

VIZSGATEMATIKA

I.

- **1** A kontraktív leképezés tétele (elve)
- **2** Legyen $\mathcal{K}$ egy R sugarú zárt körlap. Igazoljuk hogy ha F egy kontraktív leképezés és R elég nagy, akkor $F(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.

Mi következik ebből az

$$\{F^{[n]}(\mathcal{K}); \quad n = 1, 2, \dots\} \quad \mathcal{K} \subset R^2$$

iterációs sorozat viselkedésére ?

Mi következik ebből a

$$\{W^{[n]}(\mathcal{K}); \quad n = 1, 2, \dots\}$$

iterációs sorozat viselkedésére ? ($W = \cup_{i=1}^N F_i$)

- **3** A kontraktív leképezések tétele alapján vizsgáljuk meg a következő (iterációs) sorozatokat:

$$\{f^{[n]}(x) \quad n = 1, 2, \dots\} \quad x \in R$$

ahol $f(x) = ax + b$;

$$\{F^{[n]}(x) \quad n = 1, 2, \dots\} \quad x \in R^2$$

ahol $F(x) = Ax + b$, A egy 2×2 mátrix.

Adjuk meg a fixpontokat, a periódikus pontokat és azok jellegét (taszító, vonzó, mi a vonzási tartomány?)

- **4** Igazoljuk, vagy cáfoljuk meg a következő állítást:
"Ha F kontraktív R^2 -ben r kontraktivitási tényezővel, akkor

$$h[F(\mathcal{B}), F(\mathcal{C})] \leq r \cdot h[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$$

ahol $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ kompakt halmazok R^2 -ben és h a Hausdorff távolság (metrika).."

- **5** Legyen $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ és $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

a/ Mikor érvényes

$$F(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = F(\mathcal{B}) \cup F(\mathcal{C})$$

$$F(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = F(\mathcal{B}) \cap F(\mathcal{C}).$$

b/ Ugyanez a kérdés végtelen sok halmaz uniója ill. metszete esetén.

- **6** Mi az exponenciális csökkenés elve?
- **7** Mit nevezünk önhasznló halmaznak (szűkebb és általánosabb értelemben). Mit nevezünk önaffin halmaznak?

Igazoljuk, hogy az IFS modellel előállított halmazok önhasznlók. Igaz-e az állítás következő megfordítása:

”Minden önhasznló halmaz IFS modellel előállítható.”

- **8** ”határtalanul nagyítható” az elméletben és a valóságban.

- **9** Vizsgáljuk meg a következő állítások érvényességét:

a. Ha F kontraktív a $\max$ távolságban, akkor van olyan n , hogy az F n -edik iteráltja kontraktív (az Euklideszi távolságban).

b. Ha van olyan K , hogy az $\{F_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ függvényekből alkotott *minden* K hosszú kompozíció kontraktív, akkor a kontraktív leképezések tétele érvényes az $\{F_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ függvényekkel megadott IFS-re.

- **10** Mikor ekvivalens két metrika (távolság) ?. Mondjon példákat ekvivalens metrikákra.

Mi annak a feltétele, hogy $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kontraktív legyen a ”max távolságban” ?

Ha az $F : R^2 \rightarrow R^2$ kontraktív a "max" normában, akkor mit mondhatunk az euklideszi metrikában az

$$\{F^{[n]}(x_0); n = 1, 2, \dots\}$$

sorozatról ?

II.

- **1** Mi a Hausdorff távolság ? Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ korlátos, zárt halmazok és $h[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ a $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ halmazok Hausdorff távolsága, akkor $h[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ teljesíti a távolság axiómákat.

Mi a kapcsolat $h[\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) és $h[\cup \mathcal{B}_i, \cup \mathcal{C}_i]$ között?

Igazoljuk : Ha $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_n$ akkor $\{\mathcal{B}_n; n = 1, 2, \dots\}$ konvergens a Hausdorff távolságban. Mi a határérték?

- **2** A kollázs TÉTEL. Legyen $\mathcal{A}$ a

$$\{W^{[n]}(\mathcal{B}); n = 1, 2, \dots\}$$

sorozat határértéke. Legyen $r = \max\{r_i; i = 1, 2, \dots, N\}$. Ekkor (*)

$$h[\mathcal{B}, \mathcal{A}] < \frac{1}{1-r} h[\mathcal{B}, W(\mathcal{B})].$$

Igazoljuk a TÉTELT. Hogyan alkalmazható ez a tétel a számítógépes grafikában ?

- **3** Legyen $F : R^n \rightarrow R^n$ olyan, hogy

$$d[F(x), F(y)] < s \cdot d[x, y] \quad x, y \in R^n$$

vagyis $F : R^n \rightarrow R^n$ egy Lipschitz típusú függvény s Lipschitz konstanssal. Legyen $F^{[K]}$ kontraktív, s_K kontraktivitási tényezővel. Legyen a $F^{[K]}$ fixpontja z . Ekkor

$$d[x, z] \leq \frac{1}{1-s_K} \frac{1-s^K}{1-s} d[x, F(x)]$$

Igazoljuk ezt a formulát!

- **4** Legyenek $\{\mathcal{B}_n; n = 1, 2, \dots\}$ kompakt halmazok és $\{p\}$ az egyetlen p pontból álló halmaz. Vizsgáljuk meg a következők érvényességét:
I. Ha $\mathcal{B}_n$ benne van a p középpontú ϵ sugarú gömbben, akkor $h[\mathcal{B}_n, \{p\}] < \epsilon$.

II. Ha minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan k , hogy $n > k$ esetén $\mathcal{B}_n$ benne van a p középpontú ϵ sugarú gömbbe akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h[\mathcal{B}_n, \{p\}] = 0$$

vagyis $\mathcal{B}_n \rightarrow \{p\}$ a ban.

