Analízis 1, 4. Házi feladat

Beadási határidő: 2017.11.15.

1. Legyen $f \in C[0,1]$ adott, és $M_f : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ az f-fel való szorzás operátora, azaz $\forall g \in C[0,1]$, $(M_f g)(t) := f(t)g(t)$. Mutassuk meg, hogy M_f korlátos lineáris operátor, és határozzuk meg a normáját. (10 pont)

2. Legyen $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, és legyen $T : X \to X$, és $f : X \to \mathbb{R}$ a következő operátorok:
$(T\mathbf{x})(t) = \int_0^t \mathbf{x}(\tau)d\tau$, $f(\mathbf{x}) = \int_0^{1/2} \mathbf{x}(t)dt - \int_{1/2}^1 \mathbf{x}(t)dt$.
Mutassuk meg, hogy T és f lineáris és korlátos, valamint határozzuk meg a normájukat. (5+5 pont)

3. Mutassuk meg, hogy egy $T : (U\|\cdot\|) \to (V, \|\cdot\|)$ lineáris oprátor értékkészlete automatikusan lineáris altér V-ben. Mutassunk példát arra, hogy egy korlátos lineáris operátor értékkészlete nem feltétlenül zárt altér. (10 pont)

4. Legyen $T : X \to Y$ szürjektív korlátos lineáris operátor. Tegyük fel, hogy létezik olyan $b > 0$, hogy $\|Tx\| \geq b\|x\|$ minden $x \in X$-re. Mutassuk meg, hogy ekkor T^{-1} létezik, és szintén korlátos lineáris operátor. (10 pont)

5. Mutassuk meg, hogy egy Hilbert térben $x \perp y$ pontosan akkor ha $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$ minden $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén (kezeljük külön a valós és a komplex esetet). (10 pont)