Analízis 1, 6. Házi feladat

Beadási határidő: 2017.11.29.

1. Legyenek X, Y Banach terek, és T zárt lineáris operátor X-ből Y-ba ($DomT \subset X$ egy altér, de nem feltétlenül az egész X). Mutassuk meg, hogy $KerT$ zárt altere X-nek.

   Legyen $K \subset Y$ kompakt halmaz. Mutassuk meg, hogy K ősképe $\overset{-1}{T}(K) = \{x \in X : Tx \in K\}$ zárt halmaz X-ben. (5+5 pont)

2. Legyen $T \in B(X, X)$ korlátos lineáris operátor egy X komplex Banach téren. Bizonyítsuk be, hogy minden $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|T\|$ esetén $(T - \lambda I)^{-1} \in B(X, X)$. (8 pont)

3. Legyen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormált bázis a H Hilbert téren, és legyen $x, y \in H$. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle| \le \|x\|\|y\|.$$

   (8 pont)

4. Legyen $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty$, és legyen $T : X \to X$ olyan lineáris operátor, amely minden nemnegatív függvényt nemnegatív függvénybe képez (azaz $\mathbf{x} \ge 0$ esetén $T\mathbf{x} \ge 0$). Mutassuk meg, hogy T automatikusan korlátos. Adjunk példát ilyen operátorra. (8 pont)

5. Legyen X, Y Banach tér, $T : DomT \to Y$ zárt operátor ($DomT \subset X$), és $S \in B(X, Y)$ korlátos lineáris operátor ($DomS = X$). Mutassuk meg, hogy a $T + S$ operátor ($Dom(T + S) = DomT$) szintén zárt. (8 pont)

6. Bizonyítsuk be a Banach-Steinhaus tételt: ha U Banach tér, V normált tér, és $T_n \in B(X, Y)$, olyan operátorsorzat, amelyre minden $x \in U$ esetén $T_n x$ konvergens V-ben, akkor a $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ formulával definiált operátor lineáris, korlátos, és $\|T\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$. (8 pont)