, melynek középpontja legyen az ábrán látható módon a B pont.



Ekkor az érintő- és szelőszakaszok tételét felírva:

$$b^2 = (c+a)(c-a)$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

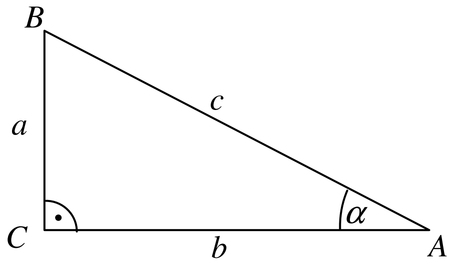
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Tehát a tételt bebizonyítottuk.

(4) Negyedik bizonyítás: bármely háromszögre igaz a koszinusztétel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Derékszögű háromszög esetén $\gamma = 90°$, így $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\underbrace{\cos 90°}_{0} = a^2 + b^2$, és ezt kellett bizonyítanunk.

(5) Ötödik bizonyítás: bármely szögre $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Derékszögű háromszögben e szögfüggvények az ábrán látható módon oldalak arányát jelentik. Így az egyenlet:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$



Vagyis:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Pitagorasz tételének megfordítása:
Tétel: Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.
Bizonyítás: Írjuk fel a koszinusztételt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. A feltétel szerint $a^2 + b^2 = c^2$, így:

$$c^2 = c^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$0 = 2ab\cos\gamma$$

Mivel a és b egy háromszög oldalhosszainak mérőszámai, biztosan pozitívak. A kapott egyenlőség tehát csak úgy teljesülhet, ha $\cos\gamma = 0$. Viszont γ egy háromszög belső szöge, így ez az egyenlőség csak akkor igaz, ha $\gamma = 90°$, és ezt kellett bizonyítanunk.

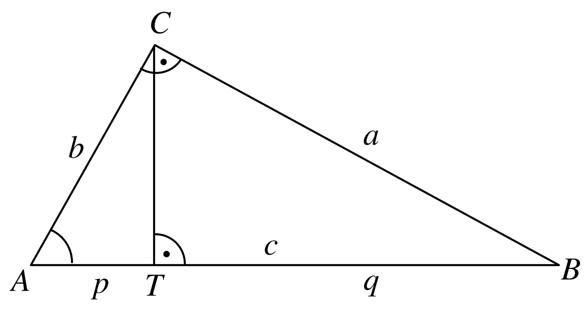
Pitagorasz tétele és megfordítása együtt:
Tétel: Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.

Pitagorasz tételéhez hasonló összefüggések igazak hegyesszögű, illetve tompaszögű háromszögekre is. Belátható, hogy ha egy háromszög hegyesszögű, akkor $a^2 + b^2 > c^2$, ha tompaszögű, akkor $a^2 + b^2 < c^2$, ha c a háromszög leghosszabb oldala.

Magasságtétel, befogótétel

Befogótétel: Derékszögű háromszögben bármely befogó hossza mértani közepe az átfogónak és az adott befogó átfogóra merőleges vetületének. Az ábra jelölései szerint: $b = \sqrt{cp}$ és $a = \sqrt{cq}$.

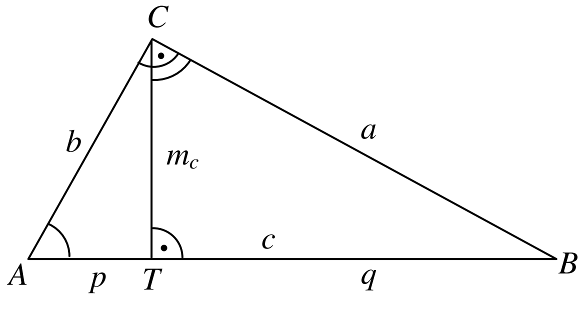
Bizonyítás: ATC háromszög hasonló ABC-höz, mivel szögeik páronként egyenlők. Ekkor a megfelelő oldalak arányai megegyeznek:



$$\frac{b}{p} = \frac{c}{b}$$
$$b^2 = cp$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, vonhatunk négyzetgyököt, és ebből már adódik a bizonyítandó állítás. A tétel a másik befogóra teljesen hasonlóan látható be.

Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság a befogók átfogóra merőleges vetületeinek mértani közepe, vagyis az ábra jelöléseivel: $m_c = \sqrt{pq}$.



Bizonyítás: ATC háromszög hasonló TBC háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők. Ekkor a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{m_c}{p}=\frac{q}{m_c}$$
$$m_c^2=pq$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, vonhatunk négyzetgyököt, és így adódik a bizonyítandó állítás.

Poligonok

Konvex sokszögek belső és külső szögeinek összege

Definíció: n oldalú sokszögnek (n-szögnek) nevezzük az olyan zárt síkidomot, melyet n db szakasz határol.
A definícióból következően az n-szögnek n db oldala, szöge és csúcsa van. A nem szomszédos csúcsokat összekötő szakasz a sokszög átlója.

Tétel: Az n oldalú konvex sokszögnek $\frac{n(n-3)}{2}$ db átlója van.
Bizonyítás: a sokszög egy csúcsából nem húzható átló önmagába valamint a két szomszédos csúcsba (e két csúccsal ugyanis két oldal köti össze). Egy csúcsból tehát 3-mal kevesebb átló húzható, mint ahány csúcsa van a sokszögnek. Tehát egy csúcsból n oldalú sokszög esetén $n-3$ db átló húzható, így n csúcsból összesen $n(n-3)$ db átlót rajzolhatunk. Viszont mivel egy átlónak két végpontja van, ezért minden átlót kétszer számoltunk. Vagyis a kapott eredményünket osztani kell kettővel. Így kapjuk, hogy n oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Tétel: Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2)180°$.
Bizonyítás: az előző tétel bizonyítása során felismertük, hogy a sokszög egy csúcsából $n-3$ db átló húzható. Ezen átlók viszont a sokszöget $n-2$ háromszögre bontják, melyek belső szögeinek összege megegyezik a sokszög belső szögeinek összegével. Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért a sokszög belső szögeinek összege $(n-2)180°$.

Tétel: Az n oldalú konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.
Bizonyítás: a konvex sokszög külső szögeit a háromszög külső szögeihez hasonlóan értelmezzük, vagyis egy belső szög külső szöge a belső szög kiegészítő szöge. Legyenek a sokszög belső szögei rendre α_1; α_2; …; α_n, ekkor külső szögeinek összege:

$$180°-\alpha_1+180°-\alpha_2+\ldots+180°-\alpha_2=180°\cdot n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=$$
$$=180°\cdot n-(n-2)\cdot 180°=180°\cdot n-180°\cdot n+2\cdot 180°=360°.$$

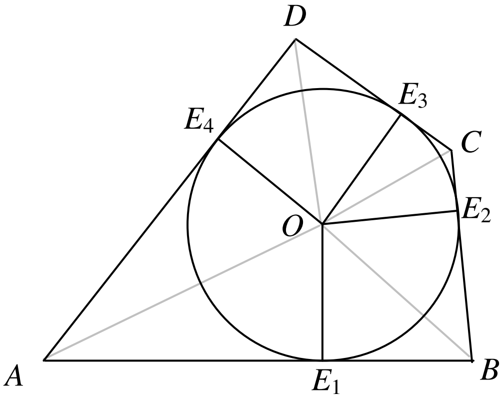
Érintőnégyszögek

Definíció: Érintőnégyszögnek nevezzük az olyan négyszöget, amelynek oldalai egy kör érintői. Ezzel ekvivalens a következő definíció is: Érintőnégyszög az olyan négyszög, amelybe kör írható.
Az érintőnégyszög az alábbiakban részletezett tétel alapján is definiálható.

