Analízis 1, 3. Házi feladat

Beadási határidő: 2017.11.08.

1. Mutassuk meg, hogy $0 < p < 1$ esetén az $||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ leképezés nem norma az $l^p = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$ téren. (6 pont)

2. Legyen $a < b \in \mathbb{R}$, valamint $C^1[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f' \in C[a,b]\}$ (ahol az a, b végpontokban jobb- és baloldali deriváltak értendők).

   Norma-e a $C^1[a,b]$ vektortéren az

   $\|f\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$

   illetve

   $\|f\|_0 = |f(a)| + \int_a^b |f(t)| dt$

   leképezések valamelyike? (6+6) pont)

3. Legyen V normált tér, és $A \subset V$ konvex halmaz. Igazoljuk, hogy a lezárt $\overline{A}$ szintén konvex halmaz. (10 pont)

4. Legyen $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{\underline{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |$ az $\underline{a}$ sorozat véges sok helyen nem $0\}$, és legyen $\phi : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ a következő lineáris funkcionál:

   $\phi(\underline{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

   Folytonos-e ϕ ha az $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ teret a

   1. $\|\cdot\|_\infty$ normával látjuk el?

   2. $\|\cdot\|_1$ normával látjuk el?

   3. $\|\cdot\|_2$ normával látjuk el? (3×4 pont)

5. Legyen U Banach tér, V normált tér, valamint $H \subset B(U,V)$ olyan halmaz, hogy minden $x \in U$ esetén $\sup_{A\in H} \|Ax\| < \infty$ teljesül. Legyen

   $T = \bigcap_{A\in H} \overset{-1}{A}(\overline{B_1(0)})$ (a zárt egységgömb ősképeinek metszete).

   1. Mutassuk meg, hogy T zárt.

   2. Mutassuk meg, hogy T konvex.

   3. Mutassuk meg, hogy Int$T$ nem üres. ($3 + 3 + 4$ pont)