

II. FRAKTÁLDIMENZIÓK.

Nullamértékű halmazok.

9.1

A „Fraktáldimenziókról egyszerűen” c. írásban már megvolt az első találkozásunk a boxdimenzióval. Itt egy egyszerű négyzetrácsos eljárást mutattunk, amellyel tömegével gyárthatunk törtdimenziós halmazokat. A következő lépés az önhasonló halmazok boxdimenziójának a meghatározása, amelyekről először megmutatjuk, hogy „területük 0 kerületük ∞ ” vagyis sem területük, sem kerületük nem lehet egy *véges, pozitív szám*.

Felelevenítjük azt a gondolatmenetet, amellyel a bevezető példákban megmutattuk, hogy a Sierpinski háromszög, a Koch görbe és a faág területe csak 0 lehet és ez utóbbiak kerülete pedig ∞ . A csillárra (3.3 ábra) fogjuk alkalmazni ezt a gondolatmenetet, amely szintén egy önhasonló halmaz.

Ha a kiinduló négyzet területe egységyi és $a = 0.6$, $b = 0.2$, akkor az 1. iterációval kapott öt négyzet területe

$$0.6^2 + 4 * 0.2^2 = 0.52$$

és ezután minden iteráció után a 0.52 része lesz a kapott négyzetek összterülete az előzőekhez képest. Ugyanis, a következő, 2. iterációval, az előző iteráció ábrája a nagyobbik négyzetbe kerül 0.6-szoros lineáris méretben és 0.2-szoros lineáris méretben pedig a négy kisebbik négyzetbe (3.3 ábra). *Ugyanez történik minden iteráció után.*

Igy a második iterációval kapott négyzetek összterülete:

$$0.36 * 0.52 + 4 * 0.04 * 0.52 = 0.52^2$$

és ha valamelyik iteráció után a halmaz területe t , akkor a következő iteráció után a területe

$$0.6^2 t + 4 * 0.2^2 t = 0.52 t.$$

Vagyis, minden iterációval kb. feleződik a terület. Így a csillár *területe* is csak nulla lehet.

Az iterációkkal kapott halmazok *kerületét* számolva, az első iteráció $1 + 4$ négyzetének a hossza $4 * 0.6 + 4 * 0.2 * 4 = 5.6$. A második iteráció vonalainak a hosszúsága $0.6 * 5.6 + 4 * 0.2 * 5.6$. Ha valamelyik iteráció után a vonalak hossza h , akkor a következő iteráció után

$$0.6h + 4 * 0.2h$$

lesz a vonalak hossza; vagyis az egymásután következő iterációkkal kapott, négyzetekből álló ábrák vonalainak hosszúsága egy 1.4 hányadosú geometriai sorozatot alkot.

Az 1.4 hányadosú geometriai sorozat elemei viszont tetszőlegesen nagygyá válnak, ha elég messze megyünk a sorozatban.

Node, valóban nulla a szóbanforgó halmazok területe? A válaszhoz szükségünk van a terület definíciójára, vagyis arra, hogy mit nevezünk egy (sik)halmaz területének. Egy ilyen definíció a következő.

Azt mondjuk, hogy az $\{\mathcal{I}_k, \quad k = 1, 2, \dots\}$ téglalapok sorozata lefedi a $\mathcal{B}$ halmazt ha

$$\mathcal{B} \subseteq \cup \mathcal{I}_k ;$$

vagyis $\mathcal{B}$ része az $\{\mathcal{I}_k; \quad k = 1, 2, \dots\}$ uniójának.

Legyen $t(\mathcal{I}_k)$ az $\mathcal{I}_k$ téglalap területe és $\mathcal{B}$ minden lefedéséhez rendeljük hozzá a lefedő téglalapok területeinek összegét, a $\sum t(\mathcal{I}_k)$ számot. Ezt az összeget a $\mathcal{B}$ közelítő területének tekintjük. Ezeknek a közelítő területeknek a minimuma lesz a $\mathcal{B}$ területe. A matematika nyelvén ezt így írhatjuk le

$$(9.1) \quad t[\mathcal{B}] = \inf \left\{ \sum_k t(\mathcal{I}_k) : \mathcal{B} \subseteq \cup \mathcal{I}_k \right\} .$$

Szavakban a (9.1) így fejezhető ki: Ha tekintjük a $\mathcal{B}$ -nek az összes lehetséges lefedését téglalapokkal és minden lefedéshez hozzárendeljük a $\sum t(\mathcal{I}_k)$ számot, akkor az így kapott számhalmaz alsó határa lesz $t[\mathcal{B}]$, a $\mathcal{B}$ területe.

Úgy gondolom, hogy ez a definíció összhangban van a területről szóló elképzeléseinkkel. A (9.1) a matematika nyelvén fejezi ki azt, amit területnek

gondolunk. Végrehajtása azonban problematikus. Például, Hogyan állíthatjuk elő az *összes* lehetséges lefedést?

Egy szokásos területmérési eljárás a következő. Egy négyzethálót fektetünk rá a megméréndő halmazra (ábrára) és megszámloljuk azokat a négyzeteket, amelyek fedik a $\mathcal{B}$ halmaz valamelyik részét, vagyis azokat a négyzeteket, amelyeknek közös része a halmazzal *nem üres*.

Ha a négyzetháló elemeinek oldaléle δ és $N_\delta(\mathcal{B})$ azoknak a négyzeteknek a száma, amelyek fedik a halmaz (ábra) valamelyik részét, akkor az *így* lefedő négyzetek összterülete

$$(9.2) \quad N_\delta(\mathcal{B})\delta^2$$

és ezt a $\mathcal{B}$ közelítő területének tekintjük, ha δ elég kicsi (*9.1 ábra*).

MEGJEGYZÉS. Figyeljük meg a négyzethálós területmérési eljárás kapcsolatát a "Fraktáldimenziókról egyszerűen" c. négyzethálós modellel.

A négyzethálós eljárást alkalmazva a Sierpinski háromszögre (*5.2 ábra*)

$$\text{ha } \delta = \frac{1}{2} \quad \text{akkor } N_\delta(\mathcal{B}) = 3$$

$$\text{ha } \delta = \frac{1}{4} \quad \text{akkor } N_\delta(\mathcal{B}) = 3 * 3 = 9$$

$$\text{ha } \delta = \frac{1}{8} \quad \text{akkor } N_\delta(\mathcal{B}) = 3^3$$

és a szabály folytatásával, teljes indukcióval, ha $\delta = \frac{1}{2^n}$, akkor $N_\delta(\mathcal{B}) = 3^n$. Ebből

$$N_\delta(\mathcal{B})\delta^2 = 3^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = 0.75^n$$

ami tetszőlegesen közel kerül a nullához, ha n elég nagy.

Azt kaptuk eredményül, hogy a speciális, négyzetrácsos lefedések területe tetszőlegesen kicsi lehet, ami *a terület definíciója alapján azt jelenti, hogy a Sierpinski háromszög területe nulla*.

A Koch görbe vagy a csillár területe is nulla lesz ezzel az eljárással.

Nullamértékű halmaznak fogjuk nevezni azokat a halmazokat, amelyek területe nulla. Ha a négyzetrácsos méréssel kapott $(9,2)$ értékek tetszőlegesen kicsivé válnak, vagyis $N_\delta(\mathcal{B})\delta^2 \rightarrow 0$ ha $\delta \rightarrow 0$, akkor a halmaz nullamértékű (**Miért?**).

9.2

A területfogalom alapvető tulajdonságai a következők:

Jelöljük egy $\mathcal{B}$ halmaz területét $t(\mathcal{B})$ -vel. Ekkor

- I. $t[\mathcal{B}] \geq 0$.
- II. $t[\emptyset] = 0$ ($\emptyset$ az üres halmaz).
- III. Ha $\mathcal{B}_i$; $i = 1, 2, \dots, N$ diszjunkt halmazok, akkor

$$t[\cup_{i=1}^N \mathcal{B}_i] = \sum_{i=1}^N t[\mathcal{B}_i].$$

Ezek közül csak a III. nem nyilvánvaló. Az I.- III. tulajdonságokat mértékaxiómáknak nevezzük.

Tétel. Az I.-III.-ből következik

1. Ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, akkor $t[\mathcal{B}] \leq t[\mathcal{C}]$.
2. Tetszőleges $\mathcal{B}_i$; $i = 1, 2, \dots, n$ (korlátos zárt) halmazokra

$$(9.3) \quad t[\cup_{i=1}^n \mathcal{B}_i] \leq \sum_{i=1}^n t[\mathcal{B}_i].$$

Bizonyítás. 1. Ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, akkor

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup (\mathcal{C} - \mathcal{B}) \text{ és } \mathcal{B}, (\mathcal{C} - \mathcal{B}) \text{ diszjunkt halmazok.}$$

Ezért a II. alapján

$$t[\mathcal{C}] = t[\mathcal{B}] + t[(\mathcal{C} - \mathcal{B})] \geq t[\mathcal{B}].$$

2. $n = 2$ -re,

$$t[\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2] = t[\mathcal{B}_1] \cup t[(\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1)] \leq t[\mathcal{B}_1] + t[\mathcal{B}_2]$$

mivel $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1$ diszjunkt halmazok és $\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$.

