

BEVEZETŐ PÉLDÁK.

Egyik alapvető törekvésünk, hogy bemutassuk a fraktálok elő állításában szerepet játszó matematikai módszereket. Ezért elsőként egy a fraktálok megkonstruálásában alapvető szerephez jutó eljárással, az iteráció vagy diszkrét dinamika fogalmával ismerkedünk meg. A pontos matematikai definíciót a későbbiekben adjuk meg, pillanatnyilag szemléletesen csak annyit mondhatunk, hogy iteráción egy olyan eljárást fogunk érteni, amelynek során újra meg újra megismételjük ugyanannak a szabálynak az alkalmazását. Az iterációval kapott sorozat neve: **iterációs sorozat**.

Az első két példa még nincsen kapcsolatban a fraktálgeometriával. Szerepük csupán az, hogy közismert példákon bemutassuk, hogy mi az iteráció?

- **1. Iteráció a számológépen.** A számológép megfelelő gombjának ismételt lenyomásával iterációs sorozatot kaphatunk. Nyomjuk meg egy számológép *cos* gombját újra meg újra. Ekkor azt a szabályt ismételjük, hogy

”vedd a kapott (radiánban adott) szög koszinuszát.”

A számítógépen kísérletezve *megfigyelhető*, hogy bármilyen x (radián) értékből is indulunk, egy olyan számsorozatot kapunk, amely a $0.73908\dots$ -hoz tart. Próbáljuk ki ezt az iterációt!

(Mit kapunk akkor, ha az $x = 0.73908\dots$ értékből indulunk?)

- **2. Iteráció és geometriai sorozat.** Számolásaink során lépten-nyomon előfordulnak a geometriai sorozatok. Geometriai sorozatot akkor kapunk, ha egy c számot mindig ugyanazzal a q számmal szorozzuk. Ez egy iterációs sorozat, hiszen a geometriai sorozat képzésekor azt a ismételjük újra meg újra, hogy

”szorozd meg a kapott számot q -val.”

A geometriai sorozat képzését úgy is felfoghatjuk, hogy az

$$y = ax$$

elsőfokú függvényt iteráljuk. Ekkor a c kiinduló értéknek az x felel meg és a q hányados itt az a .

Természetes módon adódik a kérdés: *Milyen sorozatot kapunk, ha az*

$$f(x) = ax + b \quad x \in R;$$

elsőfokú függvényt iteráljuk?

Talán meglepő, hogy ekkor a geometriai sorozat részletösszegeit kapjuk.

Ugyanis, kétszer ismételve az f szabályt

$$f^{[2]}(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b;$$

háromszor ismételve

$$f^{[3]}(x) = a(a^2x + ab + b) + b = a^3x + a^2b + ab + b.$$

Ebből már láthatjuk a szabályt:

$$f^{[n]}(x) = a^n x + a^{n-1}b + \dots + ab + b \quad (n = 1, 2, \dots)$$

amit teljes indukcióval beláthatunk.

$f^{[n]}(0)$ annak a geometriai sornak az n -edik részletösszege, amelynek a hányadosa a és az első tagja b .

Szemléletes képet ad a sorozatról az *1.2 ábra*. Az ábrán $|a| < 1$. Az X tengely $0, x_1, x_2, x_3 \dots$ pontjaiban felállított, az Y tengellyel

párhuzamos, vastagabb vonalak hossza éppen a megfelelő részletösszeg értéke: az első vonal b , a második $b + ab$, a harmadik $b + ab + a^2b$ s.i.t.

Az ábrából az is leolvasható, hogy $0 < a < 1$ esetén, az a hányadosú (és b kezdetű) geometriai sor az

$$(*) \quad x = ax + b$$

egyenlet x megoldásához tart.

A $(*)$ megoldása

$$x = \frac{b}{1-a}$$

a végtelen geometriai sor jólismert összegképlete.

Ugyanis az $x = ax + b$ egyenlet megoldása az $y = ax + b$ és az $y = x$ egyenesek metszéspontjának az X koordinátája. Az iterációs sorozatot ábrázoló egyenesszakaszok végpontjai egyre közelednek ehhez a metszésponthoz, a végpontok tetszőlegesen közel kerülnek az egyenesek metszéspontjához, ha elég messze megyünk a geometriai sorozatban.

A fenti gondolatmenet a szemlélet alapján nyilvánvalónak tűnik. H a azonban *bizonyítani* is akarjuk, akkor a következőképpen járhatunk el. Tekintsük az n -edik részletösszeg és az

$$x = ax + b$$

egyenlet megoldásának az eltérését, vagyis a

$$(1) \quad \frac{b}{1-a} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b$$

különbséget. Ennek a nullához kell tartania. Valóban, az (1) formulát közös nevezőre hozva

$$(2) \quad \frac{b}{1-a} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b = \frac{1}{1-a} (b - (1-a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b) = \frac{1}{1-a} a^n b$$

amiből már következik, hogy az (1) tetszőlegesen kicsivé válik, ha n elég nagy, hiszen $0 < a < 1$.

