Kalkulus 2, 2019/2020 II. félév, elméleti anyag és feladatok

A félév során jórészt a Laczkovich Miklós - T. Sós Vera: Valós analízis II. könyvet követjük [2]. A könyv ingyenesen letölthető (megfelelö regisztrációs lépések után) a https://www.interkonyv.hu/konyvek/ oldalról. Időnként hivatkozni fogunk a könyv első kötetére [1] is, amely szintén ingyenesen letölthetö ugyanonnan. A továbbiakban a tételek és definíciók számozása ezekre a könyvekre értendő.

A file végén gyakorló feladatokat is felsorolok. A szövegben a feladatok számozása ezekre vonatkozik.

1. hét, február 10-16

Témakör: az $\mathbb{R}^p$ tér bevezetése, euklideszi norma, skaláris szorzás és az $\mathbb{R}^p$ tér topológiája.

Bevezettük az $\mathbb{R}^p$ teret, a vektorok euklideszi normáját (avagy hosszát, abszolút értékét, ezek a kifejezések mind ugyanazt jelentik) és skaláris szorzatát az [1, 15.1 Definíció] alattiak szerint, majd beláttuk a norma és a skaláris szorzás legfontosabb tulajdonságait:

$\|\mathbf{x}\| \geq 0,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ és $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ (pozitív, nem-degenerált)
$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ (skálázási tulajdonság)
$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ (háromszög egyenlőtlenség)

valamint

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ és $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ (pozitív definit, nem-degenerált)
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ (szimmetrikus)
$\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^p, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (bilineáris)

Beláttuk az alapvető fontosságú Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget [1, 10.19 Tétel].

A norma és skaláris szorzás fogalmával kapcsolatos feladatok: 1– 6.

Témakör: az $\mathbb{R}^p$ topologiája.

Itt a legfontosabb fogalmak a következők: gömbi környezet, nyílt halmazok, zárt halmazok, belső pont, külső pont, határpont, torlódási pont, halmaz belseje, külseje, határa, lezártja, összefüggőség, ívszerű összefüggőség, kompaktság, relatív nyíltság.

Ezekkel kapcsolatban a legfontosabb tételek a következők: nyílt halmazok alaptulajdonságai [2, 21.13 Tétel], zárt halmazok alaptulajdonságai [2, 21.17 Tétel], zárt halmazokból "nem lehet kikonvergálni" [2, 21.16 Tétel], nyílt halmaz összefüggősége és ívszerű összefüggősége ekvivalens [2, 21.21 Tétel], Cantor tétele egymásba ágyazott kompakt halmazokról [2, 21.24 Tétel], Borel tétele kompakt halmazok karakterizációjáról [2, 21.30 Tétel].

Az $\mathbb{R}^p$ topológiájával kapcsolatos feladatok: 7– 20.

2. hét február 17-23

Témakör: Pontsorozatok konvergenciája és kapcsolata a topológiai fogalmakkal.

Itt a legfontosabb fogalmak és tételek a következők: a konvergencia definíciója [2, 21.2 Definíció], a konveregecia ekvivalens a koordinátánkénti konvergenciával [2, 21.4 Tétel], a határérték egyértelműsége és kompatibilitása a vektortér műveletekkel [2, 21.5, 21.6 Tétel], Cauchy kritérium [2, 21.7 Tétel], Bolzano-Weiersrass tétel [2, 21.8 Tétel]

Sorozatok konvergenciájával kapcsolatos feladatok: 21– 23,

Témakör: $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények pontbeli határértéke.

Itt a legfontosabb fogalmak és tételek a következők: a határérték $\varepsilon - \delta$ definíciója [2, 21.32. Definíció], átviteli elv [2, 21.37 Tétel], a pontbeli határérték és a műveletek kapcsolata [2, 21.39 Tétel].

Függvények pontbeli határértékevel kapcsolatos feladatok: 24.

Megjegyzés: Mindig feltehetjük, hogy a határértéket az origóban nézzük, hiszen különben eltoljuk a változókat. A többváltozós határértékek kiszámítására azonban nincs "királyi út". Az egyváltozós esetben a L'Hospital szabály az esetek többségében eredményre vezet, de a többváltozós esetben nincs ilyen egységes hatékony módszer. A kétváltozós esetben három trükköt tanultunk, amelyek időnként alkalmazhatóak: polárkoordinátás helyettesítés ($x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$), egyenes mentén az origóba tartás ($y = mx$), hatványfüggvény mentén az origóba tartás ($y = cx^\gamma$ megfelelő γ kitevővel).

Függvények folytonossága, és a folytonos függvények kapcsolata topologikus fogalmakkal.

Itt a legfontosabb fogalmak és tételek a következők: a folytonosság $\varepsilon - \delta$ definíciója [2, 21.41. Definíció], átviteli elv [2, 21.43. Tétel], folytonosság kapcsolata a műveletekkel [2, 21.45. Tétel], összetett függvény folytonossága [2, 21.49. Következmény], Weierstrass min-max tétele [2, 21.50. Tétel], Heine tétele a kompakt halmazon folytonos függvény egyenletes folytonosságárol [2, 21.52. Tétel] (ezt nem bizonyítottuk, de hasonlóan megy, mint az egyváltozós esetben), a folytonosság topologikus jellemzése (nyílt őskepe nyílt, órán vett bizonyítással).

Függvények folytonosságaval kapcsolatos feladatok: 25– 27.

Témakör: Parcialis deriváltak

Itt a legfontosabb fogalmak és tételek a következők: a parciális deriváltak definíciója [2, 21.55. Definíció], lokális szélsőértékek [2, 21.58. Definíció], lokális szélsőérték szukséges feltétele [2, 21.59. Tétel], függvény minimuma és maximuma kompakt halmazon [2, 21.60. Tétel], másodrendű parciális deriváltak [2, 21.79. Definíció].

Parciális deriváltakkal kapcsolatos feladatok: 28– 31.

---

3. HÉT FEBRUÁR 24- MÁRCIUS 1

Témakör: $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatósága és a differenciálás alkalmazásai

Itt a legfontosabb tételek es fogalmak a következők: a differenciálhatóság definíciója [2, 21.62. Definíció], differenciálható függvény folytonos [2, 21.65. Tétel], a deriváltvektor előállítása parciális deriváltakkal [2, 21.66. Tétel], a parciális deriváltak folytonossága elegendő a differenciálhatósághoz [2, 21.65. Tétel], az érintősík egyenlete [2, 21.73, 21.74 Definíció], iránymenti derivált [2, 21.75. Definíció], az iránymenti derivált kiszámítása [2, 21.76. Tétel], Lagrange középértéktétel [2, 21.78. Tétel], Young tétele a vegyes parciális deriváltakról kettő és több változóban [2, 21.81, 21.85. Tétel], Taylor-polinom definíciója ($n = 1, 2$-re) [2, 21.94. Definíció], a Taylor-polinom közelítő tulajdonsága (bizonyítás nélkül) [2, 21.98. Tétel], pozitív definit, negatív definit és indefinit kvadratikus alakok [2, 21.99. Definíció], lokális szélsőérték feltételei a második deriválttal [2, 21.100. Tétel], konvex halmazok és konvex függvények definíciója [2, 21.102, 21.103 Definíció], a konvexitás és a második derivált kapcsolata [2, 21.105. Tétel]

Megjegyzés: egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény deriváltjára több elnevezés és jelölés is használatos: deriváltvektor, gradiens, differenciál, $f'(\mathbf{a}), \mathrm{grad} f(\mathbf{a}), \nabla f(\mathbf{a})$.