Ha $n = 3$ akkor

$$t[\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3] = t[(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \cup \mathcal{B}_3] \leq t[\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2] + t[\mathcal{B}_3] \leq t[\mathcal{B}_1] + t[\mathcal{B}_2] + t[\mathcal{B}_3]$$

mivel $n = 2$ -re éppen most igazoltuk a (9.3) egyenlőtlenséget.

Ugyanígy következik $n - 1$ -ről n -re, $n > 3$ esetén is, a(9.3) egyenlőtlenség.

A területmérésnek alapvető tulajdonsága még az is, hogy ha egy $\mathcal{H}$ halmaz (alakzat) "lineáris mérete r -szeresére változik", akkor az így kapott, a $\mathcal{H}$ -val hasonló $\mathcal{H}^*$ halmaz (alakzat) területe a $\mathcal{H}$ területének az r^2 -szerese lesz. Erről szól majd a következő **Tétel**.

(Emlékeztetünk arra, hogy $\mathcal{H}$ "lineáris mérete r -szeresére változik" azt jelenti, hogy van olyan F hasonlósági leképezés r hasonlósági tényezővel, hogy

$$\mathcal{H}^* = F(\mathcal{H})$$

(ld. 2.1). Hétköznapi nyelven ez azt jelenti, hogy $\mathcal{H}^*$ a $\mathcal{H}$ olyan arányosan kicsinyített/nagyított mása, amelynek az átmérője a $\mathcal{H}$ átmérőjének az r -szerese.)

Tétel. Ha F egy hasonlósági leképezés r hasonlósági tényezővel és $\mathcal{B}$ egy kompakt halmaz, akkor

$$t[F(\mathcal{B})] = r^2 t(\mathcal{B}).$$

Bizonyítás. Ha $F : \mathbf{R}^2 \Rightarrow \mathbf{R}^2$ egy hasonlósági leképezés r hasonlósági tényezővel és $\mathcal{I}$ egy téglalap, akkor nyilván

$$(9.4) \quad t[F(\mathcal{I})] = r^2 t[\mathcal{I}]$$

Ha $\cup \mathcal{I}_k$ a $\mathcal{B}$ halmaz egy lefedése, vagyis $\mathcal{B} \subset \cup \mathcal{I}_k$, akkor $\cup F(\mathcal{I}_k)$ az $F(\mathcal{B})$ halmaz egy lefedése. Ugyanis ekkor

$$(9.5) \quad F(\mathcal{B}) \subset F(\cup \mathcal{I}_k) = \cup F(\mathcal{I}_k).$$

A (9.4) és (9.5) alapján

$$(*) \quad t[F(\mathcal{B})] \leq t[(\cup F(\mathcal{I}_k))] \leq \sum t(F(\mathcal{I}_k)) = r^2 \sum t(\mathcal{I}_k)$$

amiből már következik, hogy

$$(9.6) \quad t[F(\mathcal{B})] \leq r^2 t[\mathcal{B}],$$

(miért nem következik *egyenlőség* a $(*)$ -ból?).

Mivel az $F(\mathcal{B})$ halmaz minden $\cup \mathcal{I}_k^*$ lefedéséhez is tartozik a $\mathcal{B}$ -nek egy lefedése, mégpedig r^{-2} tényezővel, ezért (8.6)-ben egyenlőség áll.

Részletesebben:

Minden hasonlósági leképezésnek van F^{-1} inverze, amely hasonlósági leképezés r^{-1} hasonlósági tényezővel. Ha F^{-1} -el visszük végig a fenti gondolatmenetet, akkor

$$t[F^{-1}(F(\mathcal{B}))] \leq r^{-2} t[F(\mathcal{B})]$$

vagyis

$$(9.7) \quad r^2 t[\mathcal{B}] \leq t[F(\mathcal{B})]$$

A (9.6) és (9.7) összehasonlításából következik

$$t[F(\mathcal{B})] = r^2 t[\mathcal{B}].$$

9.3

Pusztán a hasonló halmazok területeinek fenti tulajdonsága és a mértékaxiómák alapján, *a terület közvetlen kiszámítása nélkül* is eldönthetjük egy önazonló halmazról azt hogy nullamértékű-e.

Legyen $\{F_i; \quad i = 1, 2, \dots, K\}$ az $\mathcal{A}$ önazonló halmazt meghatározó függvényrendszer $\{r_i; \quad i = 1, 2, \dots, K\}$ hasonlósági tényezőkkel. Ekkor

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^K F_i(\mathcal{A})$$

és így

$$t[\mathcal{A}] = t \left[\bigcup_{i=1}^K F_i(\mathcal{A}) \right] \leq \sum_{i=1}^K t[F_i(\mathcal{A})] = t[\mathcal{A}] \sum_{i=1}^K r_i^2.$$

Ebből következik, hogy ha $0 < t[\mathcal{A}] < \infty$ akkor

$$(9.8) \quad \sum_{i=1}^K r_i^2 \geq 1.$$

Ezzel bebizonyítottuk a következőt

Tétel. Ha

$$(9.9) \quad \sum_{i=1}^K r_i^2 < 1$$

ahol r_i az F_i kontrakivitási tényezője, akkor $t(\mathcal{A}) = 0$.

MEGJEGYZÉS. $t(\mathcal{A})$ nem lehet végtelen, mivel $\mathcal{A}$ korlátos.

Ha az $\{F_i(\mathcal{A}); \ i = 1, 2, \dots, K\}$ halmazok csupán egy nullamértékű halmazban fedik egymást, akkor mennyinek kell lenni $\sum_{i=1}^K r_i^2$ értékének, hogy $t(\mathcal{A}) = 0$ legyen? (F 8.7)

Példák.

1. A Sierpinski háromszög (5.2 ábra) nullamértékű, hiszen ekkor

$$r_i = 0.5 \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\text{és } 3 * 0.5^2 < 1.$$

2. A Koch görbe (1.5 ábra) nullamértékű, hiszen ekkor

$$r_i = \frac{1}{3} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{és } 4 * \frac{1}{3}^2 < 1.$$

3. A csillár (3.3 ábra) nullamértékű, ha $a = 0.6, b = 0.2$. Hiszen ekkor

$$r_1 = 0.6, \ r_i = 0.2 \quad (i = 2, 3, 4, 5)$$

$$\text{és } 0.6^2 + 4 * 0.2^2 < 1.$$

4. A csillár (3.3 ábra) akkor is nullamértékű, ha $a = 0.9$, $b = 0.05$, vagy $a = 0.1$, $b = 0.45$.

A csillár az a, b bármely választása mellett nullamértékű (F 9.3).

Hasonlóan állapítható meg az önhasználó halmazok többségéről, hogy az nullamértékű, hiszen a legtöbb esetben

$$\sum_{i=1}^K r_i^2 < 1.$$

Összefoglalva a mondottakat, az önhasználó halmazok tipikus tulajdonsága, hogy nullamértékűek. Egy önhasználó halmaznál az a ritkaság ha nem nullamértékű. Ilyen ritkaság a négyzet, vagy háromszöglap. Az eddig megismert "érdekes" önhasználó halmazok, a Sierpinski háromszög, a Koch görbe, a csillár nagyon különböző méretűnek látszanak, lényegesen nagyobb helyet foglalnak el a síkon, mint néhány pont, vagy egyenesszakasz, mégis nullamértékűek.

Hasonló általános következtetések adhatók meg a négyzethálós eljárással kapott lyukacsos halmazok méretére vonatkozóan is (ld. 8.1)

A továbbiakban hosszúság, terület ill. térfogat helyett a mérték kifejezést is fogjuk használni.

Feladatok és további információk

F 9.1 Ha a (9.2) négyzethálós eljárással megmérjük egy eléggé nagyméretű térképen Norvégia vagy Izland területét, arra a meglepő eredményre jutunk, hogy a *zeg-zugos peremű* idomok területének mérése *problematicus* ezzel az egyszerű szabállyal, mivel viszonylag sűrű négyzethálós kapott (9,2) értékek is még lényegesen eltérnek egymástól.

F 9.2 Tekintsük a következő általános Sierpinski háromszög szerkesztést: Egy általános háromszöget négy egybevágó részre bontunk és eldobjuk a

középső *nyílt* negyed, majd az így megmaradt háromszögeket is négy egybevágó részre bontunk és eldobjuk a középső *nyílt* negyedüket s.i.t.

a/ Igazoljuk, hogy ekkor is nullamértékű halmazt kapunk.

b/ Írjuk fel az így kapott (egymásba skatulyázott) síkidomok kerületei mérőszámainak a sorozatát. Korlátos ez a sorozat?

c/ Igazoljuk, hogy ez a szerkesztés Sierpinski háromszögre vezet.

F 9.3A Igazoljuk, hogy a csillár (3.3 ábra) önhasznós. Írjuk fel a csillárt előállító iterált függvényrendszert.

