

# Vizsgatematika

## Analízis 1, 2017/18 I. félév

A szóbeli vizsgán mindenki két tételt kap az alábbiakból. Aki a fogalmakat és tételeket helyesen kimondja, az már nem kaphat rosszabb jegyet, mint ami a hozott pontszámára jár. Javítani viszont lehet bizonyítások elmondásával: a minimumkövetelményben felsorolt bizonyításokra kérdezek rá.

- 1. Metrika, metrikus altér.** Metrika. Nyílt, zárt, korlátos halmaz metrikus térben és tulajdonságai. Halmaz belső, torlódási, határ- és izolált pontja. Halmaz lezártja, belseje és tulajdonságai. Metrikus altér fogalma. Nyílt és zárt halmazok jellemzése metrikus altéren.
- 2. Sorozatok és Baire-tétel.** Konvergens és Cauchy-sorozatok és tulajdonságai. Torlódási pont jellemzése sorozattal. Sehol sem sűrű halmazok. Első és második kategóriájú halmaz. Baire-féle kategóriatétel.
- 3. Teljesség.** Metrikus tér teljessé tétele. Banach-féle fixponttétel.
- 4. Kompakt halmazok.** Kompakt halmazok és tulajdonságai. Cantor-féle közösrésztétel. Bolzano–Weierstrass-tétel. Relatív kompakt és lokálisan kompakt halmazok.
- 5. Kompaktság jellemzése.** Teljesen korlátos halmazok és tulajdonságai. Hausdorff-tétel. Kompakt halmaz teljesen korlátos. Kompakt halmaz teljessége.
- 6. Függvények.** Függvények határértéke. Átviteli elv határértékekre. Függvény folytonossága. Átviteli elv folytonosságra. Folytonosság topologikus jellemzése. Folytonos függvények kompozíciója. Homeomorfizmus, izometria, kontrakció. Zárt halmazok szétválasztása függvénnyel.
- 7. Folytonos függvények kompakt halmazon.** Kompakt halmaz folytonos képe. Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Egyenletesen folytonos függvények. Heine tétele. Az inverz folytonossága.
- 8. Összefüggő halmazok.** Ívszerűen összefüggő és összefüggő halmazok, valamint alaptulajdonságai. Összefüggő halmaz folytonos függvény általi képe. Normált terek nyílt halmazainak összefüggősége.
- 9. Normált terek.** Norma. Nyílt, zárt és korlátos halmaz normált térben. Halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontja. Sorozatok és sorok konvergenciája. Cauchy-sorozatok. Banach-terek. Tér teljességének jellemzése abszolút konvergens sorokkal. Normált terek szorzata. Banach-terek szorzata Banach.
- 10. Normált terek tulajdonságainak jellemzése.** Normák ekvivalenciája. Az  $\mathbb{R}^n$  téren bármely két norma ekvivalens. Véges dimenziós normált terek tulajdonságai. Kompaktság jellemzése véges dimenziós normált terekben. Normált terek lokális kompaktságának jellemzése.
- 11. Skalárszorzos terek.** Skaláris szorzás. Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség. Ortogonális, normált, ortonormált és teljes vektorrendszer. Bessel-egyenlőtlenség. ONB szerinti kifejtés. Parseval-egyenlőség.
- 12. Folytonos lineáris leképezések.** Folytonos lineáris leképezés normája. Folytonosság és korlátosság. A folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai. Norma

szubmultiplikativitása. Folytonos multilineáris leképezés normája. Carl–Neumann-féle sor.

**13. Approximáció.** Lineáris függvényháló. Szétválasztó függvényhalmaz. Bernstein-polinomok. Bernstein-polinomokkal való egyenletes approximáció. Stone-tétel. Stone–Weierstrass-tétel.

**14. Hahn–Banach-tétel.** Szubadditív és pozitív homogén leképezés. Hahn–Banach-tétel valós normált tereken. A duális tér, mint szétválasztó függvényhalmaz. Vektortér beágyazása a bidualisba. Az  $l^p$  terek duálisa. Reflexív terek.

**15. Banach tételei.** Az egyenletes korlátosság tétele. Banach nyílt leképezés tétele. Banach tétele korlátos inverz létezéséről. Zárt gráf tétel.

**16. Differenciálás.** Normált terek között ható leképezések deriválhatósága és deriváltja. Iránymenti derivált. Függvények kompozíciójának deriválása. Vektorértékű és skalárértékű függvény szorzatának deriválása. Operátorértékű hatványfüggvény deriváltja.