Érintőnégyszögek tétele

Érintőnégyszögek tétele: Ha egy négyszög érintőnégyszög, akkor szemközti oldalainak összege egyenlő, vagyis a szokásos jelölésekkel: $a+c=b+d$.
Bizonyítás: Az érintőnégyszögbe írt kör középpontját kössük össze az érintési pontokkal, melyek legyenek rendre E_1, E_2, E_3 és E_4. Mivel külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, ezért

$$AE_1 = AE_4 \text{ és } BE_1 = BE_2 \text{ és}$$
$$CE_2 = CE_3 \text{ és } DE_3 = DE_4$$

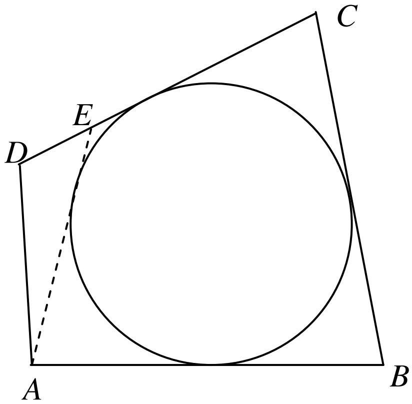


Eszerint:

$$\begin{aligned} AB + CD &= AE_1 + BE_1 + CE_3 + DE_3 = \\ &= AE_4 + BE_2 + CE_2 + DE_4 = \\ &= \underbrace{AE_4 + DE_4}_{AD} + \underbrace{BE_2 + CE_2}_{BC} = AD + BC \end{aligned}$$

Tehát $AB + CD = AD + BC$, és ezt akartuk bizonyítani.

Az érintőnégyszögek tételének megfordítása:
Tétel: Ha egy konvex négyszögben a szemközti oldalak hosszának összege egyenlő, akkor a négyszögbe kör írható (érintőnégyszög).
Bizonyítás: indirekten történik. Tegyük fel, hogy egy konvex négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, de a négyszögbe nem írható kör. Ha nem érintőnégyszög, akkor bármely három oldalegyenese által meghatározott háromszögbe írt kör a negyedik oldalt nem érinti.
Ha nincs tompaszöge, akkor mind a négy szöge derékszög kell legyen, mert csak így lesz belső szögeinek összege 360°. Ekkor viszont a szemközti oldalhosszak egyenlősége miatt négyzetet kaptunk, amely érintőnégyszög.
Ha van tompaszöge, akkor három kiválasztott oldalegyenese összesen négy háromszöget határoz meg, melyekbe négy kört írhatunk. Ezek közül az egyik olyan, hogy az ábrán látható módon a négyszög egyik tompaszögének szárát érinti, a másikkal pedig nincs közös pontja.



A nem érintő oldal *A* csúcsán át rajzoljunk érintőt a körhöz, a *CD* oldallal való metszéspont legyen *E*. Ekkor *ABCE* érintőnégyszög, vagyis érvényes rá az érintőnégyszögek tétele:

$$AB + CE = AE + BC$$

AED háromszög tompaszögű, így leghosszabb oldala az *AE*, vagyis $AE > AD$. Ugyanakkor *E* a *CD* oldal belső pontja, emiatt $CE < CD$. Ekkor viszont:

$$AD + BC < AE + BC = AB + EC < AB + CD$$

$$\Downarrow$$

$$AD + BC < AB + CD$$

A kapott eredmény viszont ellentmond annak, hogy a négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő. Tehát ellentmondáshoz jutottunk, vagyis a kiindulási feltevésünk helytelen volt. Ebből következik, hogy ha egy négyszög szemközti oldalainak összege megegyezik, akkor az érintpnégyszög.

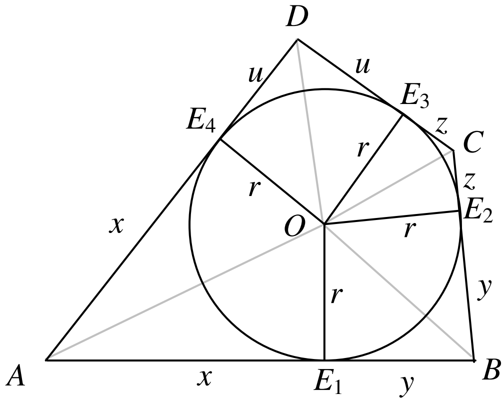
Kerület

Az érintőnégyszög oldalai is különböző hosszúságúak lehetnek, így kerülete:

$$K = a + b + c + d\,.$$

Terület

Tétel: Az érintőnégyszög területét a $T = s \cdot r$ összefüggés adja meg, ahol *s* az érintőnégyszög félkerülete, *r* pedig a beírható kör sugara.
Bizonyítás: Tekintsük az ábrán látható érintőnégyszöget. Teljesül rá az érintőnégyszögek tétele, így $AE_1 = AE_4$ és $BE_1 = BE_2$ és $CE_2 = CE_3$ és $DE_3 = DE_4$, ezen szakaszokat *x*-szel, *y*-nal, *z*-vel és *u*-val jelöltük.
Ekkor az érintőnégyszög területe 8 derékszögű háromszög területeként írható fel, melyek páronként egybevágók (egy oldaluk és két szögük megegyezik, mivel a beírt kör középpontja egyben a szögfelezők metszéspontja is).
Tehát:



$$T = 2\cdot\frac{x\cdot r}{2} + 2\cdot\frac{y\cdot r}{2} + 2\cdot\frac{z\cdot r}{2} + 2\cdot\frac{u\cdot r}{2} =$$
$$= r\left(x + y + z + u\right).$$

Viszont a háromszög kerülete:

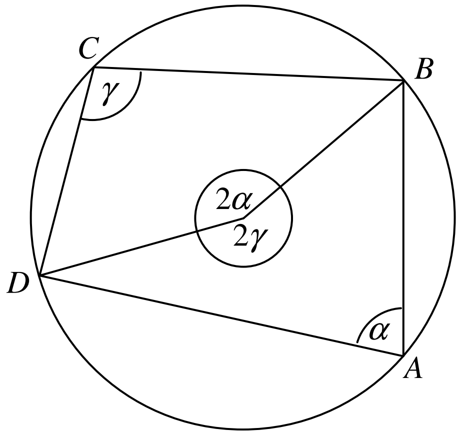
$$K = 2x + 2y + 2z + 2u = 2\left(x + y + z + u\right),$$

vagyis $x + y + z + u = \frac{K}{2} = s$, és így a területre kapott kifejezés: $T = r\left(x + y + z + u\right) = rs$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Húrnégyszögek

Definíció: Húrnégyszögnek nevezzük az olyan négyszöget, amely köré kör írható.
Ezzel ekvivalens az a definíció, hogy húrnégyszögnek nevezzük az olyan négyszöget, melynek oldalai egy kör húrjai.
A húrnégyszöget emellett definiálhatjuk a következő tétellel is, melyet húrnégyszögek tételének nevezünk.