F 9.3B a/ Igazoljuk, hogy a csillár az a, b minden olyan választása mellett nullamértékű amikor $a + 2b = 1$.

b/ Adjuk meg a csillár IFS első három iterációját, amikor

$$a = 0.9, b = 0.05, \text{ vagy } a = 0.1, b = 0.45.$$

Igazoljuk, hogy ekkor a csillárt alkotó egyenesszakaszok összhosszúsága a végtelenhez tart.

F 9.4 Érvényes-e a (9.9) feltétel akkor is, ha $\{\{F_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}\}$ affin NEM hasonlósági leképezések?

F 9.5 Ha az $\{F_i(\mathcal{A}); \quad i = 1, 2, \dots, K\}$ halmazok csupán egy nullamértékű halmazban fedik egymást, akkor mennyinek kell lenni $\sum_{i=1}^K r_i^2$ értékének, hogy $t(\mathcal{A}) = 0$ legyen?

F 9.6 A négyzet(lap) és a háromszög(lap) példa olyan önhasznós halmazokra, amelyeknek mértéke pozitív (vagyis NEM nullamértékű).

Igazoljuk hogy ekkor a (9.8) érvényes.

F 9.7 Igaz-e, hogy a 8.5. ábra (világos) halmazainak a területe is csak nulla lehet?

F. 9.8 Töröljük a 12.5 ábra szerint kódolt négyzetből mindazokat a négyzeteket, amelyek kódjában a 3 jel szerepel. Igazoljuk, hogy egy Sierpinski háromszöget kapunk.

F.9.9 Legyen

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5a \end{pmatrix}.$$

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3(x) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5a \\ 0.5a \end{pmatrix}$$

$$F_4(x) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2.$$

Írjuk fel a következő IFS attraktorát és határozzuk meg a boxdimenzióját:

I. $(F_1 \ R^2)$

II. $(F_1, F_2 \ R^2)$

III. $(F_1, F_2, F_3 \ R^2)$

IV. $(F_1, F_2, F_3, F_4 \ R^2)$

F.9.10 Hasonlóságon alapuló igazolása a Pitagorász Tételnek. A 9.xa és 9.xb ábrák alapján adjuk meg a Pitagorász Tétel bizonyítását.

A box-dimenzió másképpen

10.2

Nemcsak négyzethálós lefedéseket használhatunk a boxdimenzió meghatározására.

Egy $\mathcal{B}$ halmaz δ -lefedése legfeljebb δ átmérőjű $\mathcal{H}_k$; $k = 1, 2, \dots$ halmazoknak olyan sorozata amelyre

$$\mathcal{B} \subseteq \bigcup_k \mathcal{H}_k.$$

Minden δ -hoz nyilván van olyan δ -lefedés, amely a legkevesebb halmazból áll. Ezt minimális δ -lefedésnek nevezzük.

Legyen $N_\delta^*(\mathcal{B})$ a $\mathcal{B}$ halmaz minimális δ -lefedése. Ekkor a $\mathcal{B}$ halmaz box-dimenziója (*capacity dimension, box-counting dimension*)

$$(BD^*) \quad s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta}.$$

A box-dimenziót Minkovski dimenzióknak is nevezik.

A (BD^*) csupán abban különbözik a (BD) formulától, hogy itt az N_δ helyére N_δ^* kerül. Az N_δ függhet attól, hogyan helyezzük a négyzetrácsra a halmazt. Az N_δ^* egyértelmű.

Meg fogjuk mutatni, hogy (BD) és (BD^*) ugyanazt az értéket adja. A bizonyítás kulcsa a 10.1 ábra, amely azt mutatja, hogy ha egy δ -élű $\mathcal{N}_\delta$ négyzetlap belemetsz egy δ -átmérőjű $\mathcal{H}_\delta$ halmazba, akkor $\mathcal{N}_\delta + \delta$, a δ -val növelt négyzetlap, tartalmazza a $\mathcal{H}_\delta$ halmazt.

Igy, ha meg tudunk adni N_δ^* számú δ átmérőjű halmazt amely lefedi a $\mathcal{B}$ -t, akkor a δ élű négyzethálóból $9N_\delta^*$ négyzet már biztosan lefedi. Ennek alapján

$$(10.2) \quad \frac{\log N_\delta(\mathcal{B})}{-\log \delta} \leq \frac{\log 9 \cdot N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta}$$

ahol, mint eddig, N_δ a négyzetháló azon négyzeteinek a száma, amelyek belemetszenek a $\mathcal{B}$ halmazba.

A (11.1) érvényes akkor is, amikor N_δ^* egy minimális δ -lefedés. Ekkor nyilván még

$$(10.3) \quad N_{\sqrt{2}\delta}^* \leq N_\delta$$

is érvényes, mivel a δ élű négyzetháló egy $\sqrt{2}\delta$ -lefedés. A (10.2) és (10.3) összevetéséből

$$(10.4) \quad \frac{\log N_{\sqrt{2}\delta}^*(\mathcal{B})}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_\delta(\mathcal{B})}{-\log \delta} \leq \frac{\log 9 \cdot N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta}.$$

A (10.4) alapján meg fogjuk mutatni, hogy

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(\mathcal{B})}{-\log \delta}$$

és ezzel igazoljuk, hogy a (BD) formulában N_δ értéket téve az N_δ^* helyére ugyanazt az eredményt kapjuk. Valóban

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\sqrt{2}\delta}^*(\mathcal{B})}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\sqrt{2}\delta}^*(\mathcal{B})}{-\log \sqrt{2}\delta} \frac{\log \sqrt{2}\delta}{\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta}.$$

és

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log 9 \cdot N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(\mathcal{B}) + \log 9}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta}$$

MEGJEGYZÉS. A bizonyítást részben a *10.1 ábra* szemléletén alapul. A bizonyításnak ezt a részét is a matematika nyelvén végezhetjük el a következők alapján.

1. Segédteétel. Ha $\mathcal{H}_\delta \cap \mathcal{N}_\delta \neq \emptyset$ akkor $\mathcal{H}_\delta \subset \mathcal{N}_\delta + \delta$.

Bizonyítás. Legyen

$$x \in \mathcal{H}_\delta \text{ és } z \in \mathcal{H}_\delta \cap \mathcal{N}_\delta,$$

akkor $d[x, z] \leq \delta$ mivel $\mathcal{H}_\delta$ átmérője δ . Ebből következik, hogy $x \in \mathcal{N}_\delta + \delta$.

Definíció. Négyzetrácsnak nevezzük az R^2 egy koordináta-rendszerében az

$$\mathcal{N}_{kn} = \{k\delta \leq x \leq (k+1)\delta, \quad n\delta \leq y \leq (n+1)\delta; k, n = 1, 2, \dots\}$$

négyzetek halmazát.

2. Segédteétel. A $\max$ távolságban mérve, $\mathcal{N}_\delta + \delta$ a δ élű négyzethálónak az *10.1 ábrán* látható része.

Bizonyítás. Ez a

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

egyenlőtlenségből következik.

**

A felsorolt példákban a 9.1(BD) határértéket csupán egy alkalmas $\{\delta_k; \delta_k \Rightarrow 0\}$ sorozat mentén számítottuk ki. Így felmerül a kérdés: jogos-e az így kapott értéket a $\mathcal{B}$ halmaz box-dimenziójának tekinteni? Másszóval, az így kiszámított érték azonos-e a 9.1 (BD) határértékkel?

Tétel. Legyen $\{c^k; k = 1, 2, \dots\}$ egy nullához konvergáló geometriai sorozat és

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{c^k}(\mathcal{B})}{-\log c^k}.$$

Ekkor s a $\mathcal{B}$ box-dimenziója.

Bizonyítás. Ha N_δ^* a minimális δ -lefedés elemeinek a száma és $\delta > \delta'$, akkor $N_{\delta'}^* \geq N_\delta^*$. (Ugyanis, ha $\delta > \delta'$, akkor a δ' -lefedés minden elemét lefedi egyetlen δ -átmérőjű halmaz. Így a $\mathcal{B}$ halmazt lefedi $N_{\delta'}^*$ számú δ -átmérőjű halmaz és így $N_{\delta'}^* \geq N_\delta^*$.) Legyen k olyan, hogy $c^{k+1} < \delta \leq c^k$, ekkor

$$\frac{\log N_{c^k}^*(\mathcal{B})}{-\log c^{k+1}} \leq \frac{\log N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{c^{k+1}}^*(\mathcal{B})}{-\log c^k},$$

továbbá

$$-\log c^k = -\log c^{k+1} + \log c.$$

**

10.3 Önhasonló halmazok box-dimenziója

Önhasonló halmazok boxdimenzióját számos esetben egyszerű formulával határozhatjuk meg. Ezt a formulát úgy kaphatjuk meg, hogy a boxdimenzió meghatározására, a *halmazzal hasonló* δ -lefedéseket használunk

Ezt először ismert példákon mutatjuk be.