A fenti (2) formulából nemcsak a geometriai sor összegképlete olvasható le, hanem a geometriai sor részletösszegeit adó ismert formula is. Ugyanis a (2) egyenlőség elejét és végét átrendezve

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k b = \frac{b}{1-a} - \frac{a^n b}{1-a}$$

és az egyenlőség jobboldalát tömörebbé alakítva

$$\frac{b}{1-a} - \frac{a^n b}{1-a} = b \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Az *1.2 ábra* kapcsolatot teremt az elsőfokú függvény iterációja és a geometriai sorozat részletösszegei között és az ábra sugallja ennek a *bizonyítását* is. A geometriai sorokkal történő *első találkozást* változatlanul a hagyományos módon ajánljuk.

Bármilyen $f : R \rightarrow R$ (egyváltozós függvény) iterációs sorozatát hasonlóan ábrázolhatjuk (F. 0.3).

- **3. A Cantor halmaz.** A fraktálokkal történő smerkedést a legegyszerűbben előállítható fraktálok egyikével, a Cantor halmaz bemutatásával kezdjük. Ezzel a halmazzal az Olvasók közül talán már sokan találkoztak. Induljunk ki a $[0, 1]$ zárt intervallumból. Osszuk három egyenlő részre, majd hagyjuk el a középső $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nyílt intervallumot. Ezután a fennmaradó két egyenesszakasznak is töröljük a középső harmadát, az $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ és az $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ intervallumot és ezt az eljárást folytatjuk a megmaradó egyenesszakaszokkal "a végtelenségig". Az eljárás végterméke egy különös halmaz lesz amit (triadikus) Cantor halmaznak hívunk (*1.3a ábra*).

Ez az eljárás is egy iteráció sorozatot eredményez. A kezdő elem a $[0, 1]$ intervallum és f , az ismétlődő szabály

”töröljük a középső (nyílt) harmadát mindegyik egyenesszakasznak.”

Ekkor

$$f^{[n]}([0, 1]) \subset f^{[n-1]}([0, 1]); \quad n = 1, 2, \dots$$

ami azt jelenti, hogy a szabály ismétlésével kapott halmazok egyre zsugorodnak, hiszen a szabály minden alkalmazásával elveszünk a halmazból.

A $\mathcal{C}$ Cantor halmaz az ismétlődő szabállyal kapott $f^{[n]}([0, 1]); \quad (n = 1, 2, \dots)$ halmazok *közös része* lesz.

A geometriai szerkesztés mellett a $\mathcal{C}$ Cantor halmaz a következő aritmetikai eljárással is előállítható:

Irjuk fel a $[0, 1]$ intervallum minden elemét triadikus alakban (hármasszámrendszerben). A konstrukcióból világos, hogy a Cantor halmazt előállító iteráció az első lépésben eltávolítja mindazokat a törteket amelyek triadikus alakjában a törtjel után 1 áll. Az iteráció második lépése törli mindazokat a törteket is amelyek triadikus alakjában a törtjel utáni második jegy 1, s.i.t. (*1.3b-c ábra*). Az eljárás végén pontosan azok a törtek maradnak meg, amelyek triadikus alakja csakis a 0 és 2 számjegyeket tartalmazza. Így a Cantor halmaz pontosan ezekből a törtekből áll.

MEGJEGYZÉS. Azokat a tizedestörteket, amelyekben egy adott jegyől csupa nulla áll, kétféle módon lehet felírni. Például, 0.01 és 0.00999... ugyanaz a tizedesszám. Ez a jólismert tulajdonság triadikus törtekre is áll. A

0.1 és 0.0222..., 0.01 és 0.00222..., 0.001 és 0.000222..., s.i.t.

pároknek a $[0, 1]$ intervallum ugyanazon pontja felel meg. A $\mathcal{C}$ Cantor halmaz aritmetikai előállításában ezek a pontok is szerepelnek (természetesen a 0 és 2 számjegyekkel felírt formában).

A Cantor halmaz néhány fontos tulajdonsága:

I. $f([0, 1])$ két olyan intervallum uniója, amelyek mindegyikének a

hossza $\frac{1}{3}$; $f^{[2]}([0, 1])$ 2^2 olyan intervallum uniója, amelyek mindegyikének a hossza $\frac{1}{3^2}$. Folytatva a Cantor halmaz képzését (teljes indukcióval)

$$\text{az } f^{[n]}([0, 1]) \text{ hossza } \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

mivel $f^{[n]}([0, 1])$ 2^n intervallumból áll amelyek mindegyikének a hossza $\frac{1}{3^n}$. Így, ha figyelembe vesszük a hosszúságmértéknek azt a tulajdonságát, hogy egy halmaz részének a hossza (mértéke) nem lehet nagyobb, mint a halmazé, akkor a Cantor halmaz hossza csak 0 lehet.