Húrnégyszögek tétele



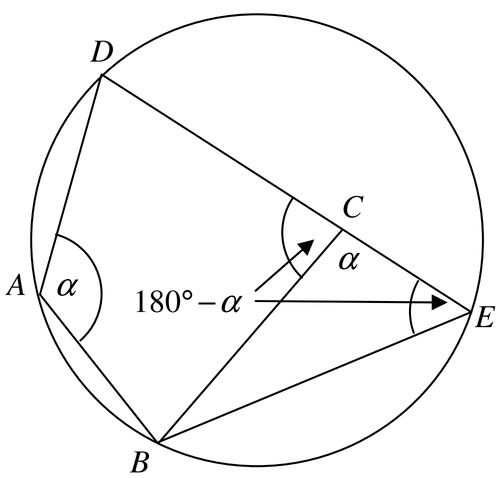
Húrnégyszögek tétele: Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege 180°.
Bizonyítás: a kerületi és középponti szögek tételét használjuk fel. Ha az ábrán látható húrnégyszög két szemközti szöge α és γ, akkor a hozzájuk tartozó ívekhez tartozó középponti szögek 2α illetve 2γ, és az ábrán látható módon ezek épp a teljesszöget teszik ki:

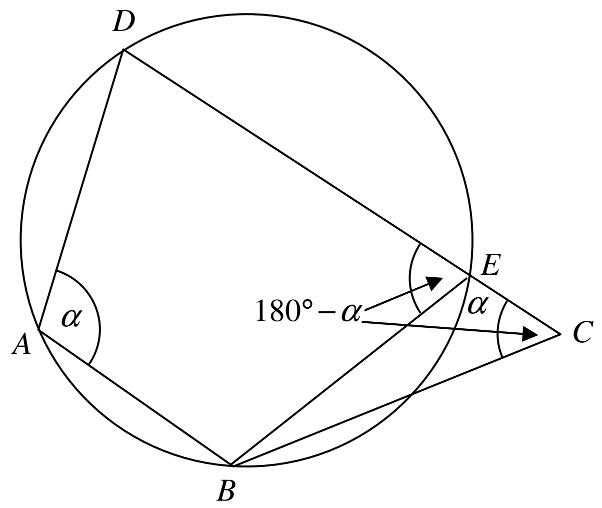
$$2\alpha + 2\gamma = 360°$$
$$\alpha + \gamma = 180°$$

Mivel a négyszög belső szögeinek összege 360°, ezért a másik két szemközti szög összege is 180°. Ezzel a tételt beláttuk.
A tétel hasonlóan igazolható olyan húrnégyszögre is, melynek köré írható körének középpontja a húrnégyszögön kívül van.

A tétel megfordítása:
Tétel: Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180°, akkor a négyszög húrnégyszög.
Bizonyítás: indirekt úton történik. Tegyük fel, hogy egy négyszög egyik szöge α és a vele szemközti szög $\gamma = 180° - \alpha$, de nem írható köré kör (lásd következő oldali ábra). Három pont köré mindig írható kör, legyen ez az ábrán látható módon az *ABD* háromszög köréírt köre, melyre *C* nem illeszkedik. Két eset lehetséges, *C* vagy a körön belül, vagy azon kívül van, ezt az alábbi két ábra szemlélteti:
Bármelyik esetet is tekintjük, *CD* egyenese metssze a kört az *E* pontban. Ekkor *ABED* négyszög húrnégyszög, és emiatt igaz ráa h úrnégyszögek tétele, vagyis *BEC* szög nagysága $180° - \alpha$. Viszont mivel *BCD* szög is $180° - \alpha$, ezért *BCE* szög α. Ekkor azonban az *ECB* háromszög egyik szöge α, másik szöge $180° - \alpha$, és mivel egy harmadik szöge is van, a szögösszeg nem adódna 180°-nak. Tehát ellentmondáshoz jutottunk, így a kiinduló állításunk helytelen.
Tehát, ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180°, akkor a négyszög húrnégyszög.

A két tétel együtt:
Tétel: Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180°.





Kerület

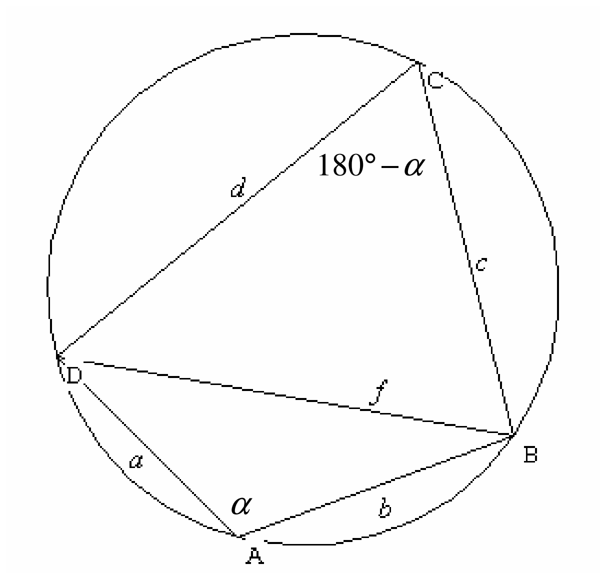
A húrnégyszög kerületét, mivel oldalai között nincsenek feltétlenül egyenlők, az általános négyszögekre jellemző $K = a + b + c + d$ képlettel számíthatjuk.

Terület

A húrnégyszögek területképlete (éppen azért, mert kör írható köréjük), hasonlóságot mutat a háromszögek Héron-féle területképletével (egy háromszög köré is mindig írható kör).

Tétel: Az a, b, c és d oldalú húrnégyszög területét a $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ összefüggés alapján számíthatjuk, ahol s a húrnégyszög félkerülete.

Bizonyítás: Írjuk fel az ábrán látható $ABCD$ húrnégyszögben ABD és BCD háromszögekben f-re a koszinusztételt!



$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, és $f^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\left(180^\circ - \alpha\right)$.

Az egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve, valamint a $\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha$ összefüggést használva, kapjuk, hogy:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha$$

Az egyenletet rendezzük $\cos\alpha$-ra:

$$(1)\ \cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\left(ab + cd\right)}.$$

Most fejezzük ki a húrnégyszög T területét ABD és BCD háromszögek területének összegeként, a trigonometrikus területképletet használva:

$$T=\frac{ab\sin\alpha}{2}+\frac{cd\sin\left(180^\circ-\alpha\right)}{2}=\frac{ab\sin\alpha}{2}+\frac{cd\sin\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{2}\left(ab+cd\right)$$

A kifejezés átalakítása során kihasználtuk, hogy $\sin\left(180^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$. A kapott összefüggésből kifejezzük $\sin\alpha$-t:

$$(2)\ \sin\alpha=\frac{2T}{ab+cd}.$$

Emeljük négyzetre az (1) és a (2) egyenleteket (mivel mindkét egyenletben mindkét oldal nemnegatív, ezt megtehetjük):

$$\sin^2\alpha=\frac{4T^2}{\left(ab+cd\right)^2}\qquad\qquad \cos^2\alpha=\frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4\left(ab+cd\right)^2}.$$

Mivel $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, ezért:

$$\frac{4T^2}{\left(ab+cd\right)^2}+\frac{\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}{4\left(ab+cd\right)^2}=1$$

A törtet eltávolítva:

$$16T^2+\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2=4\left(ab+cd\right)^2$$

Az egyenletet $16T^2$-re rendezzük, majd azonos átalakításokat végzünk:

$$16T^2=4\left(ab+cd\right)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2$$
$$16T^2=\left[2\left(ab+cd\right)-a^2-b^2+c^2+d^2\right]\cdot\left[2\left(ab+cd\right)+a^2+b^2-c^2-d^2\right]$$
$$16T^2=\left[2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2\right]\cdot\left[2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2\right]$$
$$16T^2=\left[c^2+2cd+d^2-\left(a^2-2ab+b^2\right)\right]\cdot\left[a^2+2ab+b^2-\left(c^2-2cd+d^2\right)\right]$$
$$16T^2=\left[\left(c+d\right)^2-\left(a-b\right)^2\right]\cdot\left[\left(a+b\right)^2-\left(c-d\right)^2\right]$$
$$16T^2=\left(c+d-a+b\right)\left(c+d+a-b\right)\left(a+b-c+d\right)\left(a+b+c-d\right)$$

