Analízis 1, 2. zárthelyi dolgozat, 2017.11.15.

1. Legyen $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty$, és definiáljuk a $T : X \to X$ operátort a következőképpen: $Tx(t) = (t^2 - 4t + 1)x(t)$. Mutassuk meg, hogy T korlátos lineáris operátor, és határozzuk meg a normáját. (10 pont)

2. (a) Legyen H Hilbert-tér. Bizonyítsuk be a skaláris szorzás folytonossági tulajdonságát: ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$ akkor $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

   (b) Legyen $z \in H$ adott vektor, és tekintsük az $f(x) = \langle x, z \rangle$ függvényt H-ról $\mathbb{K}$-ba. Igaz-e, hogy f egyenletesen folytonos? (5+5 pont)

3. Legyen x és y két tetszőleges vektor egy Hilbert-téren. Mutassuk meg, hogy x és y pontosan akkor ortogonálisak, ha $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ teljesül minden $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén. (10 pont)

4. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, és $T \in B(V, V)$ olyan operátor, amelyre teljesül, hogy $T(B(0,1))$ (azaz az egységgömb T általi képe) tartalmaz valamely $B(0, \varepsilon)$ nyílt gömböt. Mutassuk meg, hogy T nyílt leképezés. (10 pont)

5. Legyen $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty$, és legyen $T : X \to X$ olyan lineáris operátor, amely minden nemnegatív függvényt nemnegatív függvénybe képez (azaz $f \geq 0$ esetén $Tf \geq 0$). Mutassuk meg, hogy T automatikusan korlátos. Adjunk példát ilyen operátorra. (10 pont)

6. Legyen X, Y Banach tér, $T : DomT \to Y$ zárt operátor ($DomT \subset X$), és $S \in B(X, Y)$ korlátos lineáris operátor ($DomS = X$). Mutassuk meg, hogy a $T + S$ operátor ($Dom(T + S) = DomT$) szintén zárt. (10 pont)