II. Dacára annak, hogy a Cantor halmaz hossza csakis 0 lehet, a Cantor halmaz számossága megegyezik a $[0, 1]$ számosságával. Ez azt jelenti, hogy a $[0, 1]$ pontjai párba állíthatók a Cantor halmaz pontjaival. Pontosabban,

a $[0, 1]$ minden pontjához hozzárendelhetjük a Cantor halmaz egy pontját úgy, hogy különböző pontokhoz a Cantor halmaznak egymástól különböző pontjai kerülnek. Ez a hozzárendelés lefedi a Cantor halmazt, ami azt jelenti, hogy ekkor a Cantor halmaz minden pontja egy $[0, 1]$ -be tartozó pont képe. Röviden szólva, megadható egy $[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ bijekció.

Ez a párbaállítás a következőképpen történhet. Irjuk fel a $[0, 1]$ pontjait bináris tört alakban (kettes számrendszerben) és a Cantor halmaz pontjait meg triadikus tört alakjában. Mivel a Cantor halmazba pontosan azok a pontok tartoznak, amelyek triadikus alakja csakis 0 és 2 számjegyet tartalmaz, a párba állítás a következő egyszerű szabály szerint történhet:

Cseréljük le az $x \in \mathcal{C}$ triadikus alakjában a 2 számjegyeket 1-re. Az így kapott bináris tört lesz az x párja

(Például, ha $x = 0,2202|_3$, akkor a párja a $0,1101$ bináris tört. Tizedestörtekben kifejezve, a $0,47419\dots$ párja $0,8125$.)

III. Ha a $[0, \frac{1}{3}] \cap \mathcal{C}$ vagy a $[\frac{2}{3}, 1] \cap \mathcal{C}$ halmazt háromszorosára nagyítjuk,

akkor megkapjuk az egész $\mathcal{C}$ Cantor halmazt. Ha ezt a két részhalmazt egyesítjük, akkor is a Cantor halmazt kapjuk. Ezt a tulajdonságot önhasonlóságnak nevezzük.

Az önhasonlóság alapján, $\mathcal{C}$ úgy tekinthető, mint egy szerfelett lyukacsos halmaz, amelyből nagyításkor egyre több és több részlet válik láthatóvá.

Az önhasonló halmazokat az 5-6 fejezetben fogjuk részletesen tárgyalni. Ott be fogunk mutatni a természetben, a valóságban előforduló önhasonlónak tekinthető halmazokat is.

- **4. A Sierpinski háromszög.** Induljunk ki egy zárt háromszöglapból. Az oldalfelezőpontok összekötésével osszuk négy egybevágó részre és a középső negyedét távolítsuk el. Ezt az eljárást folytassuk a megmaradó háromszögekkel "a végtelenségig". Ekkor F , az ismétlődő szabály

"minden háromszöget osszunk négy egybevágó részre és a középső (nyílt) háromszöget töröljük"

Az 1.4 ábrán látható az eljárás működése, miközben az egyik esetben derékszögű, a másikban pedig egyenlő oldalú háromszöget választottunk ki indulásul.

Újra meg újra alkalmazva a szabályt, a kapott halmazoknak $\{S_n; n = 1, 2, \dots\}$ sorozatára

$$(*) \quad S_{n+1} \subset S_n \quad n = 1, 2, \dots$$

hiszen a szabály minden alkalmazásával elveszünk a halmazból.

Ha a (*) érvényes, akkor azt mondjuk, hogy $\{S_n; n = 1, 2, \dots\}$ egymásba skatulyázott halmazok sorozata.

Az $\{S_n; n = 1, 2, \dots\}$ halmazok

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$$

közös részét Sierpinski háromszögnek nevezzük (1.4 ábra).

Az $\mathcal{S}$ Sierpinski háromszögnek a következő, a triadikus Cantor halmazhoz hasonló tulajdonságai vannak.

I. Az $\mathcal{S}$ területe nulla. Ugyanis, az $\{S_n; n = 1, 2, \dots\}$ sorozatban mindegyik halmaz területe az előző területének a háromnegyed része. Így, ha figyelembe vesszük a mértéknek (területnek) azt a tulajdonságát, hogy egy halmaz részének a területe nem lehet nagyobb, mint a halmazé, akkor S területe csak 0 lehet.