A differenciálással és annak alkalmazásaival kapcsolatos feladatok: 32– 38.

---

4. HÉT MÁRCIUS 2-8

Témakör: $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények

Itt a legfontosabb fogalmak es tételek a következők: a folytonosság $\varepsilon - \delta$ definíciója [2, 22.03. Definíció], f folytonossága és a koordinatafüggvények folytonossága [2, 22.4. Tétel], kompakt halmaz folytonos képe kompakt [2, 22.7. Tétel], kompakt halmazon injetktív folytonos függvény inverze folytonos [2, 22.8. Tétel], egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény differenciálhatósága [2, 22.11. Definíció], a derivált-mátrix (avagy Jacobi-mátrix) kifejezése a parciális deriváltakkal [2, 22.13. Tétel, 22.15 Definíció], a derivált egyértelműsége [2, 22.14. Következmény], a differenciálás kompatibilitása a vektortér műveletekkel [2, 22.19. Tétel], lánc-szabály [2, 22.20. Tétel], szorzat és hányados differenciálása [2, 22.25. Tétel], inverz függvény deriváltja [2, 22.26. Tétel].

Megjegyzés: az inverz függvény differenciálásánál egyelőre kénytelenek vagyunk feltenni, hogy az inverz függvény egy kis környezetben létezik.

Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények differenciálásával kapcsolatos feladatok: 39– 49.

5. HÉT MÁRCIUS 9-15

Témakör: inverzfüggvény-tétel, implicitfüggvény-tétel, Lagrange-féle multiplikátor elv (feltételes szélsőérték létezésére).

Itt a legfontosabb fogalmak es tételek a következők: folytonos differenciálhatóság definíciója [2, 22.31. Definíció], lokális injektivitás tétele [2, 22.32. Tétel], lokális szürjektivitás tétele [2, 22.35. Tétel], Banach-féle fixponttétel [2, 22.36. Tétel], nyílt leképezések tétele [2, 22.37. Következmény], inverzfüggvény-tétel [2, 22.38. Tétel], implicitfüggvény-tétel [2, 22.40. Tétel], feltételes lokális szélsőérték definíciója [2, 22.42 Definíció], Lagrange-féle multiplikátor elv [2, 22.44. Tétel].

Megjegyzés: vegyük észre, hogy az inverzfüggvény-tételben már nem szükséges feltennünk, hogy az inverz függvény lokálisan létezik, mert ez már következik a derivált-mátrix invertálhatóságából és a folytonos differenciálhatósági feltételből.

Az implicitfüggvény tétellel és Lagrange-féle multiplikátor elvvel kapcsolatos feladatok: 50– 52

6. HÉT MÁRCIUS 16-22

Szünet a járvány miatt.

7. HÉT MÁRCIUS 23-29

Az eddigi anyagok összefoglalása, és készülés az első zh-ra.

A feladatsorban a "standard" feladatokat megjelöltem egy ° jellel. Az első zh-n 7 darab feladat várható, amelyek közül legalább 6 "standard" feladat lesz. Tehát a zh-ra való felkészülés ajánlott módja a ° jelű feladatok megoldása. A legtöbb feladathoz adtam mintamegoldást (remélem a számolások jók; aki hibát talál, kérem jelezze). A zh-n legfeljebb egy "nem-standard" feladat lesz a felölelt témakörökből.

8. HÉT MÁRCIUS 30 - ÁPRILIS 5

Konzultáció, első zh, és a többváltozós integrálás elkezdése.

Az online konzultáció időpontja: március 30, 9.00-10.00, 12.00-13.00

A zh időpontja április 1, reggel 9.00-10.45.

Elkezdjük a többváltozós integrálás témakörét. A következő 4-5 hétben kisebb hangsúly fog kerülni az elméletre, és nagyobb a feladatok megoldására. Most ebben a részben még lesz egy elméleti bevezető, ahol megismerkedünk a Jordan-mértékkel és a többváltozós függvények integrálhatóságával, de hamarosan áttérünk integrálási technikákra, formulákra, ahol a bizonyítások néhol nehézkesek, aprólékosak, és jórészt átugorjuk őket. Viszont a feladatokban lesz egy csomó technika, amit meg kell tanulni használni.

Témakör: a Jordan-mérték, és többváltozós függvények integrálása.

Megjegyzés: a Jordan-mérték megpróbálja a "terület" és "térfogat" intuitív fogalmát matematikailag precizzé tenni. Ez valamennyire sikerül is, de a későbbi szemeszterekben Analízis 2-ből látni fogjátok, hogy az általanosabb Lebesgue-mérték sokkal jobban használható az analízisben különböző hasznos elméleti tulajdonságai miatt. Ezért a Jordan-mértékbe most nem fogunk nagyon belemélyedni, csak néhany bizonyítást nézünk meg, és a nehézkesebb tételeket bizonyítás nélkül elfogadjuk.

Megjegyzés 2: talán még fontosabb az a megjegyzés, hogy az ember bármilyen mértéket is épít magának (Jordan, Lebesgue, stb), mindig abból indul ki, hogy egy téglatest mértéke az oldalai szorzata. Ezután pedig mindig eljutunk odáig, hogy a "hétköznapi" halmazok mértéke meg fog felelni annak, amit intuitívan amúgy is a területnek vagy térgfogatnak gondolunk. Tehát "hétköznapi" halmazok esetében a Jordan-mérték és Lebesgue mérték nem különböznek egymástól. A különbség ott jelenik meg, amikor "furcsa" halmazok mértékére vagyunk kiváncsiak: pl. ha $A \subset [0,1]^2$ a racionális koordinátájú pontok halmaza, akkor mi legyen A mértéke? Az derül ki, hogy a Jordan-mértéke nem értelmes, de a Lebesgue mértéke 0.

Itt a legfontosabb tételek és fogalmak a következők: a Jordan-mérhetőség és a Jordan-mérték definíciója a $b(A)$ belső mérték és $k(A)$ külső mérték segítségével ([2], 23. fejezet eleje), a $b_{(n)}(A), k_{(n)}(A)$ mérőszámok bevezetése, amit jól illusztrál [2]-ben a 23.1 ábra, a $k_{(n)}(A) \to k(A), b_{(n)}(A) \to b(A)$ határátmenetek [2, 23.2. Tétel] (bizonyítással), a Jordan-nullmértékűség definíciója [2, 23.6. Definíció], a Jordan-mérték és a halmaz határának kapcsolata [2, 23.5., 23.7 Tétel] (bizonyítással), a Jordan-mérhetőség és a halmazműveletek [2, 23.14. Tétel] (bizonyítás nélkül), a Jordan-mérték additív, eltolás-invariáns, normált [2, 23.15. Tetel] (bizonyítás nélkül), egy p-dimenziós alakzat térfogatának kiszámítása a szekciók integrálásával [2, 23.22. Tétel] (itt nézzétek meg az [1, 15.8. Tétel] bizonyítását, ami a kétváltozós eset), egy p-dimenziós kúp mértékének (térfogatának) kiszámítása [2, 23.23. Tétel] (bizonyítással), egy p-dimenziós gömb térfogatának kiszámítása [2, 23.25. Tétel] (bizonyítással), egy paralelepipedon térfogatának kiszámítása determinánssal [2, 23.28. Tétel] (biz. nélkül), a lineáris transzformációk és a Jordan-mérték kapcsolata [2, 23.32. Tétel] (biz. nélkül).