III. Ha $\mathcal{B}_n \rightarrow \{p\}$ a Hausdorff távolságban, akkor minden olyan $\{b_n; n = 1, 2, \dots\}$ (pont)sorozat, amelyre $b_n \in \mathcal{B}_n$ a p ponthoz konvergál.

- **5** A h távolság azt méri hogy vizuálisan ("szemrevételezve") mennyire látszik azonosnak két halmaz. Ha viszont azt akarjuk mérni, hogy milyen hosszú utat kell megtenni ahhoz, hogy pl. a $\mathcal{B}$ halmazból a $\mathcal{C}$ halmazba jussunk el, akkor a

$$\Delta[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = \min\{d[x, y]; x \in \mathcal{B}, y \in \mathcal{C}\}$$

értékkel kell dolgozni. $\Delta[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ nyilván annak a legrövidebb útnak a hosszát adja, amelyen a $\mathcal{B}$ -ből a $\mathcal{C}$ -be juthatunk.

Vizsgáljuk meg, teljesülnek-e a 4.1 I.- III. alaptulajdonságok (*metrikus axiómák*) a Δ esetében?

Mi a kapcsolat $\Delta[\{b\}, \mathcal{C}]$ és $d[b, \mathcal{C}]$ között?

- **6** A kollázs tételen alapuló számítógépes grafikai eljárás. Hogyan módosul ekkor az IFS modell?

- **7** A kollázs tételen alapuló számítógépes eljárás konvergenciája. (Milyen távolságban (metrikában) vizsgáljuk a konvergenciát? Hogyan módosul ekkor a kontraktív leképezések tétele?)
- **8** Mit mér a boxdimenzió? A hatványszabály. A box-dimenzió egy grafikus meghatározása.
- **9** Módosítsuk a Cantor halmaz szerkesztését úgy, hogy $\frac{1}{3}$ helyett $\frac{1}{1000}$ hosszúságú (nyílt) intervallumot vágunk ki a $[0, 1]$ közepéből és ezt ismételjük újra meg újra, vagyis az egyes iterációs lépéseknél a megmaradó egyenesszakaszoknak nem a középső (nyílt) harmadát, hanem csupán az ezredrészét vágjuk ki. Irjuk fel az f szabályt amelyet ekkor ismétlünk. Igazoljuk hogy

$$f^{[n]}([0, 1]) \subset f^{[n-1]}([0, 1]); \quad n = 1, 2, \dots$$

ahol, mint eddig, $f^{[n]}$ az f szabály n -edik ismétlése.

I. Mennyi az $f^{[n]}([0, 1]); \quad (n = 1, 2, \dots)$ halmazok közös részenek hossza?

II. Mennyi az $f^{[n]}([0, 1]); \quad (n = 1, 2, \dots)$ halmazok közös részenek a boxdimenziója?

III.

- **1.** A sátorfüggvénnyel adott DDR (diszkrét dinamikus rendszer) viselkedése különböző a paraméterérték mellett.
- **2.** A shift dinamika kaotikus viselkedése.
- **3.** Tekintsük a következő sorozatokat:

$$F_{\sigma_1} F_{\sigma_2} \dots F_{\sigma_n}(x_0) \quad n = 1, 2, \dots \quad (\sigma_i \in 1, 2, \dots, N)$$

(fraktálok kódolása)

$$x_{n+1} = F_{\sigma_n}(x_n) \quad n = 0, 1, \dots$$

(káoszjáték)

Mi a kapcsolat és mi az eltérés a két sorozat között?

Például, tekintsük a Cantor halmazt előállító, vagy a Sierpinski háromszöget előállító IFS-t (vagy a FÁT előállító 5 függvénnyel adott IFS-t).

- **4.** Információátvitel a sátorfüggvény dinamikájával. Milyen más dinamikus rendszerrel működik még az algoritmus?
- **5.** Fraktálnövekedés.
- **6.** **a.** Mi a DNS láncsal irányított káoszjáték és mi a kapcsolata a Sierpinski háromszögre vezető (*Barnsley*) káoszjátékkal?
b. Mit olvashatunk le a DNS láncsal irányított káoszjáték eredményéből?
c. Fogalmazzuk meg a káoszjátékot a (triadikus) Cantor halmazra.
d. Fogalmazzuk meg a káoszjátékot tetszőleges IFS-re.
- **7.** Igazoljuk, hogy a következő bináris aritmetika a DNS láncsal irányított káoszjáték pontjait adja.
Kíndulunk a $(0.1, 0.1)$ (bináris tört) "pontból"; ha a k -adik pont, P_k , bináris koordinátái

$$0.\sigma_k, \sigma_{k-1} \dots \sigma_1 1, \quad 0.\omega_k, \omega_{k-1} \dots \omega_1 1$$

és a $k + 1$ -edik betű a DNS láncban, bináris alakban ij akkor P_{k+1} bináris koordinátái

$$0.i\sigma_k, \sigma_{k-1} \dots \sigma_1 1, \quad 0.j\omega_k, \omega_{k-1} \dots \omega_1 1$$

az állításokat megfelelően indokolni (bizonyítani) és példákkal is illusztrálni kell.

EZEK IRÁNYKÉRDÉSEK *v.ö irányelvek, irányárok, ...*

A fentiekhez szükséges tudnivalók letölthetők a honlapomról:

Tananyag/Önhasonlóság/PDFverzió

Tananyag/Önhasonlóság/ábrák

Tananyag/Számítógépes grafika/PDFverzió

Tananyag/Számítógépes grafika/ábrák

Tananyag/Kaotikus dinamika/PDFverzió

Tananyag/Kaotikus dinamika/ábrák

Tananyag/Aktuális