II. Az $\mathcal{S}$ számossága megegyezik a $[0, 1]$ számosságával (F. 0.1).

III. Ha $\mathbf{T}$ az egyike azon háromszögeknek, amelyeket nem töröltünk az első iteráció során, akkor az $\mathcal{S} \cap \mathbf{T}$ halmazt lineárisan kétszeresére növelve megkapjuk az egész $\mathcal{S}$ Sierpinski háromszöget. Három, az $\mathcal{S} \cap \mathbf{T}$ halmazzal egybevágó halmaz egyesítésével is megkapjuk a Sierpinski háromszöget. Így, a Sierpinski háromszög is önhasznó.

Az önhasznóság alapján, $\mathcal{S}$ is úgy tekinthető, mint egy szerfelett lyukacsos halmaz, amelyből nagyításkor egyre több és több részlet válik láthatóvá.

IV. Gondolkodjunk el a következő furcsaságon: Ha egy kétdimenziós halmaz (például háromszög) lineárisan r -szeresre változik, akkor a halmaz mértéke (területe) r^2 -szeres lesz; az egydimenziós halmaz mértéke (a hossza) pedig r -szeres.

A Sierpinski háromszög, amint az ábrákból is leolvasható, három feleakkora átmérőjű Sierpinski háromszög uniója. Ezért azt mondjuk, hogy felére változtatva a Sierpinski háromszög lineáris méretét, a Sierpinski háromszög mérete harmadára változik. Ugyanigy láthatjuk, hogy a Sierpinski háromszög kilenc negyedakkora átmérőjű Sierpinski háromszög uniója.

Azt tapasztaljuk, hogy a Sierpinski háromszög NEM úgy viselkedik mint egy kétdimenziós halmaz, hiszen ekkor nem három, hanem négy fele akkora átmérőjű Sierpinski háromszög uniója lenne. Méginkább

nem viselkedik egydimenziós módra.

Ennek alapján intuitíve azt mondjuk, hogy a Sierpinski háromszög nem kétdimenziós, mint például egy tömör háromszöglap, hanem egy és kettő közötti s törtdimenziós.

Mi a törtdimenzió? Milyen információt ad egy halmaz méretére a törtdimenzió? Hol találkozhatunk a "természetben" törtdimenziósnak tekinthető halmazokkal? Ezekre a kérdésekre a 8-10 fejezetben fogunk válaszokat kapni.

- **5. A Koch görbe.** A kiinduló halmaz ezúttal is a $[0, 1]$ intervallum. Az 1.5a ábrán látható sorozat első eleme ("1. iteráció") egy törtvonal, amelyet a sorozat generátorának is nevezünk. Itt F az a szabály, hogy az aktuális ábrán

"minden egyenesszakaszt cseréljünk le a megfelelően kicsinyített generátorral".

Az egymás után kapott K_n ($n = 1, 2, \dots$) törtvonalak hossza ekkor határtalanul növekszik. Valóban, ha az indító egyenesszakasz hossza egységnyi, akkor

$$\text{a generátor hossza } \frac{4}{3}, \text{ az } F(\text{generátor}) \text{ hossza } \frac{1}{3} \frac{4}{3} 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

hiszen a "2. iteráció" úgy jön létre, hogy az "1. iteráció" ábráján minden egyenesszakaszt lecserélünk a generátor egyharmadára. Ugyanigy belátható, hogy

minden egyes lépésnél a kapott törtvonal hossza az előző $\frac{4}{3}$ -a lesz.

Elég hosszú ideig folytatva az iterációt, vagyis elég sokszor alkalmazva az F szabályt, a kapott törtvonal hossza tetszőlegesen nagy lesz.

Vegyük szemügyre közelebbről, hogy mi a végterméke ennek a szerkesztésnek?

A válasz céljából tekintsük a (zárt) háromszögekből álló $\{K_n^*; n = 1, 2, \dots\}$ sorozatot az *1.5b ábrán*. Ezek egymásba skatulyázott halmazok

$$K_{n+1}^* \subset K_n^*; n = 1, 2, \dots$$

és így, éppúgy mint a Sierpinski háromszög vagy a Cantor halmaz esetén, a sorozat

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^*$$

közös részét tekintjük az iteráció végtermékének. Ezt Koch görbének nevezzük.

A szemléletünk alapján és abból, hogy $K_n \subset K_n^*$ úgy érezzük, hogy a $\{K_n; n = 1, 2, \dots\}$ és a $\{K_n^*; n = 1, 2, \dots\}$ ugyanazt a halmazt állítja elő. Ezt később, az 5. fejezetben *bizonyítani* is fogjuk.