Többváltozós függvények integrálása: a 24. fejezet eleje bevezeti a többváltozós függvények integrálhatóságának fogalmát, amit pontosan úgy csinálunk, mint a Riemann-integrálást egy változóban. Intuitívan az történik, hogy amikor adott egy kétváltozós $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, akkor a függvénygrafikon egy domborzatot ír le, és azt szeretnénk kiszámolni, hogy mennyi az alapsík és ezen domborzat közé eső térfogat. Például az alapsík a Duna síkja, a domborzat a Gellért-hegy, és azt akarjuk kiszámolni, hogy mennyi a hegy térfogata. Persze a legegyszerűbb eset az, amikor a hegy alapja, azaz $Dom(f)$, téglalap alakú. Ezt taglalják a 24.1-24.7-ig tartó definíciók és tételek, ezeknek a részleteit nem kell megtanulni. Ezután áttérünk arra az esetre, amikor $Dom(f)$ nem téglalap alakú, hanem egy tetszőleges Jordsan mérhető tartomány. Itt is minden hasonlóan megy, és ezt az esetet tárgyalja a 24.8-24.11-ig tartó rész. Mivel nagyon hasonló az egyváltozós a Riemann-integrál felépítéséhez, ezt sem kell részletesen megtanulni, elég egyszer átnézni. Fontos speciális eset, hogy ha f folytonos, akkor integrálható is [2, 24.16. Tetel] (biz. nélkül), csakúgy mint az egyváltozós esetben.

Ennyi elméleti bevezető után végre rátérünk arra, hogy hogyan kell többváltozós integrálokat kiszámolni.

A [2, 24.19. Tétel], és legfőképp utána a [2, 24.21. Következmény] azt mondja, hogy ha téglatest felett integrálunk, akkor azt megtehetjük változónként szukcesszíven. A 24.22-es példa ezt jól illusztrálja. A 24.23 Megjegyzés 3. pontja azt mondja, hogy a változók sorrendje mindegy, ha f "elég szép" (pl. folytonos): ezt érdemes megjegyezni, mivel lényegileg ez nem más, mint a sokszor használt Fubini-tétel (ennek általános alakját megint csak a Lebesgue-mértékkel szokás kimondani). Ha nem téglalapon integrálunk, akkor az integrációs tartományt paraméterezni kell: erre mutatok peldát az (54) feladatban.

A helyettesítéses integrálás többváltozós megfelelője a [2, 24.24. Tétel] (bizonyítás nélkül). Ennek egy tipikus alkalmazása a polárkoordinátás helyettesítés, [2, 24.27. Tétel], amire mutatok egy példát a (62) feladatban. További nagyon érdekes példa a 24.28 Példák közül a 3, amely a Gauss-féle haranggörbe alatti területet számolja ki, ezt nézzétek meg.

A beadandó házi feladatokat is kitűztem. A feladatsorban lásd a HF jelű feladatokat. Ezeket kötelező beadni, és ezek pontszáma fogja kiegészíteni a röpzh pontszámokat, ahogy korábban megíratm. Akinek a feladatokkal vagy az elméleti anyaggal kapcsolatban kérdése van, az jelezze emailben, és ez esetben tartok konzultációt 2020.04.06-án 9.00-tól 10.00-ig és/vagy 12.00-tól 13.00-ig.

9. hét április 6-12

A korábbi beadandó HF-ek beadási határideje: április 8, 16.00 (már lejárt).

Ahogy ígértem, ezen a héten az elméleti bizonyításokat átugorjuk, és csak integrálási technikákat és formulákat gyakorlunk. Az itt megadott feladatokon kívül hasonló feladatok vannak tömegével a Babcsányi-féle feladatgyűjteményben [3], amely szintén elérhető a honlapomon.

Témakör: hengerkoordináták, gömbi koordináták, ívhossz kiszámítása, vonalmenti integrál kiszámítása, felületi normálvektor megadása, felszín kiszámítása, felületi integrál kiszámítása.

Itt a legfontosabb fogalmak és képletek a következők:

Ha $\mathbb{R}^3$-ban az integrációs tartomány egy henger vagy kúp, akkor érdemes úgynevezett hengerkoordinátákra áttérni, azaz: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = m$, ahol az (x, y, z) pontot levetítjük az xy-síkra, és r és φ az ottani polárkoordinátás értékek (és ebből adódoan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, amit azért jegyzek meg külön, mert eltérés lesz a gömbi koordinátákhoz képest), valamint a z koordinátát meghagyjuk változatlanul, de a jobb áttekinthetőség kedvéért itt is egy új változót vezetünk be $z = m$ jelöléssel. Ekkor az áttérés Jacobi-determinánsa r, ezt kell az integrációs formulában szorzóként használni a behelyettesítés után. Erre mutatok egy példát a (65) feladatban.

Ha $\mathbb{R}^3$-ban az integrációs tartomány egy gömb, akkor érdemes úgynevezett gömbi koordinátákra (vagy más néven "térbeli polárkoordinátákra") áttérni, azaz $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, ahol az (x, y, z) pontot az origóval összekötő szakasz hossza r (figyelem: ez nem egyenlő a hengerkoordinátáknál bevezetett r-rel, hiszen itt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), ugyanezen szakasznak a felfelé mutató z-féltengellyel bezárt szöge θ, és az (x, y, z) pont xy-síkra vett vetületének polárkoordinátás szöge φ. Ekkor az áttérés Jacobi-determnánsa $r^2 \sin\theta$, ezt kell az integrációs formulában szorzóként használni a behelyettesítés után. Erre mutatok egy példát a (67) feladatban.

Egy folytonosan differenciálható $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ térgörbe ívhossza: $s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$. Ezt mondja ki a [1, 15.21. Tétel]. Erre mutatok példát a (68) feladatban.

Megjegyzem, hogy az ívhossz nem függ a görbe paraméterezésétől, azaz ha $r_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ és $r_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ ugyanazt a görbét paraméterezi (ennek pontos értelmezéséhez lásd a [1, 15.21. Tételt]), akkor a hozzájuk tatozó két integrál ugyanazt az értéket adja. Ezt is várja el az ember.

