Analízis 1, 1. pótzárthelyi dolgozat, 2017.12.06.

1. Legyen (M, d) egy metrikus tér. Mutassuk meg, hogy a $\rho(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ függvény szintén metrika M-en. Igaz-e, hogy ha (M, d) teljes, akkor (M, ρ) is automatikusan teljes?

2. Bizonyítsuk be, hogy egy (M, d) metrikus térben tetszőleges $r > 0$ esetén egy $B_r(x)$ gömb nem tartalmazhat szigorúan egy $B_{2r}(y)$ gömböt (azaz $B_{2r}(y) \subsetneq B_r(x)$ nem állhat fenn).

3. Tekintsük a $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ térben az
   $A_1 = \{f \in C[0, 1] : \inf_{0 \le t \le 1} f(t) > 0\}$, valamint
   $A_2 = \{f \in C[0, 1] : f(0) + f(1) = \pi\}$ halmazokat. Döntsük el, hogy A_1 és A_2 nyílt-e, zárt-e, vagy egyik sem.

4. Legyen (a_n) és (b_n) két Cauchy-sorozat egy (M, d) metrikus térben. Mutassuk meg, hogy $d(a_n, b_n)$ konvergens sorozat $\mathbb{R}$-ben.

5. Legyen $A, B \subset (M, d)$ két diszjunkt halmaz, A kompakt, B zárt. Mutassuk meg, hogy $\inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0$. Mutassunk példát arra, hogy ez két zárt halmaz esetében már nem feltétlenül igaz.

6. Legyen $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ egyenletesen folytonos függvény, és legyen (x_n) Cauchy-sorozat X-ben. Mutassuk meg, hogy $f(x_n)$ is Cauchy-sorozat. Mutassunk példát arra, hogy folytonos f függvény esetén ez nem feltétlenül igaz. Mutassuk meg, hogy ha Y kompakt, akkor $f(x_n)$ automatikusan konvergens.