

Vizsgatematika

Analízis 1, 2019/20 I. félév

A szóbeli vizsgán mindenki két tételt kap az alábbiakból. Aki a fogalmakat és tételeket helyesen kimondja, az már nem kaphat rosszabb jegyet, mint ami a hozott pontszámára jár. Javítani viszont lehet bizonyítások elmondásával: a minimum-követelményben felsorolt bizonyításokra kérdezek rá.

- 1. Metrikus tér, metrikus altér.** Metrika. Nyílt, zárt, korlátos halmaz metrikus térben és tulajdonságai. Halmaz belső, torlódási, határ- és izolált pontja. Halmaz lezártja, belseje és tulajdonságai. Metrikus altér fogalma. Nyílt és zárt halmazok jellemzése metrikus altéren.
- 2. Sorozatok és Baire-tétel.** Konvergens és Cauchy-sorozatok és tulajdonságai. Torlódási pont jellemzése sorozattal. Sehol sem sűrű halmazok. Első és második kategóriájú halmaz. Baire-féle kategóriatétel.
- 3. Teljesség.** Metrikus tér teljessé tétele. Banach-féle fixponttétel.
- 4. Kompakt halmazok.** Kompakt halmazok és tulajdonságai. Cantor-féle közösrésztétel. Bolzano–Weierstrass-tétel. Lokálisan kompakt halmazok.
- 5. Teljesen korlátos halmazok** Teljesen korlátos halmazok és tulajdonságai. Hausdorff-tétel. Kompaktság és teljesen korlátosság kapcsolata.
- 6. Függvények.** Függvények határértéke. Függvény folytonossága. Átviteli elv folytonosságra. Folytonosság topologikus jellemzése. Folytonos függvények kompozíciója. Homeomorfizmus, izometria, kontrakció. Zárt halmazok szétválasztása függvénnyel.
- 7. Folytonos függvények kompakt halmazon.** Kompakt halmaz folytonos képe. Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Egyenletesen folytonos függvények. Heine tétele. Az inverz folytonossága.
- 8. Összefüggő halmazok.** Ívszerűen összefüggő és összefüggő halmazok, valamint alaptulajdonságai. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmaz folytonos függvény általi képe.
- 9. Normált terek.** Norma. Nyílt, zárt és korlátos halmaz normált térben. Halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontja. Sorozatok és sorok konvergenciája. Cauchy-sorozatok. Banach-terek. Tér teljességének jellemzése abszolút konvergens sorokkal. Normált terek szorzata. Banach-terek szorzata Banach.
- 10. Normált terek tulajdonságainak jellemzése.** Normák ekvivalenciája. Az \mathbb{R}^n téren bármely két norma ekvivalens. Véges dimenziós normált terek tulajdonságai. Kompaktság jellemzése véges dimenziós normált terekben. Normált terek lokális kompaktságának jellemzése.
- 11. Skalárszorozatos terek.** Skaláris szorzás. Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség. Ortogonális, normált, ortonormált és teljes vektorrendszer. Bessel-egyenlőtlenség. ONB szerinti kifejtés. Parseval-egyenlőség.
- 12. Folytonos lineáris leképezések.** Folytonos lineáris leképezés normája. Folytonosság és korlátosság. A folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai. Norma szubmultiplikativitása. Folytonos multilineáris leképezés normája. Carl–Neumann-féle

sor.

13. Approximáció. Lineáris függvényháló. Szétválasztó függvényhalmaz. Bernstein-polinomok. Bernstein-polinomokkal való egyenletes approximáció. Stone-tétel. Stone–Weierstrass-tétel.

14. Hahn–Banach-tétel. Hahn–Banach-tétel valós normált tereken. A duális tér, mint szétválasztó függvényhalmaz. Normált tér tér beágyazása a bidualisába. Az l^p terek duálisa. Reflexív terek.

15. Banach tételei. Az egyenletes korlátosság tétele. Banach nyílt leképezés tétele. Banach tétele korlátos inverz létezéséről. Zárt gráf tétel.

16. Differenciálás. Normált terek között ható leképezések deriválhatósága és deriváltja. Iránymenti derivált. Függvények kompozíciójának deriválása. Vektorértékű és skalárértékű függvény szorzatának deriválása. Operátorértékű hatványfüggvény deriváltja.