A vonalmenti integrál (más néven: vonalintegrál, görbementi integrál) abból a fizikai alkalmazásból indul ki, hogy szeretnénk kiszámolni, hogy egy adott "erőtér" mennyi munkát végez egy adott pályán mozgó testen. Ehhez legyen $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az adott erőtér (minden pontban adott, hogy mekkora az erő nagysága, és merre mutat), és legyen $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ az adott görbe. Ekkor a vonalmenti integrál: $\int_a^b \langle \mathbf{v}(r(t)), r'(t)\rangle dt$. Ezt mondja ki a [2, 25.8. Tétel]. A vonalmenti integrál jelölésére használatosak az $\int_G \mathbf{v}(r)dr$ illetve szimplán az $\int_G \mathbf{v}$ jelölések. Erre mutatok példát a (74) feladatban. Különösen érdekes az az eset, amikor az erőtér egy "potenciálfüggvény" deriváltja, azaz létezik egy olyan $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $V'(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y, z)$. Ekkor ugyanis érvényes a Newton-Leibniz szabály általanos alakja, és a vonalintegral csak a végpontoktól függ: $\int_a^b \langle \mathbf{v}(r(t)), r'(t)\rangle dt = V(r(b)) - V(r(a))$. Ezt mondja ki a [2, 25.11. Tétel]. Ezért különösen érdekes az a kérdés, hogy egy adott $\mathbf{v}$ erőtér vajon potenciálos-e, azaz létezik-e olyan V, hogy $V' = \mathbf{v}$. Egyelőre ezt függőben hagyjuk, erre még visszatérünk.

Megjegyzem még azt, hogy a vonalmenti integrál értéke nem függ a görbe paraméterezésétől, azaz: ha $r_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ és $r_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ ugyanazt a görbét paraméterezi (ennek pontos értelméhez lásd a ... feladatot), akkor $\int_a^b \langle \mathbf{v}(r_1(t)), r_1'(t)\rangle dt = \int_c^d \langle \mathbf{v}(r_2(t)), r_2'(t)\rangle dt$.

Egy felület $\mathbb{R}^3$-ben általánosan úgy adható meg, hogy tekintünk egy $r(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^3$ függvényt, ahol az u, v paraméterek valamely síkbeli tartományt futnak végig. Ezt taglalja [2]-ben a 25. fejezet 208. oldalon kezdődő része. A felület valamely rögzített (u_0, v_0)-hoz tartozó $r(u_0, v_0)$ pontjában az érintősík normálvektora $\mathbf{n} = r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$, ahol $\times$ vektoriális szorzatot jelöl, és r_u, r_v a megfelelő parciális deriváltak. Az érintősík egyenlete a normálvektor ismeretében felírható. Erre mutatok példát a (70) feladatban.

Legyen adva egy $r(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^3$ paraméterezesű S felület, ahol u, v befut egy $[a, b] \times [c, d]$ téglalapot (az egyszerűség kedvéért téglalapot tekintünk; ha a tartomány más, akkor a képleteket úgy kell módosítani, hogy a tartományt először paraméterezzük u, v szerint). Mi történik, amikor az (u, v)-síkon egy kis $\delta u, \delta v$ nagyságú téglalapon mozgunk? Intuitívan látszik, hogy ekkor a felületen lényegében egy r_u és r_v által kifeszített paralellogrammán mozgunk. Ezért az ehhez tartozó kis felületdarab felszíne körülbelül $|r_u \times r_v|$. Ezt taglalja [2] a 209-210 oldalon, és ez vezet [2, 25.40. Definíció]-hoz: az $r(u, v)$ által leírt S felület felszíne $F_S = \int_{u=a}^{b} \int_{v=c}^{d} |r_u(u, v) \times r_v(u, v)| dv du$. Erre mutatok példát a (72) feladatban.

Itt is megjegyzem, hogy a felszín értéke nem függ a felület paraméterezésétől, azaz: ha $r_1(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^3$ és $r_2(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^3$ ugyanazt a felületet paraméterezi (megfelelő értelemben), akkor a felszíni integrálok értéke megegyezik. (Ezt is várja el az ember: egy felület felszíne nem függhet attól, hogy milyen függvénnyel írjuk le a felületet.)

Ha adott egy $r(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^3$ paraméterezésű S felület, és valamilyen anyag áramlik a térben (például egy gáz, amelynek áramlását egy adott időpontban szintén egy $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény írja le, azaz megmondja, hogy adott helyen milyen irányú és milyen nagyságú az áramlás), akkor megkérdezhetjük, hogy az adott időpontban mennyi anyag áramlik át a felületen. Ezt egy felületi integrállal számítjuk ki. Megint könnyű intuitívan elképzelni, hogy egy kis r_u és r_v által kifeszített paralellogrammán átáramló anyagmennyiség körülbelül $\langle \mathbf{v}(r(u_0, v_0)), \mathbf{n} \rangle$, ahol $\mathbf{n}$ a normálvektor, azaz $\mathbf{n} = r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$. Tehát a felületi integrál képlete: $\int_{u=a}^{b} \int_{v=c}^{d} \langle \mathbf{v}(r(u, v)), r_u \times r_v \rangle dv du$. A felületi integrálra használatos az $\int \mathbf{v} dS$ jelölés. Erre mutatok példát a (76) feladatban.

Itt is megjegyzem, hogy a felületi integrál értéke fügetlen a felület paramétrezésétől.

10. hét április 13-19

A korábbi beadandó HF-ek beadási határideje: április 15, 16.00 (már lejárt).

Témakör: divergencia, rotáció és gradiens definíciói és összefüggései, a primitív függvény létezésének feltételei, integrálredukciós tételek.

A továbbiakhoz szükségünk lesz a *divergencia, rotáció* és *gradiens* fogalmára. Ezek közül a gradienst már ismerjük, hiszen az nem más, mint egy $f : \mathbb{R}^p \to R$ függveny deriváltja: $\text{grad} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})$. Egy $F = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény divergenciája egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ pontban $\text{div} F(\mathbf{x}_0) = \partial_1 f_1(\mathbf{x}_0) + \partial_2 f_2(\mathbf{x}_0) + \partial_3 f_3(\mathbf{x}_0)$, míg rotációja $\text{rot} F(\mathbf{x}_0) = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$. Jegyezzük meg, hogy a divergencia egy szám, míg a rotáció egy vektor. Ezeknek fizikai értelme van: az $\mathbf{x}_0$ pont köré vonjunk egy kicsi V térfogatú gömböt, és nézzük meg az F függvény felületi integrálját ennek a gömbnek az S felszínén (lenormálva a V térfogattal), és tartsunk a sugárral 0-hoz. Az derül ki, hogy ekkor $\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int F dS = \text{div} F(\mathbf{x}_0)$. Ha úgy képzeljük, hogy a felületi integrál azt adja meg, hogy mennyi anyag áramlik ki a gömb felszínén, akkor a divergenciára úgy gondolhatunk, hogy annyi anyag "keletkezik" az $\mathbf{x}_0$ pontban. Ez magyarázza, hogy ha egy F vektormezőre $\text{div} F(\mathbf{x}) = 0$ minden $\mathbf{x}$ esetén, ahogy $\mathbf{x}$ befut egy $H \subset \mathbb{R}^3$ tartományt, akkor F-et *forrásmentesnek* nevezzük H-n. A $\text{rot} F(\mathbf{x}_0)$ pedig azt adja meg, hogy az F által leírt anyag mennyire "örvénylik" az $\mathbf{x}_0$ pontban (a $\mathrm{rot}F(\mathbf{x}_0)$ iránya adja meg az örvénylés síkjának normálvektorát, a nagysága pedig az örvénylés erősségét; ezt nem pontosítom). Ez magyarázza, hogy ha egy F vektormezőre $\mathrm{rot}F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ minden $\mathbf{x}$ esetén, ahogy $\mathbf{x}$ befut egy $H \subset \mathbb{R}^3$ tartományt, akkor F-et *örvénymentesnek* (vagy konzervatívnak) nevezzük H-n.