1. **Cantor halmaz.** A Cantor halmaz két, harmadakkora Cantor halmaz uniója. Így $\frac{1}{3}$ átmérőjű Cantor halmazból pontosan kettő fedi le a $\mathcal{C}$ Cantor halmazt. Mindegyik harmadakkora Cantor halmaz újra két harmadakkora

Cantor halmaz uniója. Így $\frac{1}{9}$ átmérőjű Cantor halmazból pontosan négy fede le a $\mathcal{C}$ Cantor halmazt. Tovább folytatva ezt a gondolatmenetet, teljes indukcióval $n = 3, 4, \dots$ értékekre, 3^{-n} átmérőjű Cantor halmazból pontosan 2^n fede be az (egy átmérőjű) Cantor halmazt. Így a megfelelő átmérőjű Cantor halmazokkal lefedve a $\mathcal{C}$ Cantor halmazt ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a négyzetrácsos lefedéssel

$$s = \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63092 \dots$$

2 Sierpinski háromszög. A Sierpinski háromszög három (lineárisan) felére zsugorított Sierpinski háromszög uniója. Egy ilyen, $\frac{1}{2}$ skálaváltozással kapott Sierpinski háromszög a szürkével fedett rész a *10.3 ábrán*. A (lineárisan) negyedére zsugorított Sierpinski háromszögből pontosan kilenc fede le a Sierpinski háromszöget. Egy ilyen, $\frac{1}{4}$ skálaváltozással kapott Sierpinski háromszög a sötétszürkével fedett rész a *10.3 ábrán*. A Sierpinski háromszög kilenc sötétszürke Sierpinski háromszög uniója.

Teljes indukcióval kapjuk, hogy a $\frac{1}{2^n}$ skálaváltozással kapott Sierpinski háromszögekből, 3^n darab uniójaként áll elő a Sierpinski háromszög ($n = 3, 4, \dots$).

Ezeket az értékeket helyettesítve (BD)-be, a box-dimenzió

$$s = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58496 \dots$$

Így a megfelelő átmérőjű Sierpinski háromszögekkel lefedve az $\mathcal{S}$ Sierpinski háromszöget ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a négyzetrácsos lefedéssel.

4. Koch görbe. A Koch görbe négy, harmadára zsugorított ($\frac{1}{3}$ skálaváltozás) Koch görbe uniója és a kilencedre zsugorított ($\frac{1}{3^2}$ skálaváltozás) Koch görbéből pontosan 4^2 fede le a Koch görbét (*10.2 ábra*). Újra meg újra megismételve ezt a gondolatmenetet a Koch görbe egyre kisebb, a görbével hasonló részeire, (teljes indukcióval) arra az eredményre jutunk, hogy a $\frac{1}{3^n}$ skálaváltozással kapott 4^n Koch görbe uniójaként áll elő a Koch görbe.

Ezeket, vagyis $\delta = 3^{-n}$ és $N_\delta(\mathcal{B}) = 4^n$ értékeket helyettesítve (BD)-be, a box-dimenzió

$$s = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26186 \dots$$

Vegyük észre, hogy a következő **szabályt** alkalmaztuk a fenti példákban:

Legyen $\mathcal{A}$ az $\{F_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ hasonlósági leképezések IFS invariáns halmaza. Legyen mindegyik F_i kontraktivitási (hasonlósági) tényezője r . Ekkor

$$(DIM) \quad \dim \mathcal{A} = \frac{\log N}{-\log r}$$

ahol N az F_i hasonlósági leképezések száma.

A szabály bizonyítása. Azt kell bizonyítani, hogy $\mathcal{A}$ -val hasonló lefedések *minimális lefedések*.

Legyen

$$(DIS) \quad F_i(\mathcal{A}) \cap F_j(\mathcal{A}) = \emptyset \quad i \neq j.$$

A szabályt arra az esetre bizonyítjuk, amikor $\mathcal{C} = \emptyset$. Legyen N_r^* az $\mathcal{A}$ minimális r -lefedése. Ekkor a lefedő legfeljebb r átmérőjű halmazok mindegyikére alkalmazva valamelyik F_i ($i = 1, 2, \dots, N$) leképezést, az $F_i(\mathcal{A})$ ($i = 1, 2, \dots, N$) halmaznak egy minimális r^2 -lefedését kapjuk. Ekkor

$$(10.5) \quad N_{r^2}^*(F_i(\mathcal{A})) = N_r^*(\mathcal{A}).$$

Esetünkben N diszjunkt egybevágó $F_i(\mathcal{A})$ uniója az $\mathcal{A}$. Mivel $\{F_i(\mathcal{A}); \quad i = 1, 2, \dots, N\}$ korlátos és zárt halmazok, ezért az $\{F_i(\mathcal{A}); \quad i = 1, 2, \dots, N\}$ halmazok egymástól pozitív távolságban vannak. Ha $2r$ kisebb, mint ezeknek a távolságok bármelyike, akkor az $\{F_i(\mathcal{A}); \quad i = 1, 2, \dots, N\}$ r -lefedései is diszjunkt halmazok. Ezért

$$(10.6) \quad N_{r^2}(\mathcal{A}) = N \cdot N_{r^2}(F_i(\mathcal{A})).$$

A (10.5) és (10.6) összevetéséből

$$N_{r^2}^*(\mathcal{A}) = N \cdot N_r^*(\mathcal{A}).$$

(Vigyünk végig ezt a gondolatmenetet a 10.2 és a 10.3 ábrákon.)

Ugyanezt a gondolatmenetet megismételve bármelyik $F_i(\mathcal{A})$ -val

$$N_{r^3}^*(\mathcal{A}) = N^2 \cdot N_r(\mathcal{A}).$$

Megismételve ezt a gondolatmenetet újra meg újra az $\mathcal{A}$ -val hasonló egyre kisebb átmérőjű részekkel (teljes indukcióval)

$$(10.7) \quad N_{r^{n+1}}(\mathcal{A}) = N^n \cdot N_r(\mathcal{A}) \quad n = 1, 2, \dots$$

A (10.7) alapján

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{A} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N_{r^{n+1}}^*(\mathcal{A})}{-\log r^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log N + \log N_r^*(\mathcal{A})}{-(n+1) \log r} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N + \frac{\log N_r^*(\mathcal{A})}{n}}{-\frac{n+1}{n} \log r} = \frac{\log N}{-\log r}. \end{aligned}$$

MEGJEGYZÉS. I. Vegyük észre, hogy

$$s = \dim \mathcal{A}$$

pontosan akkor ha s az

$$(10.8) \quad Nr^s = 1$$

egyenlet megoldása.

II. Nyilván az $\mathcal{A}$ 1-elemű $|\mathcal{A}|$ -lefedése minimális és maga $\mathcal{A}$ egy ilyen lefedés. Ezután $r|\mathcal{A}|$ átmérőjű minimális lefedése $(F_i(\mathcal{A}))$ -nak $(F_i(\mathcal{A}))$ (1-elemű!) s.i.t. Így nem meglepő a fenti eredmény.

III. A Sierpinski háromszögben és a Koch görbén (DIS) nem üres, hanem egy 3 illetve 4 pontból álló halmaz. Ha (DIS) nem üres, hanem egy véges halmaz, akkor is érvényes (DIM) (**F.10.15, F.10.16)

A (DIM) formula közvetlen általánosítása arra az esetre, amikor a kontraktivitási tényezők NEM egyenlők:

Ha $\{F_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ hasonlósági leképezések r_i ; $(i = 1, \dots, N)$ kontraktivitási tényezőkkel, akkor a fenti feltételek mellett az $\mathcal{A}$ box-dimenziója az

$$\sum_{i=1}^N r_i^s = 1$$

egyenlet s megoldása.

Példák. A Sierpinski háromszögre

$$\frac{\log N}{-\log r} = \frac{\log 3}{-\log 0.5} = 1.585 \dots$$

A Koch görbére

$$\frac{\log N}{-\log r} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618 \dots$$

A faág box-dimenziója

$$\frac{\log N}{-\log r} = \frac{\log 4}{-\log 0.4} = 1.513 \dots$$

A csillár s box-dimenziójára (ha $a = 0.5, b = 0.25$) a (10.7) alapján

$$0.5^s + 4 \cdot 0.25^s = 1$$

amiből $s = 1.35701$.

10.4

A box-dimenzió alapvető tulajdonságai:

- a/ Monoton. Ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ akkor $\dim \mathcal{B} \leq \dim \mathcal{C}$.
- b/ Stabilis. $\dim (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \max\{\dim \mathcal{B}, \dim \mathcal{C}\}$.
- c/ Ha F hasonlósági leképezés, akkor $\dim F(\mathcal{C}) = \dim \mathcal{C}$.
- d/ Ha $\mathcal{B}$ tartalmaz egy nyílt körlapot, akkor $\dim \mathcal{B} = 2$.

Bizonyítás.

- a/ és d/ nyilvánvaló
- b/ következik abból, hogy

$$\max\{N_\delta(\mathcal{B}), N_\delta(\mathcal{C})\} < N_\delta(\mathcal{B}) + N_\delta(\mathcal{C}) \leq 2 \cdot \max\{N_\delta(\mathcal{B}), N_\delta(\mathcal{C})\}.$$

• $c/$

$$\frac{\log N_\delta(F(\mathcal{B}))}{-\log \delta} = \frac{\log N_{r\delta}(\mathcal{B})}{-\log r\delta} \cdot \frac{\log r\delta}{\log \delta}$$

és

$$\frac{\log N_{r\delta}(\mathcal{B})}{-\log r\delta} \rightarrow s \quad \frac{\log r\delta}{\log \delta} \rightarrow 1.$$

10.5

Pontsorozatok box-dimenziója.

