Analízis 1, 2. Házi feladat

Beadási határidő: 2017.10.11.

1. Legyen $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, valamint $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ esetén. Határozzuk meg a $(\mathbb{R}_0^+, d)$ metrikus tér teljes burkát. (10 pont)

2. Bizonyítsuk be az átviteli elvet: egy $f : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ függvény pontosan akkor folytonos egy $z \in M_1$ pontban, ha minden $x_n \to z$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(z)$. (10 pont)

3. Legyen (M, d) metrikus tér. Mutassuk meg, hogy

   a; $X \subset M$ pontosan akkor sehol sem sűrű, ha $M \setminus \overline{X}$ sűrű.

   b; Véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű.

   c; Az $X \subset M$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik az M sehol sem sűrű zárt részhalmazainak olyan $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszere, amelyre $X \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ teljesül. (10 pont)

4. a; Legyen $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ a felső félsík, és $M = H \cup \{(0, 0)\}$, és legyen d az euklideszi metrika M-en. Mutassuk meg, hogy (M, d) nem lokálisan kompakt.

   b; Legyen $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$ a $\sin(1/x)$ függvény grafikonja $x > 0$-ra. Legyen $M = S \cup \{(0, 0)\}$, és legyen d az euklideszi metrika M-en. Mutassuk meg, hogy (M, d) nem lokálisan kompakt. (10 pont)

5. Mutassuk meg, hogy ha egy $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ lineáris leképezés folytonos egyetlen $x_0 \in X$ pontban, akkor mindenütt folytonos X-en. (10 pont)