Ha bevezetjük az $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ jelölést, akkor egyenletünk a következő alakba írható:

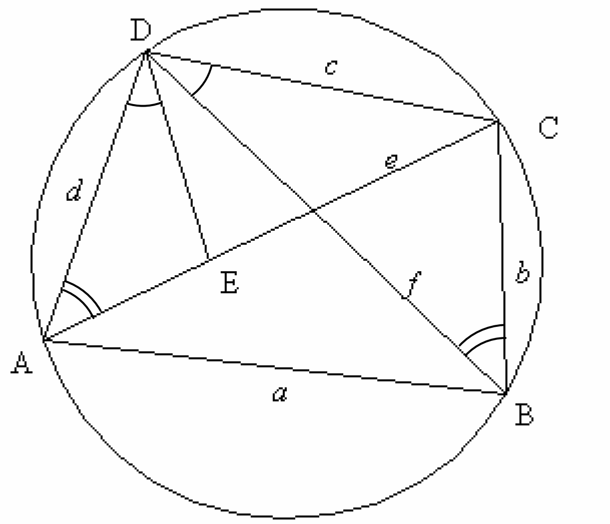
$$16T^2=2\left(s-a\right)\cdot2\left(s-b\right)\cdot2\left(s-c\right)\cdot2\left(s-d\right)$$

16-tal osztva és az egyenlet mindkét oldalából négyzetgyököt vonva kapjuk, hogy:

$$T=\sqrt{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)\left(s-d\right)}.$$

Ptolemaiosz-tétel

A húrnégyszögek oldalai valamint átlói közti érdekes összefüggést mondja ki a következő tétel, mely Klaudiosz Ptolemaiosz nevéhez fűződik:



Ptolemaiosz tétele: Egy húrnégyszög átlóinak szorzata megegyezik a szemközti oldalak szorzatának összegével, vagyis a szokásos jelölésekkel: $ef = ac + bd$.

Bizonyítás: Vegyünk fel az ábrán látható húrnégyszög AC átlóján egy olyan E pontot, hogy $ADE\sphericalangle = BDC\sphericalangle$ teljesüljön.

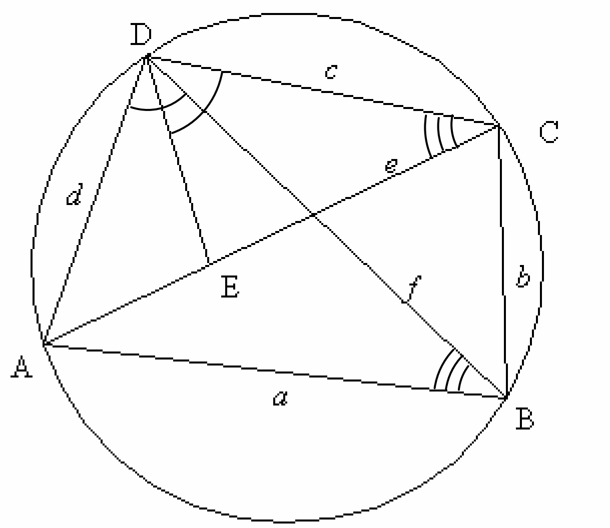
Ugyanakkor a c oldal a kör pontjaiból ugyanakkora szög alatt látszik, azaz: $DAC\sphericalangle = DBC\sphericalangle$.

$DAE\Delta$ tehát hasonló $DBC\Delta$-höz, mivel két belső szögük (és így minden belső szögük) megegyezik. Ekkor viszont a megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{DA}{AE} = \frac{DB}{BC}.$$

Vagyis:

$$(1)\ DA \cdot BC = AE \cdot DB$$



Az előbbihez hasonló módon találhatunk még hasonló háromszögeket rajzunkon (5. ábra). Ugyanis $ADB\sphericalangle = EDB\sphericalangle$, és a d oldal a körív pontjaiból szintén azonos szögek alatt látszik: $ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle$. Így $ABD\Delta$ hasonló $DEC\Delta$-höz. A megfelelő oldalak aránya megegyezik:

$$\frac{EC}{CD} = \frac{AB}{BD}$$

Tehát:

$$(2)\ AB \cdot CD = EC \cdot BD$$

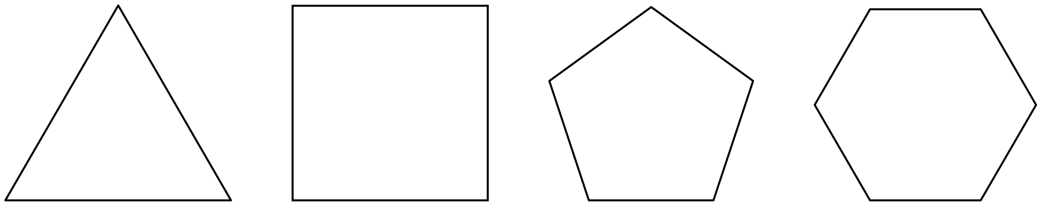
Adjuk össze (1) és (2) egyenleteket!

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AE \cdot BD + EC \cdot BD$$
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot (AE + EC)$$
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot AC$$

Vagyis a kapott egyenlet: $bd + ac = ef$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Szabályos sokszögek szögei és szimmetriáik

Definíció: szabályos n-szögnek nevezzük az olyan n oldalú sokszöget, melynek minden oldala egyenlő hosszúságú és minden belső szöge egyenlő nagyságú.
A következő ábrán szabályos három-, négy-, öt- és hatszöget láthatunk. A szabályos négyszög nem más, mint a négyzet.



Minden szabályos sokszögnek vannak szimmetriatengelyei, emellett minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus a szimmetriatengelyeinek középpontjára.
Minden szabályos sokszögbe és köré kör írható, vagyis a szabályos sokszögek érintő- és húrsoksokszögek.

Belső szögek

Tétel: Az n oldalú szabályos sokszög belső szögeinek nagysága $\frac{(n-2)180°}{n}$.
Bizonyítás: n oldalú sokszög belső szögeinek összege a fentebb bizonyítottak szerint $(n-2)180°$. A definíció szerint a szabályos sokszög belső szögei megegyeznek, így n oldalú szabályos sokszög egy belső szögének nagysága $\frac{(n-2)180°}{n}$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Kerület

Mivel a szabályos sokszög minden oldala egyenlő, egy n oldalú sokszög kerülete: $K = n \cdot a$, ahol a a sokszög egy oldalának hossza.

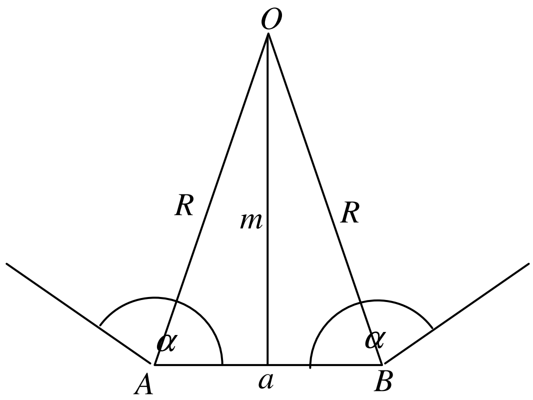
Terület

Tétel: Ha az n oldalú szabályos sokszög egy oldalának hossza a, akkor területe:

$$T = n \cdot \frac{a^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{(n-2)180°}{2n}}{4}.$$

Bizonyítás: Minden szabályos sokszög köré kör írható, így van olyan pont a sokszög belsejében, amelytől minden csúcsa azonos (R) távolságra van. Így a szabályos n szög e középpont és a csúcsok által meghatározott R hosszúságú szakaszok segítségével feldarabolható n db egybevágó egyenlő szárú háromszögre.