Mivel a számegyenesen minden δ átmérőjű halmaz lefedhető egy δ hosszúságú zárt intervallummal, ezért a számegyenesen N_δ^* megegyezik a halmazt lefedő minimális számú δ hosszúságú zárt intervallumok számával.

**

1. A $[0, 1]$ racionális pontjainak halmaza egydimenziós. Ugyanis a racionális pontokat lefedő δ hosszúságú intervallumok száma, N_δ , megegyezik az egész $[0, 1]$ intervallumot lefedő δ hosszúságú intervallumok számával *bármely* $\delta > 0$ esetén.

2. A $\{2^{-n}; n = 1, 2, \dots\}$ pontsorozat boxdimenziója 0. Ugyanis, ha $\delta = 2^{-k} - 2^{-(k+1)}$ (ahol k fix pozitív egész szám) akkor az $\{2^{-1}, 2^{-2}, \dots, 2^{-k}\}$ véges sorozat lefedéséhez k darab δ élhosszúságú intervallum *szükséges*, mivel a sorozat első k eleme δ -nál nagyobb távolságra van egymástól. Viszont $k + 2$ darab δ élhosszúságú intervallum ekkor már *elegendő* a teljes sorozat lefedéséhez. Ugyanis

$$\delta = 2^{-k} - 2^{-(k+1)} = 2^{-(k+1)}$$

és egy $2^{-(k+1)}$ hosszú intervallum lefedti az

$$\frac{1}{2^{k+2}}, \frac{1}{2^{k+3}}, \dots$$

sorozatot.

A mondottak alapján

$$\frac{\log k}{(k+1) \cdot \log 2} \leq \frac{\log N_\delta}{-\log \delta} \leq \frac{\log(k+2)}{(k+1) \cdot \log 2}$$

amiből már következik, hogy

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta} = 0$$

3. Az $\{n^{-1}; n = 1, 2, \dots\}$ pontsorozat boxdimenziója 0.5. Ugyanis, ha $\delta = k^{-1} - (k+1)^{-1}$ (ahol k fix pozitív egész szám) akkor az $\{1, 2^{-1}, \dots, k^{-1}\}$ véges sorozat lefedéséhez k darab δ élhosszúságú intervallum szükséges. A pontsorozat maradék része a $[0, (k+1)^{-1}]$ intervallumban van amelyet k darab δ hosszúságú intervallum már lefed. Hiszen

$$\delta = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Ezért

$$\frac{\log k}{2 \cdot \log(k+1)} \leq \frac{\log N_\delta}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{2 \cdot \log k}$$

amiből állításunk már következik, hiszen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{2 \cdot \log(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2k}{2 \cdot \log k} = 0.5.$$

A konvergens pontsorozatokból vett példák az a tanulsága, hogy a boxdimenziójuk a $[0, 1]$ -ben van és ha széjjel húzzuk a pontsorozat pontjait, akkor a pontsorozat boxdimenziója nagyobb lesz. Így, a boxdimenzió a "konvergencia sebességét" méri.

Feladatok és további információk.

F 10.1 Igazoljuk, hogy minden véges halmaz box-dimenziója nulla.

F 10.1B Valakinek kétsége támad a 10.1 ábrában és úgy gondolja, hogy van olyan eset, amikor nem elég 9 elem a δ -négyzethálóból, hogy lefedje a δ átmérőjű halmazt, hanem annál sokkal több, például 194.

Befolyásolja-e ez a "tévedés" a boxdimenzió definícióját?

F 10.2. a./ Igazoljuk, hogy a Cantor halmazra érvényes a 10.3 (DIM) formula és ennek alapján számoljuk ki a box-dimenzióját.
b./ Az eddig megismert önhasonló halmazok közül melyekre alkalmazható a (DIM) képlet, vagy annak általánosítása?

F 10.3 Legyen $\mathcal{H}$ a triadikus Cantor halmaz szerkesztésekor eltávolított nyílt intervallumok végpontjaiból alkotott halmaz.
Mennyi a $\mathcal{H}$ box-dimenziója?

F 10.4 A Cantor halmazt úgy szerkeszthetjük a $[0, 1]$ intervallumból, hogy mindig a megmaradt intervallumok középső nyílt harmadát távolítjuk el.
Tekintsük azokat az *általánosított* Cantor halmazokat ahol mindig a megmaradt intervallumok középső nyílt $p\%$ -át távolítjuk el.
Melyik igaz a következő állítások közül:
I. A megmaradó intervallumok összhosszúsága, minden $p\%$ mellett, nulla.
í. Minden $0 \leq s \leq 1$ értékhez van olyan p , hogy a hozzátartozó Cantor halmaz box-dimenziója s .

F 10.5 Mi az eltérés egy egyenlőszárú derékszögű háromszögből és egy egyenlőoldalú háromszögből szerkesztett Sierpinski háromszög boxdimenziója között?

F 10.6 a.) Legyen $\mathcal{H}$ a Sierpinski háromszög szerkesztésekor eltávolított nyílt háromszögek csúcspontjaiból alkotott halmaz. Mennyi a $\mathcal{H}$ boxdimenziója?
b.) Mennyi a Koch görbe és a $[0, 1]$ intervallum közös részének a dimenziója?

**F 10.7 Adjunk meg minden $s \in (0, 2)$ értékhez olyan önhasonló halmazt, a zárt egységnégyzeten, amelynek a boxdimenziója s .

F 10.8 Mennyi egy

$$W^{[n]}(\mathcal{C}); \quad n = 1, 2, \dots\}$$

sorozat elemeinek a boxdimenziója?

- I. F hasonlósági, $\mathcal{C}$ véges halmaz.
- II. F hasonlósági, $\mathcal{C}$ a zárt egységnégyzet.
- III. F csupán kontraktív, $\mathcal{C}$ a zárt egységnégyzet.

F 10.9 Két kompakt halmaz, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$, uniójára érvényes a következő

$$\dim(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \max\{\dim \mathcal{B}, \dim \mathcal{C}\}$$

- a.) Érvényes-e analóg tétel 90 halmaz uniójára?
- b.) Érvényes-e analóg tétel végtelen sok halmaz uniójára?

**F 10.10 Legyen $0 < \lambda < 0.5$ és

$$F_1(x) = \lambda x \qquad F_2(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$$

jellemezzük az $\{F_i; \ i = 1, 2\}$ IFS invariáns halmazát és adjuk meg a box-dimenzióját.

F 10.11 Adjunk meg rekurzív formulát a 33 tiltott szóhoz tartozó $\{N_r; \ r = 2^{-n} \ n = 1, 2, \dots\}$ sorozatra.

**F 10.12 Ha a 9.1 (BD) formulában az $N_\delta(\mathcal{B})$ helyére az

$N'_\delta(\mathcal{B})$: azoknak a δ sugarú *diszjunkt* gömbök *maximális* száma, amelyek középpontja a $\mathcal{B}$ -ben van

értéket írjuk, akkor a 9.1 (BD) értéke ugyanaz marad.

Ennek bizonyítása: A $\mathcal{B}$ minden b pontja valamely gömb középpontjától legfeljebb 2δ távolságban van. Ugyanis, ha ez nem így van akkor a b középpontú δ sugarú gömb nem metszi a lefedő gömbök egyikét sem és így a lefedő gömbök száma nem maximális.

Igy ha az $N'_\delta(\mathcal{B})$ sugarát megduplázzuk, akkor egy 4δ befedést kapunk. Ezért

$$N'_\delta(\mathcal{B}) \geq N_{4\delta}(\mathcal{B})$$

hiszen az így kapott 4δ -befedés elemeinek száma N'_δ és $N_{4\delta}$ a *minimális* lefedés elemeinek a számát jelenti.

Másrészt, legyen $\{\mathcal{U}_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ a $\mathcal{B}$ egy δ -lefedése. A lefedés minden elemébe a $N'_\delta(\mathcal{B})$ számú diszjunkt gömb középpontjaiból legfeljebb egy tartozik bele. Ezért

$$N_\delta(\mathcal{B}) \geq N'_\delta(\mathcal{B}).$$

F **10.13 Abból is következtethetünk a $\mathcal{B}$ box-dimenziójára, hogy a $\mathcal{B} + \delta$ halmaz mértéke (hossza, területe, térfogata) milyen gyorsan csökken $\delta \rightarrow 0$ esetén.

A következő összefüggés érvényes

A $\mathcal{B}$ box-dimenziója:

$$n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(\mathcal{B} + \delta)}{-\log \delta} \quad n = 1, 2, 3.$$

ahol $\mathcal{L}^n$ az n -dimenziós (Lebesgue) mérték. Ez a következőképpen látható be. Ha N_δ a δ -sugarú gömbökkel való lefedés minimális száma, akkor

$$\mathcal{L}^n(\mathcal{B} + \delta) \leq N_\delta c_n \delta^n$$

mivel $c_n \delta^n$ az n -dimenziós δ -sugarú gömb térfogata (ha az egységgömbé c_n). Ebből

$$\frac{\log \mathcal{L}^n(\mathcal{B} + \delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_\delta}{-\log \delta} - \frac{\log c_n}{\log \delta} - n.$$

Másrészt, ha N_δ helyére az F 10.12-ben szereplő N'_δ -t írjuk akkor

$$\mathcal{L}^n(\mathcal{B} + \delta) \geq N'_\delta c_n \delta^n.$$

Ugyanis, ha a δ sugarú gömb középpontja a $\mathcal{B}$ halmazban van. akkor a gömb része a $\mathcal{B} + \delta$ halmaznak.

Ezt a formulát főleg fraktálgörbék esetén alkalmazzák.

F 10.14 A 10.2 (BD) boxdimenzió nem mindig létezik. Példa Cantor-szerű halmazra, amelynek nincs boxdimenziója. Ez a $\lambda = \frac{1}{3}$ és a $\lambda = \frac{3}{5}$ paraméterű Cantor halmazok szerkesztésének megfelelő ötvözése. Az algoritmus a következő:

k_1 -szer a két szélső $\frac{1}{3}$ -át hagyjuk meg a megmaradó intervallumoknak, pontosan úgy, mint a $\lambda = \frac{1}{3}$ paraméterű Cantor halmazok szerkesztésekor;
 k_2 -szer a két szélső $\frac{1}{5}$ -ét hagyjuk meg a megmaradó intervallumoknak, pontosan úgy, mint a $\lambda = \frac{3}{5}$ paraméterű Cantor halmazok szerkesztésekor;
 majd ezeket felváltva folytatjuk a "végtelenségig".

Az n -edik lépés után a (BD) így alakul

ha n páratlan (k_{2n-1}), akkor

$$N_\delta = 2^{k_1 + \dots + k_{2n-1}}, \quad \delta = \frac{1}{3^{k_1}} \frac{1}{5^{k_2}} \cdots \frac{1}{3^{k_{2n-2}}} \frac{1}{5^{k_{2n-2}}} \frac{1}{3^{k_{2n-1}}}$$

és így

$$\frac{\log N_\delta}{-\log \delta} = \frac{k_1 + \dots + k_{2n-1} \log 2}{(k_1 + k_3 \dots + k_{2n-1}) \log 3 + (k_2 + k_4 \dots + k_{2n-2}) \log 5}$$

ha n páros (k_{2n}), akkor

$$N_\delta = 2^{k_1 + \dots + k_{2n}}, \quad \delta = \frac{1}{3^{k_1}} \frac{1}{5^{k_2}} \cdots \frac{1}{3^{k_{2n-2}}} \frac{1}{5^{k_{2n-2}}} \frac{1}{3^{k_{2n-1}}} \frac{1}{5^{k_{2n}}}$$

és így

$$\frac{\log N_\delta}{-\log \delta} = \frac{k_1 + \dots + k_{2n} \log 2}{(k_1 + k_3 \dots + k_{2n-1}) \log 3 + (k_2 + k_4 \dots + k_{2n}) \log 5}$$

Most ha a $k_1, k_2, \dots$ értékeket úgy választjuk meg, hogy "mindíg az utolsó szabály domináljon", akkor a (BD) sorozat páratlan és páros elemei két különböző határértékhez konvergálnak.

Ez például akkor következhet be, amikor

$$\frac{k_1 + \dots + k_m}{k_{m+1}} \rightarrow 0.$$

Ugyanis ekkor a legnagyobb indexű k -val végigosztva a számlálót és a nevezőt, a k_{2n-1} ; $n = 1, 2, \dots$ részsorozat a

$$\frac{\log 2}{\log 3}$$

a k_{2n} ; $n = 1, 2, \dots$ részsorozat a

$$\frac{\log 2}{\log 5}$$

értékhez tart.

MEGJEGYZÉS. A "valóságból vett halmazoknál" ez úgy észlelhető, hogy NINCS olyan szakasz (skála) amelyen a δ értékeket a log-log skálán felvéve azok egy egyenesen vannak.

***F.10.15** Legyen $\mathcal{C}$ egy M pontból álló halmaz. Fedjük le a $\mathcal{C}$ minden pontját egy δ átmérőjű zárt körlappal. Töröljük az $\mathcal{A}$ invariáns halmazból az M körlappal közös részeket és legyen az így kapott halmaz $\mathcal{A}^c$. Legyen N_δ^c a $\mathcal{A}^c$ halmazt lefedő minimális számú δ átmérőjű halmazok száma. Ekkor

$$(10.8) \quad N_\delta^c \leq N_\delta^* \leq N_\delta^c + M$$

ahol, mint eddig, N_δ^* az $\mathcal{A}$ invariáns halmazt lefedő minimális számú δ átmérőjű halmazok száma. Érvényes még a (10.6) formulával analóg

$$(10.9) \quad N_{r^{n+1}}^*(\mathcal{A}) \leq N^n \cdot N_r^*(\mathcal{A}) \quad n = 1, 2, \dots$$

összefüggés. A (10.9) éppen úgy igazolható, mint (10.6) annak a figyelembe vételével, hogy a csonkolt részek kicsinyített másai még fedik egymást.

A (10.8) és (10.9) összevetéséből

$$N_{r^n}^c \leq N_{r^n}^* \leq N^n \cdot N_{r^n}^c(\mathcal{A}) + M.$$

Közvetlen számolással láthatjuk, hogy a fenti egyenlőtlenség jobb vagy baloldalát helyettesítve a (DIM) formulába ugyanazt az eredményt kapjuk.

F 10.16 A (DIM) formula még akkor is érvényes, ha (DIS) nem véges halmaz, de az $F_i(\mathcal{A})$ halmazok átfedése "elég kicsi". Pontosabban, ha $\mathcal{V}$ egy olyan nyílt halmaz, amelynek $\mathcal{V}^*$ lezárása lefedi $\mathcal{A}$ -t ($\mathcal{V}^* \supseteq \mathcal{A}$) és

$$F_i(\mathcal{V}) \cap F_j(\mathcal{V}) = \emptyset \quad i \neq j.$$

Ilyen $\mathcal{V}$ halmaz a Sierpinski háromszögnél egy háromszög belseje, vagy a Koch görbénél az 1.5 ábrán a görbét "éppen" lefedő háromszög belseje.

F 10.17 A boxdimenzió fogalmát a terület mértékére építettük. Az R^2 síkon azokat a halmazokat tekintettük szabálytalannak, amelyeknek a területe nulla és ilyen halmazokat láttunk el $0 \leq s \leq 2$ dimenzióértékekkel.

Hasonlóan építhető térbeli halmazokra és térfogat mértékre vagy csupán a számegyenes pontjaira és a hosszúságmértékre a boxdimenzió. Mi a könnyebb szemléltetés miatt választottuk az R^2 síkot.

F 10.18 Rajzoljunk fel elég nagy pontossággal két nullamértékű halmazt. Például egy Sierpinski háromszöget és egy csillárt olyan pontossággal, hogy a további iterációk már nem változtatnak rajtuk. Megfelelően sűrű négyzetrácsal mutassuk meg, hogy a nagyobb dimenziós halmazt minimálisan lefedő négyzetek száma nagyobb lesz. (A boxdimenziók pontos értékét a (10.4 példában találhatjuk.)

Minimálisan lefedő négyzetek száma azon négyzetek száma, amelyeknek nem üres a a halmazzal közös része.

F 10.19 A 9.1 3. példában megmutattuk, hogy egy négyzet boxdimenziója kettő. Igaz-e, az általánosabb megállapítás: *Minden esetben* amikor egy $\mathcal{B}$ halmaz területe (a négyzethálós méréssel mérve) pozitív, vagyis

$$N_r(\mathcal{B})r^2 \rightarrow c > 0$$

akkor a $\mathcal{B}$ boxdimenziója 2.

F 10.20 A hatványfüggvényeknek egy egyszerű de nagyon fontos tulajdonsága van. Ha

$$(9.12) \quad f(r) = c \cdot r^s \quad (c, r > 0)$$

vagyis f egy hatványfüggvény, akkor

$$(9.13) \quad \log f(r) = s \log r + \log c,$$

vagyis a $P(\log r, \log f(r))$ pontok egy s irántangensű egyenesen vannak (9.2 ábra). Ezt röviden így fejezzük ki: az f függvény egy $(\log, \log)$ skálán egyenessel ábrázolható.

A (9.12) és (9.13) ekvivalens állítások. Nemcsak a (9.12)-ből következik (9.13), hanem fordítva, a (9.13)-ból következik a (9.12). Ezért azt is mondjuk, hogy az $f(r)$ függvény kielégít egy hatványszabályt (pontosan akkor) ha a $P(\log r, \log f(r))$ pontok egy s iránytangensű egyenesen vannak.

Az $r \rightarrow \lambda r$ helyettesítéssel

$$f(\lambda r) = c\lambda^s r^s.$$

A $(\log, \log)$ skálán a hatványfüggvényt ábrázoló egyenesen az $r \rightarrow \lambda r$ helyettesítés után az s értéke változatlan marad. Ebből is következik, hogy az s boxdimenzió értéke nem függ attól, hogy az r nagyságát milyen egységben mérjük. Ezt tömören skálafüggetlennek nevezik.

