Analízis 1, 2. pótzárthelyi dolgozat, 2017.12.08.

1. Legyen $X = (C[0,2], \|\cdot\|_\infty$, és definiáljuk az $f : X \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen: $f(x) = x(1) - \int_{t=0}^{2} x(t)dt$. Mutassuk meg, hogy f korlátos lineáris funkcionál, és határozzuk meg a normáját. (10 pont)

2. Legyen $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty$, és legyen $f : X \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amely minden nemnegatív függvényt nemnegatív számba képez (azaz $x \in X$, $x \geq 0$ esetén $f(x) \geq 0$). Mutassuk meg, hogy f automatikusan korlátos. Adjunk példát ilyen funkcionálra (amely nem azonosan nulla). (10 pont)

3. Legyen H Hilbert-tér, $e_1, \dots, e_n$ ortonormált vektorok H-ban, és jelölje V az $e_1, \dots, e_n$ által kifeszített alteret. Legyen $x \in H$ tetszőleges vektor, és legyen $b_j = \langle e_j, x \rangle$ minden $j = 1, \dots, n$ esetén. Mutassuk meg, hogy az $y = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$ vektorra teljesül, hogy $x - y$ ortogonális V-re, és hogy $\|x - v\| \geq \|x - y\|$ minden $v \in V$ esetén. (10 pont)

4. Legyen H egy valós Hilbert-tér, és $x \in H$ egy adott vektor. Legyen $f : H \to H$ az $f(z) = \langle z, x \rangle z$ képlettel definiálva. Legyen továbbá $a, y \in H$. A definíció alapján számítsuk ki a $(Df(a))(y)$ értéket. (10 pont)

5. Legyen X Banach tér, és $A \in B(X, X)$. Mutassuk meg, hogy a
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
képlet egy korlátos lineáris operátort definiál X-en, és adjunk felső becslést a normájára. (10 pont)

6. Legyen $T : X \to Y$ injektív korlátos lineáris operátor az X és Y Banach terek között ($DomT = X$). Mutassuk meg, hogy a $T^{-1} : RanT \to X$ operátor pontosan akkor korlátos, ha $RanT$ zárt altér Y-ban. (10 pont)