Meghatározzuk tehát egy db ilyen háromszög területét, és azt n-szel szorozva kapjuk meg a kívánt sokszög területének nagyságát.



Egy ilyen háromszög területe: $T = \frac{a \cdot m}{2}$. A magasságot azonban egy tangens-szögfüggvénnyel meghatározhatjuk:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{\frac{a}{2}} \Rightarrow m = \frac{a}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy a szabályos n-szög egy belső szögének nagysága: $\frac{(n-2)180°}{n}$. Ezt beírva a magasságot megadó összefüggésbe α helyére:

$$m = \frac{a}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\frac{(n-2)180°}{n}}{2} = \frac{a}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{(n-2)180°}{2n}.$$

Így egy háromszög területe:

$$T_1 = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{(n-2)180°}{2n}}{2} = \frac{a^2 \cdot \mathrm{tg}\frac{(n-2)180°}{2n}}{4}.$$

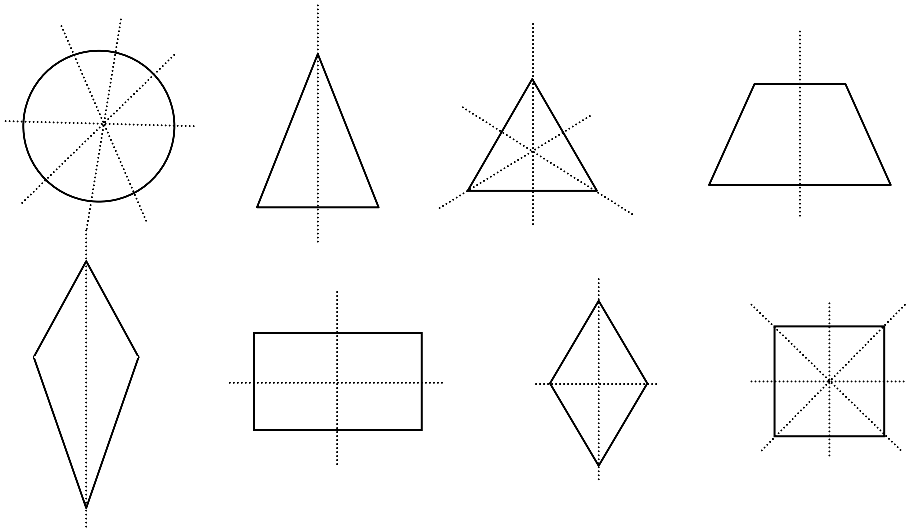
Ezt a területet n-nel szorozva kapjuk a szabályos n-szög területét: $T = n \cdot \frac{a^2 \cdot \mathrm{tg}\frac{(n-2)180°}{2n}}{4}$.

Definíció: Egy alakzat szimmetrikus, ha van olyan egybevágósági transzformáció (az identitás, vagyis helyben hagyás kivételével), mely az alakzatot önmagába viszi át.
Az egybevágósági transzformációk többfélesége miatt többféle szimmetriát különböztetünk meg, pl. beszélünk tengelyes, középpontos és forgásszimmetriáról. A következőkben általánosan jellemezzük a szimmetriákat, melyekben áttekintjük a szabályos sokszögekre vonatkozó esetet is.

Tengelyes szimmetria

Definíció: Tengelyesen szimmetrikus egy alakzat, ha van síkjában olyan tengely, melyre tükrözve az alakzatot a képe önmaga.
Tengelyesen szimmetrikus:
(1) a kör, minden a középpontján átmenő egyenesre. Mivel egy ponton át végtelen sok egyenes rajzolható, a körnek végtelen sok szimmetriatengelye van.
(2) az egyenlő szárú háromszög, szimmetriatengelye az alap felezőmerőlegese.
(3) a szabályos háromszög, minden oldalfelező (szögfelező) egyenesére.
(4) a húrtrapéz az alapok felezőmerőlegesére.
(5) a deltoid az egyik átló egyenesére.

(6) minden szabályos sokszög.
A (4) és (5) állításából következően tengelyesen szimmetrikus a téglalap (két tengely), a rombusz (2 tengely) és a négyzet (4 tengely) is.



Középpontos szimmetria

Definíció: Középpontosan szimmetrikus egy alakzat akkor, ha létezik a síkjában egy olyan pont, amelyre az alakzatot tükrözve az önmagába megy át.
Középpontosan szimmetrikus:
(1) a kör a középpontjára.
(2) minden paralelogramma, az átlók metszéspontjára.
(3) minden páros oldalú szabályos sokszög, a köréírható kör középpontjára.
Középpontosan szimmetrikus háromszög nem létezik. A (2) állításból következik, hogy minden rombusz, téglalap és négyzet is középpontosan szimmetrikus.

Forgásszimmetria

Definíció: Egy alakzat forgásszimmetrikus, ha van az alakzat síkjában olyan pont, mely körül adott szöggel elforgatva az alakzat önmagába megy át.
Forgásszimmetrikus:
(1) minden kör a középpontjára, a forgatás szöge tetszőleges.
(2) a szabályos háromszög a köréírható kör középpontjára, a forgatás szöge 120° vagy annak egész számú többszöröse.
(3) a paralelogramma, a forgatás középpontja az átlók metszéspontja, a forgatás szöge 180° vagy annak egész számú többszöröse.
Emellett minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus, a forgatás középpontja a köréírható kör középpontja, szöge pedig n oldalú szabályos sokszög esetén $\frac{360°}{n}$, illetve ennek egész számú többszöröse.

Egybevágósági transzformációk egymás utáni elvégzését a geometriai transzformációk szorzatának nevezzük. Egybevágósági transzformációk szorzata is egybevágósági transzformáció.

Aranymetszés

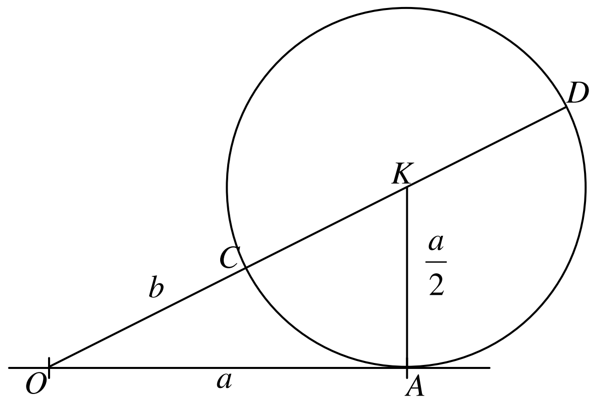
Az aranymetszés a matematika egyik legnevezetesebb aránya: úgy oszt fel egy szakaszt két nemegyenlő részre, hogy a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a nagyobb az egészhez. Azaz $a<b$ esetén: $\frac{a}{b}=\frac{b}{a+b}$.

Meghatározandó az aranymetszés arányát, legyen $\frac{b}{a}=\varphi$. Akkor a definíció szerint:

$$\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}\Rightarrow\frac{1}{\varphi}=\frac{\varphi}{1+\varphi}.$$

Azaz keressük a $\varphi^2-\varphi-1=0$ egyenlet gyökeit. Ezek: $\varphi_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, de az arány negatív értékének nincs értelme, így az aranymetszés aránya („az aranyszám”): $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Feladat az arány hosszabbik szakaszának ismeretében a másik szakasz megszerkesztése. Ez pl. megoldható a következő módon: Legyen *OA* szakasz hossza a, ekkor szerkesszünk a szakasz egyenesét érintő kört *A*-ban, melynek sugara $\frac{a}{2}$, középpontja legyen *K*. Húzzuk meg *OK* egyenest, metszéspontja a körrel legyen az ábrán látható módon *C* és *D*. Akkor a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele alapján:

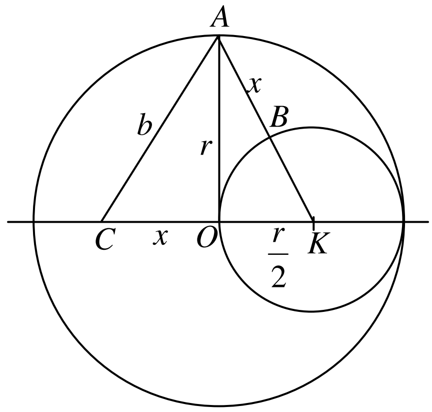


$$a^2=OB\cdot OC$$
$$a^2=b(a+b)$$
$$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$$

Vagyis megszerkesztettük az arány rövidebb, *b* hosszúságú szakaszát.

Szabályos ötszög és tízszög szerkesztése

Feladat adott sugarú körbe szabályos ötszög illetve tízszög szerkesztése. Tekintsük az ábrát, ahol az *r* sugarú kör középpontja *O*. Szerkesszük meg a *K* középpontú $\frac{r}{2}$ sugarú kört a kör egy átmérőjén az ábrán látható módon, majd állítsunk ezen átmérőre merőlegest *O*-ban, egyik metszéspontja a körrel legyen A. AK szakasz metszéspontja az $\frac{r}{2}$ sugarú körrel legyen B. Akkor Pitagorasz tétele szerint:



$$r^2+\frac{r^2}{4}=\left(x+\frac{r}{2}\right)^2$$
$$r^2+\frac{r^2}{4}=x^2+xr+\frac{r^2}{4}$$
$$r^2=x(x+r)$$
$$\frac{r}{x}=\frac{x+r}{r}$$

Vagyis x az r aranymetszete. Könnyen látható, hogy x a körbe rajzolható szabályos tízszög oldalhossza.

Most legyen C az ábrán látható módon az átmérőn úgy, hogy $OC=x$. Akkor OCA háromszögben Pitagorasz-tételt felírva:

$$x^2+r^2=b^2.$$

Az is igazolható, hogy ekkor b a körbe írható szabályos ötszög oldalhossza.

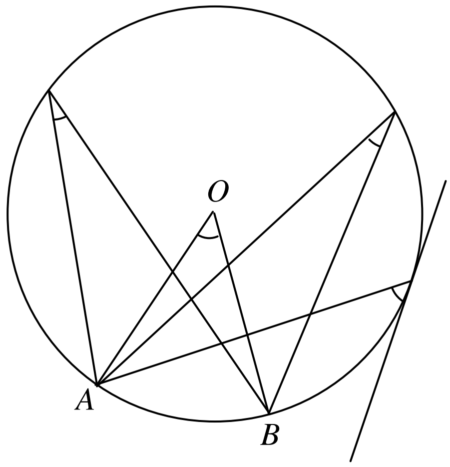
Kör

Középponti és kerületi szögek

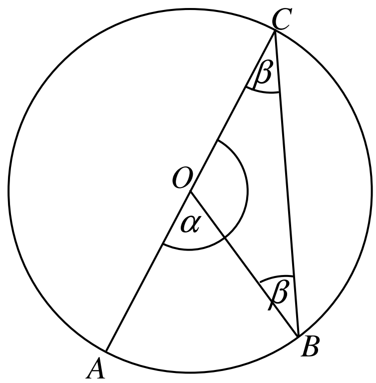
A kör azon pontok halmaza a síkban, amelyek egy adott ponttól (a kör középpontjától) egyenlő távolságra vannak.

Definíció: a körben középponti szögnek nevezzük a két sugár által meghatározott szöget. A sugarak a körből egyben két körívet is kimetszenek, így beszélhetünk a körívhez tartozó középponti szögről is. Amennyiben a körív félkörnél kisebb, úgy a középponti szög konvex, ha az ív félkörnél nagyobb, a középponti szög konkáv. Félkör esetén a középponti szög éppen 180°.

Definíció: a körben kerületi szögnek nevezzük azt a szöget, melynek csúcsa a körön van, szárai pedig vagy a kör húrjai, vagy egyik szára egy húr, másik szára a kör egy érintője. Ez utóbbi esetben érintő szárú kerületi szögről beszélünk.
A kör egy ívéhez végtelen sok kerületi szög tartozik. Ha az ív félkörnél kisebb, akkor a hozzá tartozó kerületi szög hegyesszög. Ha az ív félkörnél nagyobb, akkor a kerületi szög tompaszög.
A következő ábrán az AB ívhez tartozó középponti szöget és néhány kerületi szöget jelöltünk be:

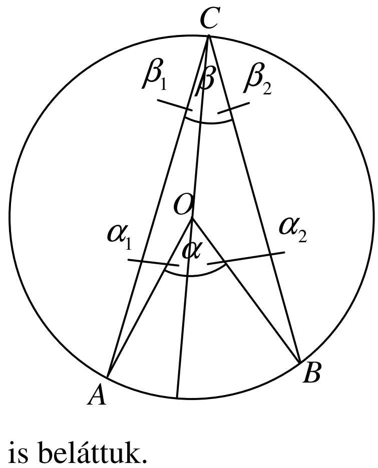


A kerületi és középponti szögek közti fontos kapcsolatot mondja ki a következő tétel:
Kerületi és középponti szögek tétele: A kör egy adott ívéhez tartozó középponti szöge kétszerese az ugyanezen ívhez tartozó kerületi szögeknek.
Bizonyítás: a tétel bizonyítása során 6 esetet különböztetünk meg, ebből az utolsó három érintő szárú kerületi szögekre vonatkozik, a többi eset pedig abban különbözik, hogy milyen a kerületi és a középponti szög viszonya.
(1) A középponti szög és a kerületi szög egyik szára egybeesik: Tekintsük az ábrán látható *AOB* középponti és *ACB* kerületi szöget. Mivel *OBC* háromszög egyenlő szárú, ezért *OBC* szög és *OCB* szög nagysága megegyezik. *COB* szög az α szög kiegészítő szöge, így *OBC* háromszögben felírva a háromszög belső szögeire vonatkozó összefüggést:



$$180° - \alpha + 2\beta = 180°$$
$$2\beta = \alpha$$

A kapott egyenlet pedig éppen a bizonyítani kívánt állítás.
(2) A középponti szöget tartalmazza a kerületi szög: ezt az esetet visszavezetjük az (1) esetre. Húzzuk meg az ábra szerint a *CO* egyenest, ez a kerületi és a középponti szöget is két részre osztja. Ekkor az előzőekben bizonyítottak szerint:

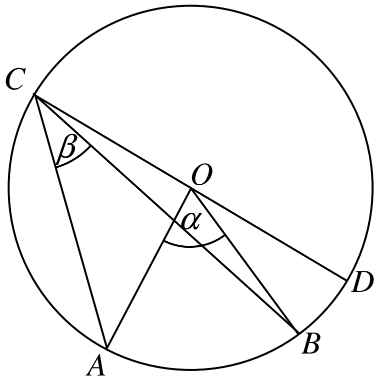


$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= 2\beta_1\\ \alpha_2 &= 2\beta_2\end{aligned}\right\}\downarrow +$$

A két egyenletet összeadva:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\beta_1 + \beta_2)$$
$$\alpha = 2\beta$$

Tehát a tételt ebben az esetben is beláttuk.



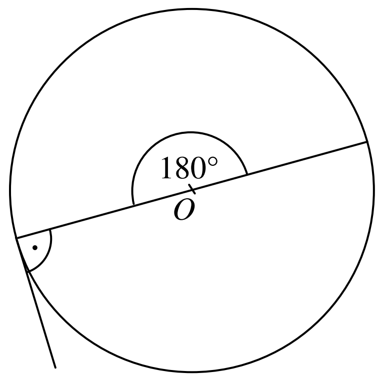
(3) A középponti szög csúcsa kívül esik a kerületi szög tartományán: húzzuk be az ábra szerint a *CO* egyenest, mely metssze a kört a *D* pontban. Ekkor a kérdéses szögek:

$$\alpha = AOD\sphericalangle - BOD\sphericalangle$$

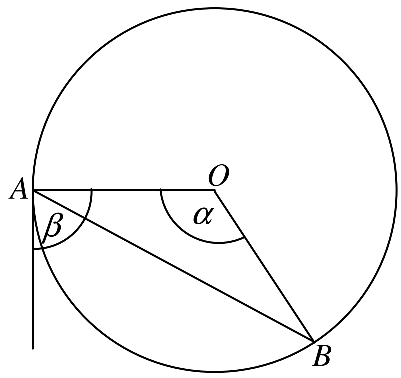
$$\beta = ACD\sphericalangle - BCD\sphericalangle$$

Viszont az (1) pontban igazoltak szerint $AOD\sphericalangle = 2 \cdot ACD\sphericalangle$, és $BOD\sphericalangle = 2 \cdot BCD\sphericalangle$.

Így tehát: $\alpha = 2 \cdot ACD\sphericalangle - 2 \cdot BCD\sphericalangle = 2\beta$, és ezt kellett bizonyítanunk.



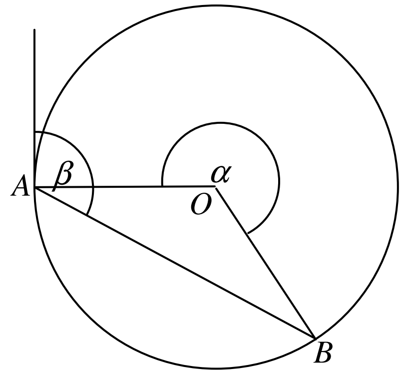
(4) A középponti szög nagysága 180°, a kerületi szög érintő szárú: A tétel ez esetben adja magát: az érintő merőleges az érintési ponthoz húzott sugárhoz, tehát ha a középponti szög 180°-os, akkor a kerületi szög 90°-os, és a 180° a 90°-nak kétszerese.



(5) A középponti szög konvex szög, a kerületi szög érintő szárú: Ekkor, mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, *OAB* szög nagysága $90° - \beta$, és ekkora *ABO* szög nagysága is, mivel *ABO* háromszög egyenlő szárú. Felírva így ezen háromszögben a háromszög belső szögösszegére vonatkozó összefüggést:

$$\alpha + 90° - \beta + 90° - \beta = 180°$$
$$\alpha = 2\beta$$

Így a tételt ez esetben is beláttuk.



(6) A középponti szög konkáv szög, a kerületi szög érintő szárú: ekkor az előző esethez hasonlóan *OAB* szög nagysága $\beta - 90°$, és ekkora *OBA* szög is, mivel *ABO* háromszög egyenlő szárú. *AOB* szög nagysága $360° - \alpha$, így *ABO* háromszögben felírva a háromszögek szögösszegére vonatkozó összefüggést:

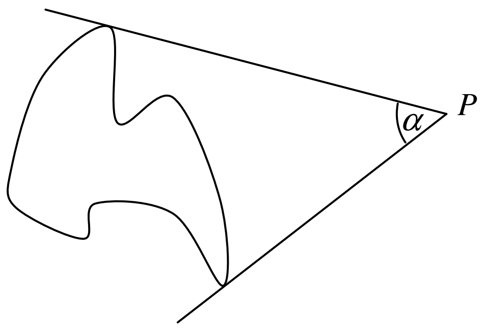
$$\beta - 90° + \beta - 90° + 360° - \alpha = 180°$$
$$2\beta = \alpha$$

A tétel tehát ez esetben is igaz.

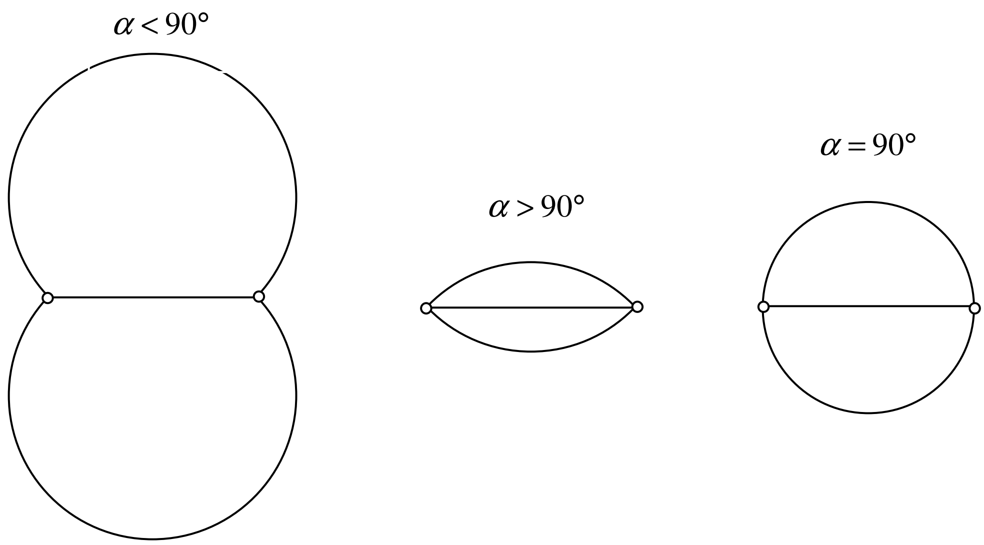
Kerületi szögek tétele: Egy körben (vagy azonos sugarú körökben) az azonos (vagy egyenlő) ívhez (ívekhez) tartozó kerületi szögek egyenlők.
Bizonyítás: Egy ívhez adott sugarú körben csak egy középponti szög tartozik, és ennek nagysága az ívhez tartozó kerületi szögek kétszerese. Bár kerületi szögből végtelen sok van, nagyságuk mindig az ívhez tartozó középponti szög fele, tehát egyenlők.

Látószög-körív

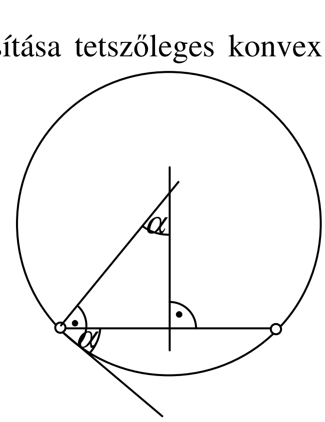
Definíció: Egy alakzat bármely, az alakzaton kívüli pontból olyan konvex szögben látszódik, melynek csúcspontja a pont és e szög a legkisebb olyan szög, melynek szögtartományán kívül az alakzatnak nincs pontja.
Tehát pl. a következő alakzat a P pontból α szögben látszódik:



Tétel: Azon pontok halmaza a síkban, melyekből egy adott szakasz konvex szögben látszódik, két, a szakaszra szimmetrikus félkörív, melyeknek a szakasz egy közös húrja (kivéve az ívből a szakasz végpontjait).
Ezen íveket a szakasz látókörívének nevezzük.
Bizonyítás: A tétel közvetlenül adódik a kerületi szögek tételéből. Ugyanis a körívet kiegészítjük teljes körré, akkor a szakasz mint húr végpontjai közt a körnek egyben egy íve is található, amely adott szögben valóban a látókörív pontjaiból látszik, mivel a kerületi szögek tétele miatt ezen íven egyenlő nagyságú kerületi szögek nyugszanak.
Amennyiben a látószög 90°-nál kisebb, a körívek félkörnél nagyobbak, ha a látószög 90°-nál kisebb, akkor a körívek a félkörnél kisebbek, míg ha a látószög 90°, akkor a körívek éppen félkört alkotnak (a két szakaszra szimmetrikus félkör pedig egy teljes kört, amit a Thalész-tétel is kimond).



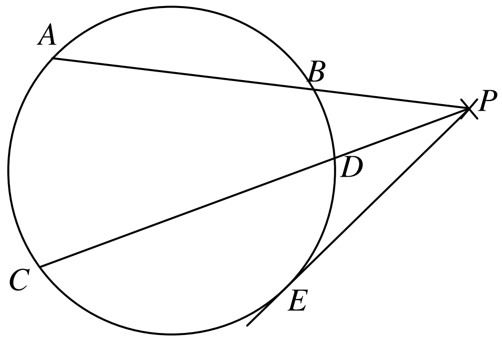
Tehát a látókörívek tétele nem más, mint a Thalész-tétel általánosítása tetszőleges konvex szögre.
Ha egy szakasz adott szögű látókörívét kell megszerkesztenünk, akkor a következők szerint járunk el.
Mérjük fel a szakasz egyik végpontjából a szöget, majd az új szögszárral állítsunk merőlegest. Ezen merőlegesnek az eredeti szakasz felezőmerőlegesével való metszéspontja a látókörív középpontja.
A szerkesztési eljárás azért helyes, mert a szakasz végpontjából felvett szög a látókör érintő szárú kerületi szöge, erre merőleges szárú szög az új szárra állított merőleges és a szakasz felező merőlegese által bezárt szög, tehát egyenlő vele. E szög a szakasz és a



kör középpontja által meghatározott szög fele, amely nem más, mint középponti szög. Tehát a kerületi szögek éppen az adott szög nagyságával egyeznek meg, és a látókörívre illeszkednek.

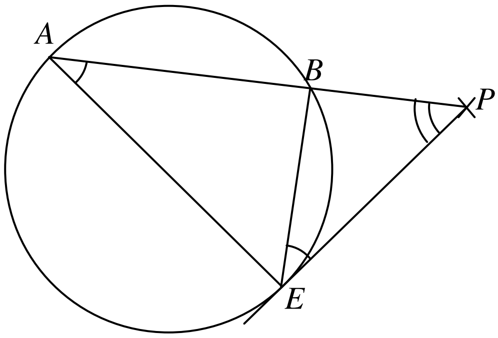
Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele

Tétel: Egy körhöz egy külső pontból húzott érintő a külső pontból a körhöz húzott szelőszakaszok hosszának mértani közepe. Az ábra jelöléseivel:



$$PE = \sqrt{PA \cdot PB} = \sqrt{PC \cdot PD}\ .$$

Bizonyítás: Húzzuk be AE és BE szakaszokat! Ekkor EAB szög a BE ívhez tartozó kerületi szög, és BEP a BE ívhez tartozó érintő szárú kerületi szög. A kerületi szögek tétele miatt nagyságuk megegyezik. Ekkor viszont BEP háromszög hasonló AEP háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők. Így a megfelelő oldalaik aránya egyenlő:



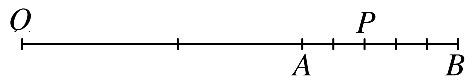
$$\frac{PE}{PA} = \frac{PB}{PE}$$

$$PE^2 = PA \cdot PB$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, vonhatunk négyzetgyököt, és így éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

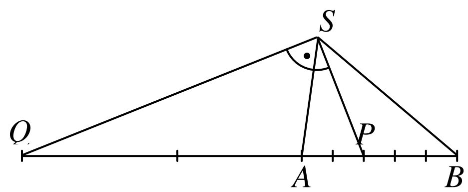
Apolloniusz-kör

A körnek egyfajta definíciója a most következő tétel, mely Apolloniosz nevéhez kapcsolódik.
Apolloniusz-tétel: Azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek két ponttól mért távolságának aránya 1-től különböző állandó, egy kör.
Ezen kör középpontja a pontok által meghatározott egyenesen van, a kör a két pont által megadott szakasz Apolloniusz-köre.
Bizonyítás: Szerkesztendők azok a pontok, melyből egy szakasz két végpontjától mért távolságuk aránya 1-től különböző állandó (1 esetén ezen pontok halmaza a szakaszfelező merőleges). Legyen ez a távolságarány k:n. Az nyilvánvaló, hogy a szakaszra illeszkedő egyenesen van két ilyen pont, egyik a szakasz k:n arányú osztópontja, másik a szakaszon kívül helyezkedik el, de az arány teljesül rá (az ábrán 2:3 arány látható):

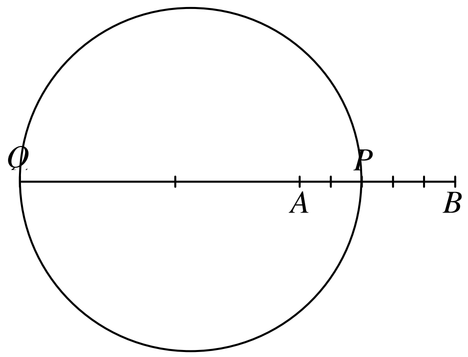


$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = \frac{k}{n}.$$

Tegyük fel, hogy e két ponton kívül a sík más pontjaira is teljesül a feltétel. Vegyük fel az S pontot, melyre teljesül, hogy $\frac{SA}{SB} = \frac{k}{n}$.



Az S, A és B pontok háromszöget alkotnak. A szögfelezőtétel értelmében, ha $\frac{SA}{SB} = \frac{k}{n}$, és $\frac{PA}{PB} = \frac{k}{n}$, akkor P pont rajta van az S-ből kiinduló szögfelezőn. Hasonlóan, a külső szögfelezőre vonatkozó tétel miatt Q rajta van az S-nél lévő külső szög felezőjén. Viszont egy háromszög adott csúcsánál lévő belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, tehát QSA szög derékszög. Ekkor viszont a Thalész-tétel miatt S rajta van a QP átmérőjű körön.



Tehát a kérdéses tulajdonságú pontok a QP szakasz fölé rajzolt Thalész-körön vannak rajta. Ez nem más, mint AB szakasz Apolloniusz-köre.
Apolloniusz-kör szerkesztéséhez tehát először megkeressük a szakasz egyenesén lévő megfelelő két pontot, majd e két pont mint szakasz fölé kört rajzolunk, így kapva a megfelelő alakzatot.

Források

Markó Zoltán:
Gimnáziumi matematika, kézirat

Reiman István:
Geometria és határterületei, Szalai Könyvkiadó

Czapáry Endre - Czapáry Endréné - Csete Lajos - Hegyi Györgyné - Iványiné Harró Ágota - Morvai Éva - Reiman István:
Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. Geometriai feladatok gyűjteménye, Nemzeti Tankönyvkiadó