Analízis 1, 1. zárthelyi dolgozat, 2017.10.17.

1. Legyen $f(x) = \arctan x$, valamint $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Igazoljuk, hogy $(\mathbb{R}, d)$ metrikus tér. Teljes-e az $(\mathbb{R}, d)$ tér?

2. Egy (M, d) metrikus térben legyen adott két konvergens sorozat: $a_n \to A$ és $b_n \to B$. Igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(A, B)$.

3. Igazoljuk, hogy bármely metrikus térben véges sok kompakt halmaz metszete is kompakt.

4. Legyen $M = [0, \infty[$ és minden $x, y \in M$ esetén legyen $d_1(x, y) = |x - y|$, és $d_2(x, y) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$. Tekintsük a következő $f, g : (M, d_1) \to (M, d_2)$ függvényeket: $f(x) = x^4$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$. Egyenletesen folytonos-e az f illetve a g függvény?

5. Legyen (M, d) metrikus tér és $A \subset M$ teljesen korátos halmaz. Következik-e ebből, hogy az $\overline{A}$ (lezárt) halmaz is teljesen korlátos? Következik-e, hogy $M \setminus A$ is teljesen korlátos?

6. Legyen (M, d) metrikus tér. A dist függvény segítségével igazoljuk, hogy:

   a; minden M-beli zárt halmaz előáll megszámlálhtaóan sok nyílt halmaz metszeteként

   b; minden M-beli nyílt halmaz előáll megszámlálhatóan sok zárt halmaz uniójaként