A fenti mennyiségek könnyen megjegyezhetőek, ha formálisan bevezetjük a $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ vektort, és ezzel $\mathrm{grad}f = \nabla f$, $\mathrm{div}F = \langle \nabla, F \rangle$, és $\mathrm{rot}F = \nabla \times F$.

Bevezetjük még a nevezetes Laplace operátort, amely számos fizikai alkalmazásban szerepel: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eseten $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

A fenti fogalmak között egyszerű számolással a következő összefüggések bizonyíthatók:

$\mathrm{div}(\mathrm{grad}f) = \Delta f$

$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) = \mathbf{0}$

$\mathrm{div}(\mathrm{rot}F) = 0$

A fenti fogalmak segítségével néhány érdekes tételt fogalmazhatunk meg.

Először is visszatérünk arra a kérdésre, hogy hogyan dönthető el, hogy egy adott $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény valamely $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvény gradiense-e. Ha $F = \mathrm{grad}f$ akkor a [2, 25.11. Tétel] miatt F minden zárt görbe menti integrálja 0. Nem nehéz belátni, hogy ez a tulajdonság elég is ahhoz, hogy F egy f függvény gradiense legyen: ezt mondja ki a [2, 25.14. Tétel]. Továbbá a fenti $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) = \mathbf{0}$ képlet szerint $\mathrm{rot}F = \mathbf{0}$ teljesül. Ez egyébként azzal ekvivalens (a $\mathrm{rot}F$ definíciójából azonnal láthatóan), hogy F Jacobi-marixa szimmetrikus. A megfordítás sajnos itt nem mindig teljesül, de például konvex tartományokon igen: ha $\mathrm{rot}F = \mathbf{0}$ teljesül egy konvex K tartományon, akkor létezik olyan $f : K \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\mathrm{grad}f = F$ (f-et az F skalárpotenciáljának nevezzük). Ezt mondja ki a [2, 25.22. Tétel]. Ráadásul az f függvény meg is található egyszerűen úgy, hogy egy tetszőlegesen kijelölt $\mathbf{x}_0 \in H$ pontban $f(\mathbf{x}_0) = 0$ értéket definiálunk, és bármely $\mathbf{x} \in H$ esetén tekintjük az $\mathbf{x}_0$-ból $\mathbf{x}$-be menő G szakaszt, és kiszámoljuk a $\int_G F$ vonalintegrált. Erre mutatok példát a (83) feladatban.

A második érdekes összefüggés az úgynevezett *divergencia tétel* (avagy Gauss-Osztogradszkij tétel), amely egy felületi integrál és egy térfogati integrál egyenlőségét mondja ki. Arról van szó, hogy ha van egy korlátos tarományunk (példaul egy B gömb) amelynek zárt felülete S (a gömbfelszín), és adott egy F vektormező, akkor az $\int FdS$ felületi integrál azt mondja meg, hogy mennyi anyag távozik a gömb felületén keresztül, és intuitívan ez meg kell egyezzen a gömbön belül "keletkező" anyag mennyiségével, amit viszont az F divergenciájával tudunk megadni. Ezért $\int_B \mathrm{div}F = \int FdS$ teljesül. Ez a divergencia tétel, azaz a [2, 25.47. Tétel] első formulája. Erre mutatok példát a (85) feladatban.

11. hét április 20-26

További érdekes összefüggés a Stokes-tétel. Ehhez vegyünk egy $G \subset \mathbb{R}^3$ zárt görbét, és egy olyan S felületet, amelyet G határol (gondoljunk egy lepkehálóra, amelynek pereme a G görbe, és maga a háló pedig az S felület). Tegyük fel, hogy a felületi normálvektor felől visszanézve a G görbe pozitív irányítású (órajárással ellentétes). Legyen továbbá $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor

$$\int F dG = \int \mathrm{rot} F dS,$$

ahol a bal oldalon az F-nek a G görbe menti vonalintegrálja, a jobb oldalon pedig rot$F$-nek az S felületmenti integrálja áll. Ennek alkalmazására mutatok példát a (101)-(103) feladatokban. (A Stokes-tétel ebben a formában nem szerepel a [2] könyvben, de megtalálható a [3] feladatgyűjteményben a 18-8 fejezetben.)

Felraktam egy összefoglaló feladatsort a többváltozós integrálás témaköréből. A standard feladatok (majdnem mind az) megint ° jellel vannak ellátva. Ez most csak gyakorló feladatsor, nincs belőle új beadandó HF. A nem-standard feladatokra írok majd megoldásokat, addig lehet rajtuk gondolkodni.

12. hét április 27- május 3

Ezen a héten elkezdjük a függvénysorozatok és függvénysorok témakört.

A [2] 26. fejezete a numerikus sorok alapvető tulajdonságait foglalja össze, és ezek már nagyrészt szerepeltek Kalkulus 1-ből (egészen a 26.47 tételig; utána a 248. oldaltól van még egy rövid rész a szummabilitásról, ami nem szerepelt Kalkulus 1-ből, de most sem fogjuk megnézni). Esetleg érdemes ezeket átnézni ismétlés gyanánt.

A [2] 27. fejezete rátér a függvénysorozatok vizsgálatára. Az alább felsorolt definíciókat és a tételeknél a bizonyításokat tudni kell. A [2, 27.1. Definíció] definiálja egy függvénysorozat *pontonkénti konvergenciáját.* A [2, 27.2. Példa] rávilágít arra a fontos tényre, hogy folytonos függvények pontonkénti limesze nem feltétlenül folytonos. A [2, 27.5. Definíció] definiálja egy függvénysorozat *egyenletes* konvergenciáját, majd példákat is látunk a [2, 27.6. Példában]. A [2, 27.9. Tétel] megadja az egyenletes kovergencia Cauchy-kriteriumát. A [2, 27.12. Tétel] azt a fontos tényt mondja ki, hogy *folytonos függvények egyenletes limesze folytonos.* A [2, 27.16. Tétel] azt mondja ki, hogy egyenletes konvergenica esetén a limesz és az integrál felcserélhetőek. A [2, 27.15. Példa] viszont azt mutatja meg, hogy pontonkénti limesz esetén ez nem feltétlenül teljesül. A [2, 27.17. Példa] azt mutatja, hogy a deriválással még a függvénysorozat egyenletes konvergenciája esetén is vigyázni kell, mert esetleg a limesz és a deriválás nem felcserelhetőek. Ezután a [2, 27.18. Tétel] megfogalmaz olyan erős feltételeket, amelyek már biztosítják, hogy a limesz és a deriválás felcserélhető. (Itt jegyzem meg, hogy a következő félévben Analízis 1-ből látni fogjuk, hogy ez a tétel lényegében azt jelenti, hogy a deriválás egy *zárt lineáris operátor*; ezt egyelőre nem kell érteni.)

