Analízis 1, 1. Házi feladat

1. Legyen $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, valamint $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ esetén.

   Igazoljuk, hogy $(\mathbb{R}_0^+, d)$ metrikus tér. Adjuk meg a $B(0,1)$ és a $B(3, \frac{1}{2})$ gömböket intervallum alakban. Ekvivalens-e d az euklideszi metrikával? Teljes-e az $(\mathbb{R}_0^+, d)$ tér? (10 pont)

2. Legyen d_1 és d_2 két ekvivalens metrika egy M halmazon. Mutassuk meg, hogy egy (a_n) sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat d_1 szerint, ha Cauchy-sorozat d_2 szerint. Igazoljuk, hogy (M, d_1) pontodan akkor teljes, ha (M, d_2) teljes. (5 pont)

3. Legyen $a < b$ és legyen $f \in C[a,b]$ esetén $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$, valamint $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$.

   Igazoljuk, hogy $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ és $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ normált terek. Teljes-e a $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ illetve a $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ tér? (15 pont)

4. Mutassuk meg, hogy metrikus térben minden véges sok pontból álló halmaz zárt. (5 pont)

5. Mutassuk meg, hogy az l^p tér szeparábilis minden $1 \leq p < \infty$ esetén. (10 pont)

6. Jelölje $M \subset l^\infty$ azon sorozatok halmazát, amelyeknek csak véges sok nem-nulla tagja van, azaz $M = \{\underline{a} \in l^\infty | \exists N_{\underline{a}} \forall n((n > N_{\underline{a}}) \Rightarrow (a_n = 0)\}$. Mutassuk meg, hogy M nem zárt altere l^∞-nek. (5 pont)