

Vizsgatematika

Analízis 1, 2021/22 I. félév

Az írásbeli vizsga két részből fog állni: 20 db igaz/hamis kérdés (helyes válasz +5 pont, helytelen -5 pont, üresen hagyott válasz 0 pont), valamint három gyakorlati feladat 100 pont értékben (hasonlóak a félév során vett gyakorlati feladatokhoz). Mindkét részben legalább 50%-ot kell elérni.

Az írásbeli vizsga után az elért eredmények alapján egyes esetekben megajánlom a félévi jegyet (amelyet el lehet fogadni, vagy szóbeli vizsgával lehet javítani vagy rontani). Akinek nem ajánlok jegyet, annak a szóbeli vizsga kötelező. A szóbeli vizsgán néhány igaz/hamis kérdéssel kapcsolatban felmerülő tételekről és definíciókról teszek fel kérdéseket, és mérem fel a hallgató felkészültségét. Egyes tételeknél a bizonyításra is rákérdezhetek (a listát lásd legalul).

Az írásbeli és szóbeli vizsgán egyaránt a következő témakörök kerülhetnek elő:

1. Komplex függvénytan.

A komplex számok aritmetikája, a komplex sík topológiája, a Riemann-gömb; komplex függvény pontbeli deriváltja, tartományon reguláris függvény, a derivált műveleti tulajdonságai, Cauchy-Riemann egyenletek; hatványsorok konvergenciasugara (Cauchy-Hadamard formula), abszolút és lokálisan egyenletes konvergencia a konvergenciasugáron belül, hatványsor regularitása és tagonkénti differenciálhatósága; elemi függvények: exp, log, sin, cos; a komplex vonalintegrál definíciója, helyettesítéses integrálás, Newton-Leibniz szabály; primitív függvény létezése és az integrál úttól való függetlensége; Goursat-lemma, Cauchy-tétel konvex tartományon; görbe indexe, az index tulajdonágai, a Goursat-lemma általánosítása és a Cauchy-féle integrálformula konvex tartományon; hatványsorba fejtés, Cauchy integrálformulák a deriváltakra, unicitás tétel; lokális aszimptotikus viselkedés (szemléletesen), a maximum-elv változatai, együttható becslések, Liouville-tétel; az algebra alaptétele; Laurant-sorba fejtés körgyűrűn, Laurant-sor konvergenciája, izolált szingularitások, pólus, lényeges szingularitás, Casoratti-Weierstrass tétel; Reziduum tétel, példák valós integrálok kiszámítására; argumentum-elv, Rouché tétel, az inverzfüggvény regularitása; lineáris törtfüggvények, kettősviszony, körtartás, háromszoros tranzitivitás, az egységkörlap önmagára való leképezései, a felső félsík egységkörre való leképezései.

2. Metrikus terek, normált terek.

Metrikus tér. Nyílt, zárt, korlátos halmaz metrikus térben. Halmaz belső, torlódási, határ- és izolált pontja. Halmaz lezártja és belseje. Nyílt és zárt halmazok jellemzése metrikus altéren. Konvergencia és Cauchy-sorozat metrikus terekben, metrikus tér teljessége. Kompakt halmazok és tulajdonságaik. Cantor-féle közösrésztétel. Bolzano-Weierstrass-tétel. Függvények határértéke és folytonossága. Átviteli elv folytonosságra. Folytonosság topologikus jellemzése. Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Egyenletesen folytonos függvény. Heine-tétel. Kontrakció. Banach-féle fixponttétel. Ívszerűen összefüggő és összefüggő halmazok. Norma, normált tér, Banach-tér. Abszolút konvergencia sorok és Banach terek kapcsolata. Folytonos lineáris leképezés normája. Folytonosság és korlátosság ekvivalenciája. Véges dimenziós terek, ekvivalens

normák, Heine–Borel-tétel a kompakt halmazok jellemzéséről. Skalárszorzos terek, Hilbert terek. Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség, Riesz féle ortogonális felbontási tétel, Riesz féle reprezentációs tétel funkcionálokra, adjungált oprátor, Bessel egyenlőtlenség, kifejtés ONB szerint, Parseval egyenlőség. Carl Neumann sor. Bernstein polinomok és egyenletes approximáció. Szétválasztó függvényhalmaz. Stone tétel. Stone-Weierstrass tétel. Normált terek között ható leképezések differenciálhatósága és deriváltja. A differenciálhatóságból következik a folytonosság. Iránymenti derivált. Operátorértékű hatványfüggvény deriválása.

Az alábbi tételek bizonyításának ismerete szükséges (ezek szerepelhetnek a szóbeli vizsgán):

Komplex függvénytan (Halász jegyzet): Cauchy-Riemann egyenletek; Hatványsor konvergenciája; Hatványsor regularitása; Newton-Leibniz szabály (folyt. diff. esetben); Úttól való függetlenség és primitív függvény; Goursat lemma; Cauchy formulák konvex tartományon; Hatványsorba fejtés; Maximum-elv változatai; Liouville tétel; Laurant-sorba fejtés; Laurant sor konvergenciája; Rouché tétel; Lineáris törtfüggvények tulajdonságai.

Metrikus terek, normált terek (Andai Attila jegyzetéből) a következő tételek: 1.5, 1.10, 1.19, 1.30, 1.46, 1.52, 1.56, 1.57, 1.67, 1.83, 2.12, 2.13, 2.21, 2.24/1, 2.24/2, 2.24/3, 2.33, 2.38, 2.77, 3.4, 3.12