Ezután rátérünk a függvénysorok konvergenciájára. Itt a legtöbb fogalom és állítás egyenes következménye a függvénysorozatokra megfogalmazott megfelelőjének. A [2, 27.20-21. Definíció] definiálja a pontonkénti illetve egyenletes konvergencia fogalmát függvénysorokra. Fontos még az abszolút konvergencia fogalma is: [2, 27.23. Definíció]. A Cauchy-kritérium függvénysorokra a [2, 27.25. Tétel]. Az egyik legfontosabb és legegyszerűbben használható tétel a Weierstrass-kritérium, [2, 27.27. Tétel], amely azt mondja ki, hogy egy $\sum f_n$ függvénysor abszolút és egyenletes konvergenciáját biztosítja az, hogyha létezik egy konvergens $\sum a_n$ nemnegatív majoráns sor. A tagonkénti integrálhatóságról illetve differenciálhatóságról szól a [2, 27.40. Tétel] és a [2, 27.42. Tétel].

A függvénysorok általános elmélete után specifikusan foglalkozunk a hatványsorok és Fourier sorok elméletével. A hatványsorokról már volt szó Kalkulus 1-ben, és most ismétlésként érdemes megnézni a [2, 27.49. Tételt], [2, 27.51. Tételt] és [2, 27.52. Tételt].

A Fourier-sorokról a jövő héten lesz szó.

Az eheti anyaghoz a 10. feladatsor tartozik.

13. hét május 4-10

Ezen a héten rátérünk a Fouier-sorok témakörre, ami [2]-ben a 298. oldalon kezdődik. Érdemes elolvasni a bevezető bekezdéseket, amelyek lényege a követező:

Ha adott egy 2π-szerint periodikus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, akkor vajon f előállítható-e "harmonikus rezgések kombinációjaként", azaz $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ alakban, ahol már az is kérdés, hogy az egyenlóséget hogyan akarjuk érteni. A jobb oldalon álló sort nevezzük f Fourier-sorának, és az a_n, b_n együtthatókat f Fourier-egyutthatóinak (lásd a [2, 27.74. Definíciót]). (Ezzel a definícióval kapcsolatban megjegyzem, hogy minden integrálható függvénynek van Fourier-sora, f folytonosságát nem kell feltenni.) Mivel itt egy függvénysorról van szó, természetes felvetni a pontonkénti illetve egyenletes konvergencia kérdését, és reménykedni, hogy a sor valamelyik értelemben f-hez konvergál.

Talán a legfontosabb alaplemma a [2, 27.72. Lemma], ami azt mondja ki, hogy a cosinus és sinus függvények egymásra merőlegesek a következő természetes értelemben. Ha bevezetjük a $[0, 2\pi]$ felett folytonos fuggvények vektorterén a $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ műveletet, akkor könnyű belátni, hogy ez rendelkezik a skaláris szorzástól elvárt tulajdonságokkal (nem-degenerált, szimmetrikus, bilineáris, pozitív definit), és emiatt mondhatjuk azt, hogy f, g ortogonálisak ha $\langle f, g\rangle = 0$. A fenti lemmában az derül ki, hogy $k \neq n$ esetén a $\cos nx, \cos kx, \sin nx, \sin kx$ fuggvények közül bármely kettő ortogonális egymásra. Ez azért jó, mert ezek után intuitívan úgy gondolhatunk a cosinus és sinus függvényekre, mint egy ortogonális bázisra a 2π-szerint periodikus függvények terében, és alkalmazhatjuk az ortogonális bázis szerinti kifejtesről tanult lineáris algebrai ismereteinket. Konkrétan, ha $e_j \in \mathbb{R}^n$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, akkor akkor egy tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor kifejthető $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ alakban, ahol az együtthatók megkaphatók $\alpha_j = \langle \mathbf{x}, e_j\rangle$ alakban. Pont ezt a kifejtést adja meg a [2, 27.71. Tétel] (ahol a normaló $\frac{1}{\pi}$ tenyezők azert vannak ott, mert a cosinus es sinus fügvények nem normáltak, azaz nem egységnyi hosszúak).

Itt megjegyzek egy nagyon fontos összefüggést bizonyítás nélkül. Egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor hosszát megkaphatjuk a koordinátáinak négyzetösszegéből, azaz $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2$. A *Parseval formula* azt mondja ki, hogy ez a Fourier-soroknál is igaz, azaz $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi|a_0|^2 + \pi(\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2))$, ahol a szorzók megint a normalizáció miatt vannak berakva. Ez a formula nagyon hasznos, és a matematika számos ágában előjön.

Fontos teljességi tulajdonságot mond ki a [2, 27.77. Tétel]: ha egy folytonos 2π-periodikus f függvény minden Fourier együtthatója 0, akkor f azonosan 0 (a bizonyítás kicsit nehézkes, nem kell megtanulni). Lényegében ez biztosítja, hogy a sinus-cosinus függvények tényleg ortogonális *bázist* alkotnak, és ez vezet a fenti Parseval-formulához is; ezt majd Analízis 1-ben általánosabb körülmények között látni fogjuk.

Fontos még a [2, 27.81. Lemma], ami azt az elvet fejezi ki, hogy "minél simább egy függvény, annál gyorsabban tartanak 0-hoz a Fourier-egyutthatói". Ennek egy elegáns alkalmazása a [2, 27.82. Tétel], ami azt mondja ki, hogy ha f kétszer folytonosan differenciálható, akkor a Foruier-sora egyenletesen konvergál hozzá. A bizonyítás kombinálja az előző lemmát a Weierstrass-kritériummal, és meg kell tanulni. Ennek a tételnek szinte azonnali következménye Weierstrass 2. approximációs tétele ([2, 27.84. Tétel]), ami azt mondja ki, hogy tetszőleges folytonos 2π-periodikus f függvény egyenletesen közelíthető trigonometrikus polinomokkal. A bizonyítás annyi, hogy f-et először egy kétszer folytonosan differenciálható g-vel közelítjük egyenletesen, majd g-t közelítjük a saját Fourier-sorának kezdőszeleteivel. Itt az $f \leftrightarrow g$ közelítés bizonyítása kicsit technikai, nem kell megtanulni.

Az eheti anyaghoz a 11. feladatsor tartozik.

14. hét május 11-17

A beadandó HF-ek beadási határideje: május 13, 16.00.

Összefoglaló feladatsor a 2. ZH-ra.

15. hét május 18-24

2. ZH: május 18, 08.15-10.00.

Szükség esetén pótzh-k: május 20, 9.00-10.45.

Feladatok

(1) ° Mutassuk meg, hogy $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq |\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\||$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ esetén.