Amint láttuk, a Koch görbe egydimenziós mértéke (hossza) tetszőlegesen nagy lehet ("végtelen") és, a $\{K_n^*; n = 1, 2, \dots\}$ háromszögeiből becsülve, kétdimenziós mértéke (területe) csak nulla lehet, mivel

$$K_1^* \text{ területe } \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

és ha K_n^* területe $t(K_n^*)$ akkor

$$t(K_{n+1}^*) = \frac{1}{3} t(K_n^*)$$

vagyis a $\{K_n^*; n = 1, 2, \dots\}$ sorozatban mindegyik halmaz területe az előző területének egyharmada.

Gondolkodjunk el a következő furcsaságon: Ha egy síma görbét arányosan a harmadára kicsinyítünk, akkor a mérete (hossza) is a harmadára változik. A Koch görbénél azt tapasztaljuk, amint az *1.5a ábrából* leolvasható hogy a harmadára kicsinyített Koch görbéből (a szürkével fedett részből) négynek az uniója adja ki az eredeti Koch görbét. Így a Koch görbe arányos méretváltozásra (röviden: *skálaváltozásra*) nem úgy viselkedik, mint egy síma görbe. Ezt a viselkedést is, mint a Sierpinski háromszög hasonló viselkedését, tört értékű dimenzióval fogjuk

jellemezni a 8-10 fejezetben.

Az 1.5c ábrán egy olyan sorozatot mutatunk, amelyben a Koch görbére vezető sorozatot kissé módosítottuk. Az egyenesszakaszokat olykor az 1.5/a ábra generátorának *tükörképével* helyettesítettük. Ez első ízben a 2. iteráció szürkével fedett részében látható. Ilyen módosításokkal különböző *zeg-zugos görbék*, például *tengerpartvonalak* modellezhetők.

- **6. Határtalanul nagyítható faág.** Egy másik példa, a természeti környezetünk önhasznó jellegére az 1.6C ábrán látható faág.

Az 1.6A-B ábrák azt mutatják, hogyan állítható elő egy faág képe iterációval. Kíndulhatunk egy egyenesszakaszból és az F szabály ekkor a következő négy (F_1, F_2, F_3 és F_4) szabály uniója (egyesítése):

F_1, F_2, F_3, F_4 négy olyan transzformáció, amelyek az eredeti ábra lineáris méretét a 0.4-szeresére változtatják, majd az 1.6 ábrákon látható módon, különböző mértékben eltolják illetve elforgatják.

Az F szabály ismétlésével alakul ki a faág.

Az 1.6A ábra részletesen mutatja az első két iterációt abban az esetben amikor egy egyenesszakaszból indulunk ki. Az 1.6B ábra mutatja a szabály további ismétlésével kapott ábrákat. A kialakult faágon az egymással hasonló részek árnyékolásával próbáljuk megmutatni az önhasznó jellegét (1.6C ábra).

A matematika (mátrixok) nyelvén az F szabály megfogalmazása a következő: Legyen

$$F_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

$$F_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$F_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.4 \cos 30^\circ & 0.4 \sin 30^\circ \\ -0.4 \sin 30^\circ & 0.4 \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$F_4(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.4 \cos(-30)^\circ & 0.4 \sin(-30)^\circ \\ -0.4 \sin(-30)^\circ & 0.4 \cos(-30)^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 230 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor F azt jelenti, hogy a fenti négy leképezést egymás után alkalmazzuk az aktuális halmazra, majd az így kapott halmazokat egyesítjük.

A 2. fejezetben meg fogjuk mutatni, hogyan lehet geometriai szabályokat *a matematika nyelvén*, **mátrixokkal** leírni.

- **7. DNS láncsal vezérelt káoszjáték.** A genetika előtérbe kerülésével, manapság közismertnek tekinthető, hogy az öröklődési információk egységes módon DNS (*DNA*) lánc, a kettős spirál formájában vannak tárolva az élőlények sejtjeiben. A DNS molekulák négyféle nukleinsav (*nucleic acid*) láncolatából állanak amelyeket a nevük kezdőbetűjével a **g**, **c**, **a** illetve **t** betűkkel jelölünk és a lánc hossza többmillió nagyságrendű lehet. A lánc hosszabb rövidebb szakaszai az élőlény különböző tulajdonságait reprezentálják.

Az **g**, **c**, **a** és **t** betűk sorozatát (láncolatát) szónak nevezzük. Alul-reprezentált egy szó akkor, ha a láncban nem, vagy alig fordul elő. Mivel a lánc hosszabb rövidebb szakaszai az élőlény különböző tulajdonságait reprezentálják, ezért fontos kérdés:

Vannak-e szignifikánsan alulreprezentált szavak a DNS láncban és melyek azok?

Az adatbankból letölthető a DNS szekvenciális modellje, amely csupán a **g**, **c**, **a** és **t** betűk láncolatát tartalmazza a nekik megfelelő nukleinsavak sorrendjében (*1.7 ábra*). Ez jól használható a szavak eloszlásának számítógépes vizsgálatára, de nem alkalmas arra hogy globális, vizuális

képet adjon a kutatónak az alulreprezentált szavak eloszlásáról mivel a keresendő szavak hossza elenyésző a szekvenciális modell hosszához képest.

A DNS lánc kétdimenziós, vizuálisan könnyen áttekinthető bemutatásának *egyik* módja a DNS vezérelte káoszjáték.

Ez az algoritmus egy egységnégyzetben ábrázolja a DNS láncot. Az egységnégyzet csúcsai a **g**, **c**, **a** és **t** betűket reprezentálják és a DNS láncot ábrázoló pontsorozat szerkesztése a következő: (1.8 ábra).

A négyzet középpontját összekötjük a négyzetnek, a lánc első betűjének megfelelő, csúcspontjával. Ennek a szakasznak a felezőpontja lesz az első betűnek megfelelő P_1 pont.

Ha már első k betűből álló szónak (a lánc k hosszú prefixének) megfelelő $\{P_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ pontokat megszerkesztettük, akkor a lánc $k + 1$ -edik betűjének megfelelő P_{k+1} pont a $[c_{k+1}, P_k]$ szakasz felezőpontja lesz, ahol c_{k+1} jelenti a lánc $k + 1$ -edik betűjének megfelelő csúcsot. (Az 1.8. ábra a **tag...** kezdetű lánc ábrázolását mutatja.) Ezzel minden n betűből álló láncnak egy n -elemű pontsorozat felel meg. Így egy nagyon hosszú, több ezer betűből álló láncnak (szónak) a képe egy mintázattá tömörül (1.9 ábra).

Az itt felvázolt algoritmus a következő szabály ismétlése (iterációja):

$n = 0, 1, 2, \dots$ értékekre vegyük a $[c_{n+1}, P_n]$ szakasz felezőpontját, amikor P_0 a négyzet középpontja, P_n a DNS lánc n -edik betűjének megfelelő pont és c_{n+1} a lánc $n + 1$ -edik betűjét reprezentáló csúcs.

Ily módon a nagyon hosszú betűláncot az egységnégyzetbe képezve (esetleg az egységnégyzet részeit még a kapott ponthalmaz sűrűségének megfelelően színezve) az eljárással kapott ponthalmaz áttekinthető képet ad a szavak eloszlásáról és főleg arról hogy mely szavak azok amelyek csak alig fordulnak elő a láncban, vagyis alulreprezentáltak.

A DNS vezérelte káoszjátékról, a fraktálok kódolása keretében, a 11-12 fejezetben fogunk részletesen beszélni.

- **8. Egy zeg-zugos partvonal mérése.** A geodéziában szokásos eljárás egy partvonal (vagy egy folyó hosszának) mérésére, hogy egymástól ugyanakkora δ távolságban, pontokat (u.n. mérési sarokpontokat) jelölnek ki a partvonal mentén és ezen sarokpontokkal meghatározott sokszög hosszát tekintik a partvonal vagy a folyó közelítő hosszának. Ha az így kijelölt pontok száma $M(\delta) + 1$, akkor a partvonal közelítő hossza

$$(L) \qquad L(\delta) = M(\delta) \cdot \delta$$

és ezt a mérési sokszög hosszának nevezik. Nagyon zeg-zugos partvonalak esetén, mint amilyen például Norvégia, vagy Izland partvonala, vagy egy zeg-zugos folyó, *a mérési sokszög hosszával nem kapjuk meg a partvonal hosszát megfelelő pontossággal.*

Ennek oka egyrészt az, hogy a méréseknél felvehető ugyanazon δ távolságban, de különböző helyeken kijelölve ezeket a mérési pontokat, az (L) értékek lényegesen eltérnek egymástól, ha a partvonal nagyon zegzugos másrészt, ekkor a δ csökkentésével a mérési sokszög hossza lényegesen megváltozik. (1.10 ábra).

Ekkor az $M(\delta)$ és δ^{-1} logaritmusainak a hányadosát is feltüntetik a mérési sokszög hossza mellett, mint a partvonal ill. folyó méretét jellemző számértéket.

Mit mér ez a számérték, amit kompasz dimenzióknak nevezünk? Ezzel a kérdéssel a 11. fejezetben foglalkozunk majd.

- **9. Olykor nem lehet egy fa ágainak a hosszát megmérni.** Az 1.11 ábrán egy nagyon szabályos leegyszerűsített fa szerkesztését látjuk. Az 1. iteráció alkalmazása során az egység hosszúságú fatörzsön két 0,6 hosszúságú ág nőtt, majd mindegyik ágon két két ág nő a 2. iteráció alkalmazásával, amelyek mindegyikének hossza az előző két ág 0,6 része. Az ismétlődő szabállyal

minden lépésben két két újabb ág nő a legfelső ágak csúcsából, amelyek hossza az előző iterációbankinótt ágak hosszának a 0,6 része. Az ágak *összhosszúsága* így alakul:

Legyen H_n az n -ik iterált (az " n szintű fa") ágainak hossza. Ekkor

$$H_1 = 1 + 2 \cdot 0,6$$

$$H_2 = 1 + 2 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,6^2$$

és mivel az ágak *száma* mindig az előző szint ágainak a duplája, az egyes ágak *hossza* viszont az előző szint ágainak 0,6-szorosa

$$H_n = 1 + 2 \cdot 0,6 + 2^2 \cdot 0,6^2 + \dots + 2^{n-1} \cdot 0,6^{n-1} = \frac{1 \cdot 2^n - 1}{0,2}$$

amely egy határtalanul növekedő sorozat.

Az eljárás "végterméke" egy olyan "fa" amely ágainak összhosszúsága bármely számnál nagyobb. Mégis az egész fa elfér például egy 2 sugarú körben.

Ha az arányossági tényezőt 0,4-nek vesszük (0,6 helyett), akkor valamivel alacsonyabb fát kapunk és a fa ágainak összhosszúsága kisebb ötnél.

Az is könnyen belátható a megfelelő geometriai sorok vizsgálatával, hogy a fordulat 0,5-nél áll be. *Ha bármilyen picikét is a 0,5 alá megyünk (vagyis bármilyen $0,5 - \epsilon$ ($\epsilon > 0$) arányossági tényezőt veszünk) akkor a fa ágainak összhosszúsága egy véges pozitív szám alatt marad, viszont ha bármilyen picikét is növeljük a 0,5 arányossági tényezőt (vagyis bármilyen $0,5 + \epsilon$ ($\epsilon > 0$) arányossági tényezőt veszünk) akkor a fa ágainak összhosszúsága határtalanul növekszik.*

Igy megadhatunk két olyan 1.11 ábra típusú sorozatot, amelyek ábrája nem, vagy alig különbözethető meg egymástól és mégis az egyikben a fa ágainak összhosszúsága határtalanul növekszik, a másik sorozatban pedig ez egy adott érték alatt marad.

Ezek után érdemes elgondolkodni a matematikai modell és a valóság kapcsolatán.

****Feladatok és kiegészítések.**

F. 0.1 Számozzuk meg az X ábrán látható módon a Sierpinski háromszög részeit. Ennek alapján igazoljuk, hogy a Sierpinski háromszög pontjainak a számossága megegyezik a Cantor halmazével.

F. 0.2 Igazoljuk, hogy a 6. példában, a faág szerkesztésében, elég hosszú ideig folytatva az iterációt, vagyis elég sokszor alkalmazva az F szabályt, a kapott törtvonal hossza tetszőlegesen nagy lehet.

Próbáljuk megmutatni azt is, hogy a faág kétdimenziós mértéke (területe) csak nulla lehet.

F. 0.3 A számítógép $\cos$ gombjának nyomogatásával az 1. példában meghatároztuk a koszinusz függvény iteráltjait (más szóval azta diszkrét dinamikát amelyet a koszinusz függvény irányít). Most a 2. példa mintájára, geometriai szerkesztéssel fogjuk ezt megadni.

Az 1.14a-b ábrán megmutatjuk az iteráció sorozatok nyilfolyam ábrázolását az

$$f(x) = \cos x$$

esetére, amelyet hasonlóan bármely $f : R \rightarrow R$ esetén alkalmazhatunk.

Az ábrán a kezdőérték $x = 1.18$ (radiánban mérve). Ekkor a $\cos$ gombot benyomva a számológép kijelzőjén $0.38 \dots$ jelenik meg, ami az ábrán $f(x)$ -el van jelölve. $f(x)$ két helyen is leolvasható: először az x -ből kinduló nyilfolyam első töréspontján, amely a koszinusz görbe $x = 1.18$ -hoz tartozó pontja, másodszor pedig az X tengelyen, ahova a 45° egyenes segítségével (a szürke egyenessel) levetítettük ezt az $f(x) = 0.38 \dots$ görbepontot.

Az 1.14b ábra ennek a folytatását mutatja. A $\cos$ gomb második megnyomásának az eredményét az előzővel teljesen megegyező szerkesztés adja, csak most már az $f(x)$ -el jelzett $0.38 \dots$ értékből kindulva. A $\cos$ gomb második megnyomásával kapott $0.93 \dots$ értéket, $f^{[2]}(x)$ -el jelölve, szintén két helyen olvashatjuk le az ábrán s.i.t.

F. 0.4 Legyenek $\{C_i; i = 1, 2, 3, 4\}$ egy négyzet csúcspontjai. Legyen Q a négyzet középpontja és legyen P_1 a $[Q, C_i]$ egyenesszakasz felezőpontja, ahol C_i a négyzetnek véletlenszerűen választott csúcspontja. Majd ismételjük

meg ezt a szerkesztést a P_1 ponttal, vagyis vegyük a $[P_1, C_i]$ egyenesszakasz felezőpontját és ez legyen a P_2 pont s.i.t. Pontosabban, szerkesszük meg a $\{P_n; n = 2, 3, \dots\}$ pontsorozatot, ahol

P_n a $[P_{n-1}, C_i]$ egyenesszakasz felezőpontja, ahol C_i a négyzetnek véletlenszerűen választott csúcspontja.

I. Igaz-e, hogy az így szerkesztett $\{P_n; n = 2, 3, \dots\}$ sorozat idővel betölti az egész négyzetet? Pontosabban szólva, igaz-e hogy kiválasztva a négyzet belsejében egy P pontot és $\epsilon > 0$ -t, van a $\{P_n; n = 2, 3, \dots\}$ sorozatnak legalább egy olyan pontja amelynek a P -től mért távolsága kisebb, mint ϵ ?

II. Legyen a négyzet oldala 1 és $\epsilon = 0.1$. Meg tudjuk-e választani a C_i csúcspontokat úgy, hogy P_{10} legfeljebb 0.1 távolságban legyen egy adott P ponttól?

F. 0.5 Legyenek $\{C_i; i = 1, 2, 3\}$ egy szabályos háromszög csúcspontjai. Végezzük el az F.0.4-el analóg szerkesztést. Betölti-e az így szerkesztett $\{P_n; n = 2, 3, \dots\}$ sorozat az egész háromszöget? (Gondoljunk arra, hogy szabályos háromszög helyett egy négyzet három csúcspontjával megadott háromszög esetében mi a helyzet.)

F. 0.7 Igazoljuk, hogy a Sierpinski háromszögnek mint pontthalmaznak a számossága azonos a $[0, 1]$ intervallumével.

F. 0.8 Módosítsuk a Cantor halmaz szerkesztését úgy, hogy $\frac{1}{3}$ helyett $\frac{1}{2}$ hosszúságú (nyílt) intervallumot vágunk ki a $[0, 1]$ közepéből és ezt ismételjük újra meg újra, vagyis az egyes iterációs lépéseknél a megmaradó egyenesszakaszoknak nem a középső (nyílt) harmadát, hanem a felét vágjuk ki.

Igazoljuk hogy

$$f^{[n]}([0, 1]) \subset f^{[n-1]}([0, 1]); \quad n = 1, 2, \dots$$

ahol, mint eddig, $f^{[n]}$ az f szabály n -edik ismétlése. Mennyi lehet ekkor az $f^{[n]}([0, 1]); \quad (n = 1, 2, \dots)$ halmazok közös részenek hossza?

F. 0.9 Módosítsuk a Cantor halmaz szerkesztését úgy, hogy $\frac{1}{3}$ helyett $\frac{1}{1000}$ hosszúságú (nyílt) intervallumot vágunk ki a $[0, 1]$ közepéből és ezt ismételjük

újra meg újra, vagyis az egyes iterációs lépéseknél a megmaradó egyenesszakaszoknak nem a középső (nyílt) harmadát, hanem csupán az ezredrészét vágjuk ki. Irjuk fel az f szabályt amelyet ekkor ismételünk. Igazoljuk hogy

$$f^{[n]}([0, 1]) \subset f^{[n-1]}([0, 1]); \quad n = 1, 2, \dots$$

ahol, mint eddig, $f^{[n]}$ az f szabály n -edik ismételése. Mennyi lehet ekkor az $f^{[n]}([0, 1])$; ($n = 1, 2, \dots$) halmazok közös részének hossza?

F. 0.10 Hogyan adható meg a 8. példában szereplő fa megépítése egy iterációs sorozattal?

F. 0.11 Az 1.13 ábra szerint kódolt négyzethálók sorozatában töröljük minden olyan négyzetet, amelynek "kódja" a 3 jelet tartalmazza.

I. Mennyi lehet az egységnégyzet ezután megmaradó részhalmazának a területe?

II. Mennyi lehet az egységnégyzet ezután megmaradó részhalmazának a kerülete?

F. 0.12 Az 1.13 ábra szerint kódolt négyzethálók sorozatában töröljük minden olyan négyzetet, amelynek "kódja" a 30 jelet tartalmazza.

I. Mennyi lehet az egységnégyzet ezután megmaradó részhalmazának a területe?

II. Mennyi lehet az egységnégyzet megmaradó részhalmazának a területe, ha a 30 és 03 jeleket (szavakat) tartalmazó összes négyzete töröljük?