Számos forrás ezt a tulajdonságot is önhasonlónak nevezi.

F 10.21 Adjuk meg azokat a σ tiltott szavakat, amelyekhez tartozó halmazok $\{N_r; r = 2^{-n} \ n = 1, 2, \dots\}$ sorozata megegyezik a 20 tiltott szóhoz tartozó sorozattal, vagyis (R)-el.

F 10.22 Határozzuk meg az

$$\left\{1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{n^2}\right\}$$

sorozat box-dimenzióját.

F 10.23 A 11.1 4. példában kiszámítottuk, hogy az

$$\left\{\frac{1}{2^n}; \quad n = 1, 2, \dots\right\}$$

sorozat box-dimenziója 0.

a./ Igaz-e ez minden konvergens sorozatra?

b./ Igaz-e ez minden konvergens geometriai sorozatra?

11.1

Törtdimenziós halmazok (fraktálok) a "természetben".

ide sokkal több pl. EKG, fraktálantenna,

A természetben lépten-nyomon találkozhatunk törtdimenziós halmazokkal, amelyek dimenziója a halmaz fontos jellemzője. (8.2-8.14 ábrák és még több).

A természetből vett halmazoknál tisztáznunk kell, hogy mit értsünk azon hogy a területük nulla vagy a hosszúságuk végtelen, hiszen a valóságban nem létezik olyan halmaz, amelynek területe nulla és (vagy) a hossza végtelen.

A klasszikus fraktálok, például a Sierpinski háromszög és Koch görbe sem ilyen. Ha ábrázoljuk őket, a mértékük már véges. A képernyőn megjelenő Sierpinski háromszögben elférnek olyan körlapok, amelyeknek átmérője pixel méretű. Ezért a területe NEM nulla, hanem egy kicsi pozitív szám és így kétdimenziós. A megrajzolt Koch görbe hossza is véges.

A megkonstruált halmazok abban az értelemben megmérhetelenek, hogy területük annyira kicsi az átmérőjükhöz képest hogy a szokásos mérési eljárás nulla területet mutat, vagy a hosszúságuk a mérés pontosságával rohamosan növekszik. Ugyanez a helyzet minden eddig ismertett törtdimenziós halmazzal, ha azt a számítógép képernyőjén megjelenítjük, vagy bármiképpen megkonstruáljuk. Az ilyen halmazoknál a mérés eredménye általában "zajos", a *relatív* mérési hiba túlságosan nagy.

A valóságos objektumok csak bizonyos skálán törtdimenziósak. Bármennyire is lyukacsos egy halmaz, ha annak a területét a lyukak átmérőjénél lényegesen kisebb mértékegységgel mérjük, akkor mértéke pozitív szám és így NEM törtdimenziós (lásd még Akkor kaphatunk törtdimenziót, ha a mértékegységünk a lyukak átmérőjéhez hasonló nagyságrendű. Ezért akkor tekintünk egy "valóságos" $\mathcal{H}$ halmazt s -dimenziósnak, ha egy "elégé hosszú" $c_1 \leq \delta \leq c_2$ intervallumon a

$$(-\log \delta, \log N_\delta(\mathcal{H}))$$

pontok, jó közelítéssel, egy s meredekségű egyenesen vannak.

Ez azt jelenti, hogy

$$(11.1) \quad N_r \approx \alpha r^{-s}$$

ha r elég kicsi. A (11.1) összefüggést **hatványszabálynak** nevezzük.

(EMLÉKEZTETŐ. A (11.1) alapján

$$\log \alpha r^{-s} = \log \alpha - s \log r$$

és (11.1) nagy n értékekre teljesül,

$$(BD) \quad s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(\mathcal{B})}{-\log \delta}$$

határértéket tekintjük boxdimenziónak.

(részletesebben:

$$\begin{aligned} \log N_r &= \log \alpha - s \log r \\ \frac{\log N_r}{\log r} &= s - \frac{\log \alpha}{\log r} \end{aligned}$$

A boxdimenzió meghatározását áttekinthetőbbé tehetjük a következő grafikus ábrázolással. Az (1) alapján

$$\log N_\delta = \log \alpha - s \log r$$

$P(-\log \delta, \log N_\delta)$ pontok, eléggé kis δ mellett (jó közelítéssel) egy s meredekségű egyenesen vannak (9.2 ábra). Ezért, ha egy derékszögű koordinátarendszerben a tengelyeken *logaritmikus skálát* veszünk, fel, akkor a (δ, N_δ) pontokat elég kis δ értékekre felrajzolva, azok egy s meredekségű egyenesen lesznek (9.4 ábra)

A 9.6a ábrán ugyanazon koordináta rendszerben ábrázoltuk az eddig mért halmazok box-dimenziójához tartozó egyeneseket és a 9.6b ábrán még közös kezdőpontba is toltuk az egyeneseket. Így könnyebben össze tudjuk hasonlítani az s meredekségüket.

MEGJEGYZÉS. Sokszor, főleg műszaki jellegű feladatok esetén, a $\log \delta$ értékeket mérjük fel az X tengelyre. Ekkor nyilván egy $-s$ iránytangensű egyenest kapunk.

Norvégia partvonala.

A 9.5A-D ábra mutatja az egyre kisebb δ -élű négyzetrács lefedéseket és az 9.4B ábra táblázata a hozzájuk tartozó (δ, N_δ) párokat. Ezeknek az adatoknak az alapján a Norvég partvonal boxdimenziója $s = 1.18$ ill. $s = 1.27$ a boxdimenzió, aszerint hogy a (9.9) egyenes s meredekségét melyik pontpárra számoljuk. Így a 9.5 ábrák csupán demo jellegűek. Használható eredmény csak nagyobb méretű térképekről kaphatunk. Próbáljuk ki! (A pontos érték: $s = 1.2877\dots$)

Zeg-zugos út és partvonalak mérésére, mint amilyen a norvég partvonal, alkalmasabb az u.n. kompasz dimenzió (11.2). Ennek számítása a terepen elvégezhető geodéziai mérésekre épül és ezért ezt használják a box-dimenzió helyett a geodéziában. Ez teljesen a box-dimenzió szerepét tölti be, noha értéke sokszor eltér a box-dimenzió értékétől.

Egy példa a geodéziából.

Egy görbe ívhosszát a beírt poligonjainak hosszával közelítjük meg (11.1 ábra). Újabb osztópontok felvételével a beírt poligon hossza növekedik (nem csökken) és "szemlátomást egyre közelebb kerül a görbe hosszúságának a mértékéhez". Ennek alapján egy görbe ívhosszának a következőt tekintjük:

Vegyük a görbe beírt poligonjainak a halmazát. Adjuk meg mindegyik poligonnak a hosszát és tekintsük az így kapott pozitív számokból álló halmaznak a felső határát. Az így kapott számot tekintjük a görbe ívhosszának.

Ha felveszünk a görbén pontokat, majd ezeket újabb pontok felvételével sűrítjük, akkor az ezekre a pontokra illeszkedő, egyre több törésponttal rendelkező poligonok hosszúsága egyre közeledik a görbe ívhosszához.

Vannak görbék amelyeknek nincs ívhosszuk. Az ívhossz definíciója alapján ez azt jelenti, hogy a beírt poligonok hosszúságainak nincsen felső korlátja, bármilyen nagy M számhoz meg tudunk adni pontokat a görbén úgy, hogy a pontokra illeszkedő (beírt) poligon hosszúsága nagyobb legyen mint M (Ilyen görbékre példák, a tőzsdei árfolyam ingadozását bemutató 8.8 ábrák és a Koch görbék.)

Az ilyen görbék méretét a boxdimenzió helyett a geodéziában, az ívhossz méréséhez jobban illeszkedő kompasz (tájoló) dimenzióval is szokás megadni. Legyen $M(\delta)$ egy olyan beírt poligon éleinek a száma amelynek minden oldala

δ hosszúságú. Ekkor

$$(11.1) \quad h = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M(\delta)}{-\log \delta}$$

a görbe kompasz (*tájoló, divider*) dimenziója.

Bárhogyan is vesszük fel az egyre kisebb δ élű beírt poligonokat egy $\mathcal{G}$ görbébe, a hozzá tartozó (11.1) sorozat ugyanoda tart. Ezt itt NEM bizonyítjuk, noha ez NEM nyilvánvaló.

A (11.1) formula azt a tapasztalatot tükrözi, hogy

$$M(\delta) = c\delta^{-h}$$

hasonlóan, mint a boxdimenzió esetén. Így

$$(11.2) \quad L(\delta) = M(\delta)\delta = c\delta^{1-h}$$

vagyis a beírt poligonok hosszának növekedése $\delta \rightarrow 0$ esetén, egy hatványszabály szerint történik.