(2) ° Mutassuk meg, hogy az $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$ illetve az $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq p\}$ teljesítik a norma alaptualjdonságait, azaz $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ (és $\|\mathbf{x}\| = 0$ pontosan akkor ha $\mathbf{x} = 0$), $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$, és $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

(3) ° Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$.

(4) ° Bizonyítsuk be a polarizációs azonosságot $\mathbb{R}^p$-ben:
$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

(5) Legyen A egy $p \times p$-es valós mátrix, és legyen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a szokásos skaláris szorzás $\mathbb{R}^p$-ben. Milyen tulajdonságokkal kell A-nak rendelkeznie ahhoz, hogy $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$ skaláris szorás legyen? (Azaz teljesítse a bilinearitás, szimmetria és pozitív definitség kritériumait.)

(6) ° Legyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ két tetszőleges vektor $\mathbb{R}^p$-ben. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ pontosan akkor ortogonálisak, ha $\|\mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|$ teljesül minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.

(7) Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, és $r > 0$. Mutassuk meg, hogy a $B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < r\}$ gömb nyílt halmaz, és a $\overline{B(\mathbf{x}, r)} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leq r\}$ valamint az $S(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = r\}$ zárt halmazok.

(8) Mutassuk meg, hogy $A \subset \mathbb{R}^p$ esetén $int(A) \cup \partial(A) \cup ext(A) = \mathbb{R}^p$, és az unió diszjunkt.

(9) ° Tekintsük a $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ halmazt. Mi lesz $int(Q^2), \partial(Q^2), ext(\mathbb{Q}^2)$?

(10) Mutassuk meg, hogy $int(A)$ nyílt minden $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz esetén.

(11) Mutassuk meg, hogy ∂A zárt minden $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz esetén.

(12) Legyen C a Cantor halmaz $\mathbb{R}$-ben (a $[0,1]$ intervallumból kiindulva mindig elhagyjuk a megmaradt intervallumok középső harmadát). Mutassuk meg, hogy $int(C) = \emptyset$.

(13) Mutassuk meg, hogy ha $A \neq \emptyset, \mathbb{R}^p$ akkor A nem lehet egyszerre nyílt és zárt. (Ehhez mutassuk meg, hogy ha $A \neq \emptyset, \mathbb{R}^p$, akkor $\partial A \neq \emptyset$.)

(14) ° Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 2, 0 < y < x^2\}$ és $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y = \sin \frac{1}{x}\}$. Rajzoljuk fel az A, B halmazokat, és határozzuk meg az $intA, intB, \partial A, \partial B$ halmazokat.

(15) ° Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 < 9, x - y \geq 1, y > 0\} \cup \{(x, 4) : -1 < x < 1\}$. Rajzoljuk fel az A halmazt, és határozzuk meg az $intA, \partial A$ halmazokat.

(16) $^\circ$ Legyen $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/n\ (n = 1, 2, \dots), y \in (0, 1)\}$. határozzuk meg az $int(A_2)$ és $\partial(A_2)$ halmazokat.

(17) Mutassunk példát olyan G_n nyílt halmazokra, amelyekre $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ nem nyílt.

(18) Mutassunk példát olyan $F_1 \supset F_2 \dots$ nem-üres zárt halmazokra, amelyekre $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

(19) Mutassunk példát olyan $A_1 \supset A_2 \dots$ nem-üres, korlátos halmazokra, amelyekre $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

(20) Mutassuk meg, hogy $B \subset A$ pontosan akkor relatív nyílt A-ban, ha minden $\mathbf{b} \in B$ estén létezik olyan $r > 0$, hogy $B(\mathbf{b}, r) \cap A \subset B$.

Gyakorló feladatok 2.

(21) Mutassuk meg a konvergens sorozatok alaptulajdonságait: konvergens sorozat határértéke egyértelmű, és ha $\lambda \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, akkor $\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n \to \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\lambda \mathbf{x}_n \to \lambda \mathbf{x}$.

(22) $^\circ$ Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ akkor $\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{b} \rangle \to \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

(23) $^\circ$ Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ és $\mathbf{y}_n \to \mathbf{b}$ akkor $\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle \to \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

(24) $^\circ$ Számítsuk ki a következő határértékeket (ha léteznek):

$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x-2}{y-3}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^2 y^5}}{x^2+y^2}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x - \sin y}{x-y}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x)^y$

$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-1}{x-1}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-4y+5}-1}{x^2+y^2-4y+4}$

(25) Legyen $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos $\mathbf{a} \in Domf \cap Domg$-ben. Mutassuk meg, hogy $f + g$ és $f \cdot g$ is folytonosak $\mathbf{a}$-ban. Valamint, ha $g(\mathbf{a}) \neq 0$ akkor f/g is folytonos $\mathbf{a}$-ban.

(26) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy g folytonos $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$-ben, és f folytonos $g(\mathbf{a})$-ban. Mutassuk meg, hogy $f \circ g$ folytonos $\mathbf{a}$-ban.

(27) $^\circ$ Mutassuk meg, hogy a $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2y^4 + x + 3y + 7 \leq 15\}$ halmaz kompakt.

(28) ° Számítsuk ki a következő függvények parciális deriváltjait:

$$f(x,y) = \sin xy + xy^2 - \ln(x+y)$$

$$f(x,y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x,y,z) = \arctan(x^2+y^4+z^6+1)$$

(29) ° Legyen $f(x,y,z) = x^3 + y^4 + x^2ye^{2z}$. Számítsuk ki f összes legfeljebb másodrendű parciális deriváltját (azaz $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial z}$, stb. kifejezéseket).

(30) ° Mennyi a minimuma és maximuma az $f(x,y) = xy^2(2-x-y)$ függvénynek a $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x, 0 \le y, x+y \le 6\}$ halmazon?

(31) ° Határozzuk meg az $x^3 + y^2 - xy$ függvény minimumat és maximumát a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten.

Gyakorló feladatok 3.

(32) ° Tekintsük a $z = \frac{16}{xy}$ egyenlettel adott felületet. Adjuk meg az érintősík egyenletét az $(x,y,z) = (1,2,8)$ pontban.

(33) ° Legyen $f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1,2)$, $\mathbf{u} = (-3,4)$. Adjuk meg f $\mathbf{u}$ iránymenti deriváltját az (x_0, y_0) pontban (Először normalizáljuk $\mathbf{u}$-t!)

(34) ° A $z = x^2y + xy^2 + x + 3y - 1$ egyenlettel leírt domborzat $(4,1,26)$ pontjában egy forrás ered. Milyen irányban kezd el folyni?

(35) ° Keressük meg a következő függvények lokális szélsőértékeit (ahol tudjuk, döntsük el, hogy globális szélsőértékről van-e szó):

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$$

$$f(x,y) = x^3y^2(2-x-y)$$

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

$$f(x,y) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{1}{y}$$

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 9xy$$

(36) ° Adjuk meg a következő függvények másodrendű Taylor polinomját a megadott pontokban:

$f(x,y) = \frac{x}{y}$, $(1,2)$-ben

$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$, $(1,2,3)$-ban

$f(x,y) = \sin(x+2y)$, $(\pi/4, \pi/6)$-ban.

