Analízis 1, 5. Házi feladat

Beadási határidő: 2017.11.22.

1. Bizonyítsuk be a polarizációs azonosságokat Hilbert-téren:

   $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

   $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$, és
   $\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$. (3+5 pont)

2. Bizonyítsuk be a skaláris szorzás folytonossági tulajdonságát:
   ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$ akkor $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$. (8 pont)

3. Legyen $M \subset H$ tetszőleges halmaz egy Hilbert-térben, és
   $M^\perp = \{z \in H \mid z \perp x \text{ for all } x \in M\}$. Mutassuk meg, hogy $M^\perp$ zárt altér. (8 pont)

4. Legyen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormált bázis egy $H$ Hilbert-térben, és legyenek $x, y$ tetszőleges vektorok. Mutassuk meg, hogy

   $$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle y, e_k\rangle}$$

   (8 pont)

5. Legyen $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ két különböző norma egy $X$ téren úgy, hogy $(X, \|\cdot\|_1)$ és $(X, \|\cdot\|_2)$ egyaránt teljesek. Tegyük fel, hogy minden $(x_n) \subset X$ sorozatra $\|x_n\|_1 \to 0$ maga után vonja, hogy $\|x_n\|_2 \to 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor a két norma ekvivalens. (8 pont)

6. Legyen $DomT \subset X$, $T : DomT \to Y$ egy zárt lineáris operátor, és legyen $C \subset X$ egy kompakt halmaz. Mutassuk meg, hogy $T(C)$ zárt halmaz $Y$-ban. (10 pont)