Az elmondottak alapján, ha a $\mathcal{G}_1$ görbe kompasz dimenziója h_1 és a $\mathcal{G}_2$ görbe kompasz dimenziója h_2 és $h_1 < h_2$, akkor rögzített kis δ esetén a δ -élű beírt poligonok hossza a $\mathcal{G}_2$ görbénél nagyobb mint a $\mathcal{G}_1$ görbénél. (Hiszen ekkor a (11.1) számlálója, elég kis δ mellett, a $\mathcal{G}_2$ görbénél nagyobb mint a $\mathcal{G}_1$ görbénél.)

Durván szólva, a kompasz dimenzió a görbébe írt poligonok hosszának növekedési ütemét méri $\delta \rightarrow 0$ esetén.

Éppen úgy, mint a box-dimenziónál, a (11.2) formulából következik, hogy a $(-\log \delta, \log M(\delta))$ pontok egy h iránytangensű egyenesen vannak, kis δ esetén.

A geodéziában, egy partvonal (vagy egy folyó hosszának) mérésére szokásos eljárás hogy egymástól ugyanakkora r távolságban, pontokat (u.n. mérési sarokpontokat) jelölnek ki a partvonal mentén (11.2 ábra). Legyen az így kijelölt pontok száma $M(r) + 1$. Ekkor a partvonal közelítő hosszának az

$$(11.3) \quad L(r) = M(r) \cdot r$$

értéket tekinthetjük. Ezt a mérési sokszög hosszának nevezik. Hasonlóan azokhoz a görbékhez, amelyeknek nincsen ívhosszuk, nagyon zeg-zugos partvonalak esetén, mint amilyen például Norvégia, vagy Izland partvonala, vagy

egy zeg-zugos folyó, a mérési sokszög hosszával nem kapjuk meg a partvonal hosszát megfelelő pontossággal. Ennek oka egyrészt az, hogy a méréseknél felvehető ugyanazon r távolságban, *de különböző helyeken* kijelölve ezeket a mérési pontokat a (11.3) értékek lényegesen eltérnek egymástól, ha a partvonal nagyon zegzugos másrészt, ekkor az r csökkentésével a mérési sokszög hossza lényegesen megváltozik. Így a mérési sokszög hossza nem ad kellő tájékoztatást a partvonal hosszáról (11.2 ábra). Ebben az esetben, ha a mérési sokszög hossza mellett a görbe kompasz dimenzióját is feltüntetjük, akkor felvilágosítást adunk a mérés pontosságáról is.

A dimenzió megállapításának a legegyszerűbb módja, hogy különböző δ_1 és δ_2 mellett meghatározzuk a hozzájuk tartozó mérési sokszögek $L(\delta_1)$ és $L(\delta_2)$ hosszát. Tekintsük a kettő *hányadosát*. Pontosabban az

$$(11.4) \quad \log \frac{M(\delta_1)}{M(\delta_2)} \text{ és } \log \frac{\delta_1}{\delta_2} \text{ arányát.}$$

A (11.4) a következővel egyenlő

$$\frac{\log M(\delta_1) - \log M(\delta_2)}{\log \delta_2 - \log \delta_1}$$

ami a $(-\log \delta, \log M(\delta))$ pontokkal meghatározott egyenes h iránytangense, vagyis a görbe dimenziója.

MEGJEGYZÉS. A (11.4) a mérési sokszögek hosszának a relatív növekedését adja, ami gazdagabb információ mint ha csupán az $L(\delta_1)$ és $L(\delta_2)$ hányadosát adjuk meg, hiszen (11.4) tekintetbe veszi azt is, hogy a δ milyen változásához tartozik a növekedés. A logaritmus bevetését a hatványszabály indokolja.

Térképek készítésénél a következő szerepe lehet a kompasz dimenziónak. Ha egy kisebb léptékű térkép alapján egy *nagyobb léptékűt* készítünk, akkor a térkép vonalai "megrövidülnek". Egy partvonal kisméretű öblei, egy folyónál a rövid, éles kanyarok eltűnhetnek a nagyobb léptékű térképen. A vonalhossz megváltozásának a mértékét ekkor a kompasz dimenzió adja és a térképszerkesztés jóságának egyik paramétere, hogy a szerkesztés során mennyire változik meg a görbék dimenziója.

Fraktálnövekedés.

1. Elektrolízis. Egy kerek tálkába, amelyben rézsulfát oldat van, elektródákat helyezünk. A katódot a tálka közepe fölé függesszük, az anódot pedig a csésze peremére helyezzük kör alakban. Az áram bekapcsolásakor a feszültség hatására a katódon réz rakódik le és nem sok idő múlva a katódon kivált réz alakja a 11.3 ábrákon látható alakot ölt. A 11.3 ábra a katódra merőleges keresztmetszetét mutatja ennek a halmaznak az elektrolízis kezdetétől eltelt elég hosszú idő múlva, miután a formátum "állandósult". Ha r a katódtól mért távolság és $N(r)$ a legfeljebb r távolságra eső lerakódott réz mennyisége, akkor a $(\log r, \log N(r))$ pontok egy s meredekségű egyenesen vannak jó közelítéssel. Az s "értéke, a lerakódott réz eme metszetének a box-dimenziója, akkor lesz a lényegesen kisebb a 2-nél, ha az oldat koncentrációja kicsi és az elektródák közötti elektromos feszültség nagy.

2 Baktériumtelepek Ha egy kerek tálkában (Petri csészében) zselészerű, tápanyagot tartalmazó közeg közepébe baktériumokkal teli folyadékcsepp kerül, akkor ez nyilván egy baktériumteleppé növekedik. Ha a zselében a tápanyag jól diffundál, a baktériumok mozgása nincs akadályozva és bőséges tápanyag van, akkor kb. körforma a baktériumtelep. (11.4a ábra). Ha a tápanyag nem elégséges, akkor a csésze belsejében hamarabb fogy el a tápanyag mint a csésze peremén, hiszen itt van a baktériumok tömege, amíg a csésze széle még érintetlen. Ezért ekkor a csésze belsejében a baktériumok pusztulnak, a telep szélén levő egyedek tovább szaporodnak. A körformájú telep "ujjasodik" (11.4b ábra). Az ágak egyre hosszabbak lesznek, a fjordok mélyülnek, a telep "fraktálszerűvé" válik (11.4c ábra). Az ujjasodás végpontjaiban a baktériumok szaporodásának valószínűsége egyre nagyobb lesz a belső egyedekéhez képest. A telep NEM az átmérő (sugár?) négyzetével, hanem r^s "mértékben" növekszik. A dimenzió a nélkülözés discomfort méretét mutatja.

3. DLA modell (*diffusion limited aggregation*). Egy eléggé sűrű és eléggé nagyméretű **adatok!** négyzetrácson kijelölünk egy négyzetet, ez lesz a DLA magja, majd a rács valamely pontjából elindítunk egy részecske bolyongását. Ez azt jelenti, hogy véletlenszerűen kijelölünk egy a magtól különböző négyzetet a rácson és az minden másodpercben (időegységben) egyenlő valószínűséggel lép egy rácspontot a négy irány valamelyikében. Ez a bolyongás (*Brown*

mozgás) addig tart amíg a részecskét reprezentáló négyzet a maghoz jut el. (Egy előre megadott rács távolságnál közelebb kerül a maghoz). Ekkor a részecske a maghoz tapad. Egy másik befejezése a részecske bolyongásának az, ha a részecskét reprezentáló négyzet a négyzetrács egy perempontját éri el. Ekkor a részecske megsemmisül.

Minden bolyongás végén újabb részecskét indítunk és a mag a hozzá tapadt négyzettel bővül. Ha a bolyongás a maghoz tapadással végződik, akkor a bolyongó részecskét reprezentáló négyzet a hozzá legközelebb álló négyzethez tapad. (11.3B ábra)

Szembevetendő hasonlatosságot mutat az elektrolízis folyamán a katódra rakódott réz, a baktériumtelep alakja kedvezőtlen életkörülmények kialakulásakor és a DLA modellben a számítógépes szimuláció során kialakult halmaz a mag alakja elegendően hosszú folyamat után. Mindhárom dinamikájában közös az, hogy a nyúlványok kialakulása után, a végpontok növekedésének valószínűsége egyre nagyobb lesz a "fjordok" belső pontjaival szemben.

A DLA modellben, a maghoz közel jutva, a továbbjutás valószínűsége már NEM azonos minden irányban. A mag irányában a letapadásnak lesz egyre nagyobb valószínűsége. Hasonló a helyzet az elektrolízis esetén a réz lerakódásával.

A baktériumtelep esetében is az ujjasodás végpontjaiban a baktériumok szaporodásának valószínűsége egyre nagyobb lesz a belső egyedekéhez képest.

MEGJEGYZÉS. A baktériumtelep alakulásának finomabb vizsgálatában figyelembe szokták venni a chemotaxist, a baktériumok kémiai úton történő információcseréjét is.

Feladatok és további információk.

F 11.1 Mennyi a Koch görbe "compass" dimenziója? Mennyi egy körvonal "compass" dimenziója?

F 11.2 h jelölje egy görbe "compass" dimenzióját. Igazoljuk, hogy ha egy görbe L hossza véges, akkor $h = 1$ és ha $h > 1$ akkor $L = \infty$.