$f(x,y) = (1+e^{4x})\sin(xy) + 3y - 2$, $(0,1)$-ben.

(37) Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható egy $\mathbf{a}$ pont egy $B(\mathbf{a}, r)$ környezetében. Legyen $\mathbf{b} \in B(\mathbf{a}, r)$, és legyen $F(t) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))$, $t \in [0, 1]$. Mutassuk meg, hogy ekkor minden t-re $F'(t) = \langle f'(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})), \mathbf{b}-\mathbf{a}\rangle$, és $F''(t) = \langle f''(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \mathbf{b} - \mathbf{a}\rangle$.

(38) ° Találjuk meg azt a maximális tartományt ahol az $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$ függvény konvex.

Gyakorló feladatok 4.

(39) ° Adjuk meg a következő függvények deriváltját (azaz Jacobi mátrixát):

$$f(x, y) = (x^2 y, x + y, ye^x)$$

$$f(x, y) = (\sin(x - 3y), \ln(x + y))$$

$$f(x, y, z) = (x + y^2 + z^3, z^4 \sin(ye^x))$$

(40) ° Legyen $f(t) = \left(t^2 - t, \frac{1}{1+t^2}, e^t\right)$, $g(x, y, z) = x^2 y - z$, and $t_0 = 1$, $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$. Adjuk meg az $(f \circ g)'(\mathbf{a})$ és $(g \circ f)'(t_0)$ deriváltakat a láncszabály segítségével.

(41) Mutassuk meg, hogy ha egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény differenciálható egy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ pontban, akkor f folytonos $\mathbf{a}$-ban.

(42) Mutassuk meg, hogy egy differenciálható $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény esetén $f'(\mathbf{a})$ egyértelmű, azaz ha $A, B \in \mathbb{R}^{q\times p}$ egyaránt kielégíti a differenciálás definícióját, akkor $A = B$.

(43) ° Deriválás az integrál alatt: legyen $f(x, t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, és $a(x), b(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szintén folytonosan differenciálható függvények. Legyen $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)dt$. Mutassuk meg, hogy $G'(x) = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)dt$.

(44) ° Legyen $G(x) = \int_0^{x \sin x} e^{t^2} \cos(tx + 3)dt$. Mennyi lesz $G'(x)$?

(45) ° Legyen $H(x) = \int_{\arctan x}^{x \cos x} e^{t^3} \sin(t^2 x - 7)dt$. Mennyi lesz $H'(x)$?

(46) ° Inverz függvény differenciálása: legyen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(u, v) = (u^4 + uv + 7v^3, e^u - 3v^2)$. Helyettesítsük be $(u, v) = (0, 1)$-et: $\varphi(0, 1) = (7, -2)$. Mutassuk meg, hogy a $(7, -2)$ pont egy kis környezetében a φ^{-1} inverz létezik, és számoljuk ki a $(\varphi^{-1})'(7, -2)$ mátrixot.

(47) ° Legyen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(u, v) = (2u^3 v - uv + uv^2, -3v^2 + u \log(5u - 2v))$. Helyettesítsük be $(u, v) = (1, 2)$-t: $\varphi(1, 2) = (6, -12)$. Mutassuk meg, hogy a $(6, -12)$ pont egy kis környezetében a φ^{-1} inverz létezik, és számoljuk ki a $(\varphi^{-1})'(6, -12)$ mátrixot.

(48) ° Legyen $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, és $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$. Mi lesz $f'(x)$?

(49) $^\circ$ Legyenek $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ fix vektorok, és legyen $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$. Mutassuk meg, hogy $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$-ra. Továbbá legyen $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a következő: $h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle$. Mutassuk meg, hogy $h'(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$.

Gyakorló feladatok 5.

(50) $^\circ$ Implicit függvény differenciálása: tekintsük az $x^2y+3x^3z^2-xyz+\ln(2x+y-z)-23=0$ egyenletet. Mutassuk meg, hogy az $(1,2,3)$ pont kielégíti ezt, majd határozzuk meg a $\partial z/\partial y$, $\partial z/\partial x$ és $\partial y/\partial x$ parciális deriváltakat ebben a pontban.

(51) $^\circ$ Implicit függgvvény differenciálása. Tekintsük a következő egyenleteket:

$x_1^3y_2 + x_1x_3 + 3x_1x_2y_1^2 + x_3y_1y_2^2 - 3 = 0$

$x_1^2x_2y_1 - x_3y_1^2y_2 + 7x_2y_2^5 + 5 = 0$

Mutassuk meg behelyettesítéssel, hogy az $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (0, 2, 1, 3, -1)$ pont kielégíti az egyenleteket. Mutassuk meg, hogy a $(0, 2, 1)$ pont egy kis környezetében az y_1, y_2 változók kifejezhetők $(y_1, y_2) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ alakban, és határozzuk meg a $\varphi'(0, 2, 1)$ derivált mátrixot.

(52) $^\circ$ Határozzuk meg a következő függvények szélsőértékeit az adott feltételek mellett:

$f((x, y, z) = x - y + 3z,\ x^2 + y^2/2 + z^2/3 = 1;$

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,\ x + 2y + z = 1,\ 2x - y - 3z = 4;$

$f(x, y) = 4xy^2 + 3,\ y^2 + \frac{x^2}{9} = 1.$

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - x - z,\ x + y + z = 0,\ 2x^2 - y + z = 0.$

Gyakorló feladatok 6.

(53) $^\circ$ Legyen $T = [0, 1] \times [2, 5]$ téglalap, és $f(x, y) = 7x^2y^3 - xy + 3$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_T f(x, y)dxdy$.

(54) $^\circ$ Legyen T az a háromszög, amelynek csúcsai $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$, és legyen $f(x, y) = 1 - 6x^2y$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_T f(x, y)dxdy$.

(55) ^{HF} Legyen T az a háromszög, amelynek csúcsai $(0, 0), (2, 0), (1, 1)$, és legyen $f(x, y) = 3x^2 - y + xy$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_T f(x, y)dxdy$.

(56) $^\circ$ Legyen T az a háromszög, amelynek csúcsai $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$, és legyen $f(x, y) = \frac{\sin x}{x}$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_T f(x, y)dxdy$.

(57) $^\circ$ Legyen R az $y = 2x$ és az $y = x^2$ görbék által közrezárt régió, és legyen $f(x, y) = e^{xy} + x - x^2y$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_R f(x, y)dxdy$.

(58) $^\circ$ Legyen P az a prizma, amelynek alapja a $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)$ háromszög, és a tetejét a $z = 3 - x - y$ sík határolja. Mennyi P térfogata?

(59) ^{HF} Számoljuk ki a 4-dimenziós egységgömb térfogatát. (Segítség: az r magasságban vett szekció egy $\sqrt{1 - r^2}$ sugarú 3-dimenziós gomb, amelynek térfogatát ismerjük.)

(60) $^\circ$ Súlypont. Legyen A egy háromszög alakú, egyenletlen ötvözetű fémlemez a síkon. A háromszög csúcsai $(0,0),(1,0),(1,2)$, és a fémlemez sűrűsége az (x,y) pontban $\delta(x,y)=x+3y+6$. