

Minimum követelmény

Analízis 1, 2020/21 I. félév

A definíciók és a tételek témakörök szerinti felsorolásban.

1. Metrikus terek.

Metrika. Nyílt, zárt, korlátos halmaz metrikus térben. Halmaz belső, torlódási, határ- és izolált pontja. Halmaz lezártja és belseje. Nyílt és zárt halmazok jellemzése metrikus altéren. Konvergencia és Cauchy-sorozat metrikus terekben. Metrikus tér teljessége és teljességi tétele. Sehol sem sűrű halmaz. Első és második kategóriájú halmaz. Baire-féle kategóriatétel. Kompakt halmazok és tulajdonságaik. Cantor-féle közszerésztétel. Bolzano–Weierstrass-tétel. Szeparábilis metrikus tér. Teljesen korlátos halmazok, Hausdorff-tétel. Kompaktság és teljesen korlátosság kapcsolata. Függvények határértéke. Átviteli elv határértékekre. Függvény folytonossága. Átviteli elv folytonosságra. Folytonosság topológikus jellemzése. Diszjunkt zárt halmazok szétválasztása folytonos függvénnyel. Homeomorfizmus és izometria. Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Egyenletesen folytonos függvény. Heine-tétel. Kontrakció. Banach-féle fixponttétel. Ívszerűen összefüggő és összefüggő halmazok.

2. Normált terek.

Norma, normált tér, Banach-tér. Hölder egyenlőtlenség. Abszolút konvergens sorok és Banach terek kapcsolata. Folytonos lineáris leképezés normája. Folytonosság és korlátosság ekvivalenciája. Folytonos lineáris funkcionálok, a duális tér teljessége. Véges dimenziós terek, ekvivalens normák, Heine–Borel-tétel a kompakt halmazok jellemzéséről. Skalárszorozatos terek, Hilbert terek. Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség, Riesz-féle ortogonális felbontási tétel, Riesz-féle reprezentációs tétel funkcionálokra, adjungált oprátor, Bessel egyenlőtlenség, kifejtés ONB szerint, Parseval egyenlőség. Carl Neumann sor. Hahn–Banach-tétel. Egyenletes korlátosság tétele. Banach nyílt leképezés tétele. Zárt gráf tétel. Banach-tétele korlátos inverz létezéséről. Normált terek szorzata. Folytonos multilineáris leképezés normája. Bernstein polinomok és egyenletes approximáció. Szétválasztó függvényhalmaz. Stone-tétel. Stone-Weierstrass-tétel.

3. Differenciálszámítás.

Normált terek között ható leképezések deriválhatósága és deriváltja. Függvények összegének és kompozíciójának deriválása. Vektorértékű és skalárértékű függvény szorzatának deriválása. A differenciálhatóságból következik a folytonosság. Iránymenti derivált. Operátorértékű hatványfüggvény deriválása, az inverzképezés deriválása.

Az alábbi tételek bizonyításának ismerete szükséges (ezek szerepelhetnek a szóbeli vizsgán):

Az órán elhangzott Hölder egyenlőtlenség, valamint Andai Attila jegyzetéből a következő tételek: 1.5, 1.10, 1.19, 1.25, 1.30, 1.40, 1.46, 1.52, 1.56, 1.57, 1.58, 1.67, 1.83, 2.12, 2.13, 2.21, 2.24/1, 2.24/2, 2.24/3, 2.33, 2.36, 2.37, 2.38, 2.63, 2.66, 2.70, 2.73, 2.75, 2.77, 3.4, 3.8, 3.12, valamint Tarcsay Zsigmond jegyzetéből 3.50, 3.53.