

Véletlen Fraktálok kiselőadás

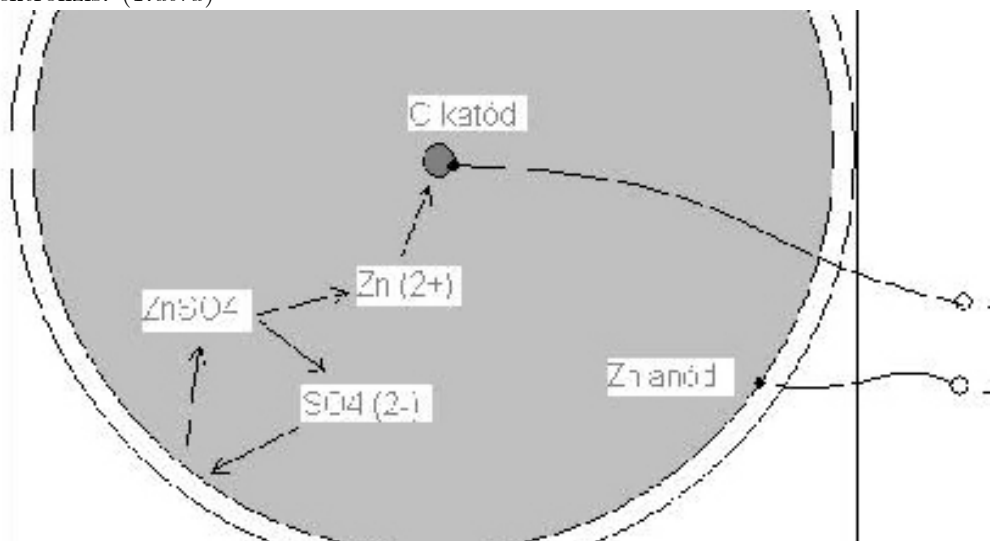
Csetri András

January 12, 2009

1 Elektrolízis kísérlet

Bemutatunk egy kémiai-fizikai kísérletet, aminek eredménye a fraktálok területére vezethet. A kísérlet a cink-szulfát elektrolízist demonstrálja.

Egy petricsésze belső falát (kerületét) béleljük ki vékony cinklemezzel, ez lesz az anód. Helyezzünk egy szénrudat a kör közepére, ez lesz a katód. Öntsünk cink-szulfát oldatot a petricsésze aljába, ezt hívják elektrolitnak. Fontos, hogy az oldat csak film vastagságú legyen, hogy a folyamatot síkon tudjuk figyelni. Ha az anódot és a katódot csatlakoztatjuk egy egyenáramú áramforráshoz, megindul az elektrolízis. (1.ábra)



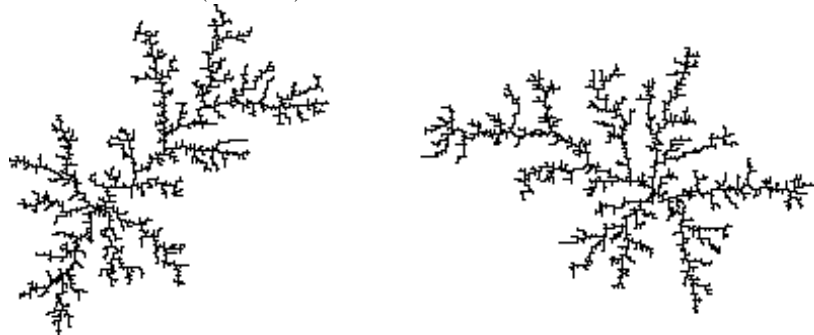
Az elektrolitban lévő cink-szulfát molekulák az elektromosság hatására kettéválnak egy pozitív töltésű cink ionra és egy negatív töltésű szulfát ionra. A cink ionok az ellentétes töltésű szén katód közelébe érve neutralizálódnak és lerakódnak, ezentúl részét képezik a katódnak (módosítva az elektromos teret is). A szulfát ionok pedig a körülvevő cink anódhoz vándorolnak és szintén neutralizálódnak, de azáltal, hogy újabb cink ionokat választanak le és kötnek meg. Ez utóbbi miatt a folyamat továbbra is életben marad és egy egyensúlyi szinten működik tovább.

1.1 Hipotézis

Ha feltesszük, hogy a folyadékban egyenletesen helyezkednek el az ionok, akkor azt feltételezhetjük, hogy a lerakódás egyenletes, rétegszerű. Azaz infinitezimlis idő alatt a katódra, melynek kezdetben kör alakja volt, infinitezimális mennyiségű cink rakódott le a területén mindenütt, ezáltal továbbra is kör alakú, csak sugara (infinitezimálisan) nagyobb. Ezáltal a katód alakja minden pillanatban kör.

1.2 Tapasztalat

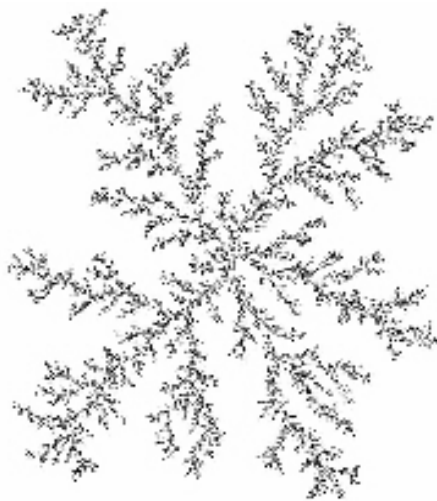
A tapasztalat ezzel szemben azt mutatja, hogy a cink ágakat növesztve, fraktálszerűen rakódik le. (2. ábra)



1.3 Magyarázat

Valószínűsíthető, hogy ennek oka az, hogy az ionok elhelyezkedése és mozgása az oldatban nem teljesen egyenletes, hanem lehetnek véletlenszerű csomósodások. Ez által a folyamat indulásakor a katód bizonyos részein több, míg más részekben kevesebb cink rakódik le, egyenetlen felszín kialakítva. Az oldatban azon ionokra, amik nincsenek a katód közvetlen közelében, a környező ionok sokkal nagyobb elektromos erővel hatnak mint maga a külső elektromos tér. Ezáltal ezen ionok jó közelítéssel Brown-mozgást végeznek, mindaddig, amíg nem kerülnek a katód közvetlen közelébe. Ekkor azonban egy bizonyos valószínűséggel lerakódnak. Ez a valószínűség a külső feszültségnek monoton növekvő függvénye. Az ágak rendszerének kialakulása öngerjesztő folyamat. Ugyanis ha a kezdetben egyenetlenségek alakultak ki, akkor a kijebb álló részeknek nagyobb a vonzaskörzetük, ezért ide több ion fog lerakódni tovább növelve az egyenetlenségeket. Egy idő után pedig az ágak már szabályszerűen megvédik a belsőbb, szénhez közelebbi területeket azáltal, hogy a véletlenül bolyongó ionok beleütköznek a külsőbb részekbe.

Ha csökkentjük a feszültséget, akkor az ágak közelébe érve kisebb valószínűséggel rakódnak le az ionok, miáltal gyakrabban előfordulhat, hogy egy ion végighaladva egy ág mentén bejut a középső területekre és így a kialakult ágszerkezet sűrűbb lesz. (3. ábra)



Tapadás 0.2 valószínűséggel



Tapadás 0.01 valószínűséggel

2 Számítógépes modellezés

E fenti fizikai-kémiai folyamatot modellezhetjük számítógépen is, ha elfogadjuk azon fizikai magyarázatokat, amiket adtunk.

Vegyünk a kétdimenziós négyzetrácsot, a rácsnégyzeteket pixelnek nevezzük és a következőket jelképezi. Ha a pixel 0 állapotban van, akkor azon a helyen nincs cink ion vagy atom, míg ha a pixel 1 állapotban van, akkor ott egy cink ion vagy atom található. Továbbá ki van jelölve a szélső határ - egy diszkrétizált kör.

A végezedmény a t idő utáni 1 állapotú pixelek halmazának összefüggő része - ez felel meg a katód alakjának, jelöljük H_t -vel.

2.1 Algoritmus

Kezdetben egy pixel 1 állapotú - ez a szén katód - a többi 0 állapotban van. A külső kör kerületén választunk egy véletlen pontot, ez lesz az a cink ion, ami legközelebb rakódik le. A diszkrétizálás során azt az egyszerűsítő feltevést tesszük, hogy a cink ion véletlen mozgása során mind a négy szomszédos cellába egyenlő valószínűséggel megy át egy időegység alatt, tehát egy kétdimenziós egyszerű, szimmetrikus bolyongást végez. Eközben helyzetét 1 állapottal jelöljük. Ha a bolyongása során olyan pixel szomszédságába ér, ami szintén 1 állapotú, akkor egy előre adott p valószínűséggel lerakódik, tehát a pixel állapota állandósodik, $1-p$ valószínűséggel pedig továbbmegy. Ha a bolyongó ion a külső kört eléri, visszapattan vagy elnyelődik.

2.2 Analógia

A két modell nyilvánvaló analógiában van, csak az utóbbi diszkrét, az előbbi pedig folytonos. A p tapadási valószínűség az alkalmazott feszültséggel monoton növekvő kapcsolatban lévő paraméter. Egy kicsit pontosabb modell lenne, ha egyszerre nem csak egy ion mozgását szimulálnánk, hanem a valós esetet, mármint hogy több pixel bolyong. Egy részük cink ion, ha a katód mellé ér, p valószínűséggel hozzátapad, a külső körről pedig visszaverődik; más részük szulfát ion, ha a katód mellé ér, visszaverődik, ha a külső körhöz ér, elnyelődik; továbbá véletlen időpontokban keletkeznek egymás melletti pixeleken ellentétes párok. A tapasztalat szerint ez nem jelentene észrevehető változást a végeredményben, viszont lényegesen nagyobb számításigényű.

3 Dimenzió

A dimenzió számítással mindkét (valós és diszkrét) esetben problémák vannak. A valós esetben az, hogy nem tudunk jól mérni a valóságban olyan molekuláris szintű távolságokat, amik az ionok lerakódásánál keletkeznek. A diszkrét esetben pedig a H_t alakzat pontosan kétdimenziós, tehát látszólag nincs törtdimenzió. Tehát infintezimális eszközök egyik esetben sem állnak rendelkezésre. Mindamellet a diszkrét esetben értelmes lehet az a kérdés, hogy H_t átmérője milyen ütemben változik.

Jelöljük S_r -rel azon pixelek halmazát a rácson, amik egy r sugarú kört alkotnak, N_r -rel pedig azon pixelek számát, amik hozzátartoznak H_t -hez (1 állapotúak) és S_r -hez is, azaz $N_r = \#\{x \in \mathbb{Z}^2 | x \in S_r \cap H_t\}$. Ezekkel keressük azt a d -t amivel: $N_r \approx k \cdot r^d$. Mivel minden fix t -re H_t korlátos, ezért nem értelmes semmiféle határértéket venni r -ben, csak t -vel együtt, vagy még inkább statisztikai alapokon becsülni d -t. Természetesen d függ p -től hiszen, mint említettük, a katód alakja függ az alkalmazott feszültségtől.

4 Alkalmazások

Az elektrolízis kísérletnek több vonatkozása is van a gyakorlatban.

Például autóakkumulátor töltésekor egy hasonló folyamat játszódik le, ahol ezen kialakuló ágak veszélyesek: ha elég hosszúak, hogy elérjék az anódot, akkor kisülést okoznak. Ez tehát akkor történik, ha viszonylag magas feszültségen töltik az akkumulátort.

Másik példa a nyomtatott áramköri lapok gyártása. Itt is elektrolízist alkalmaznak az apró vezetőrétegek műanyagra való felvitelére. Ha túl magas feszültséget alkalmaznak, nem lesz elég összefüggő a kialakult réteg, ami vezetésbeli hibákhoz vezethet.

Egy pozitív alkalmazása is van viszont: a katódon lerakódott fémeket összegyűjtve hasznosítható nagy felületi energiája miatt, hiszen felülete sokszorosa lehet tömegének.

Hasonló jelenségek játszódnak le tengeri korallok vagy akár porcicák képződésekor, vagy a villám útját meghatározó folyamat is hasonló, mint az autóakkumulátor töltésekor bekövetkezett kisülés.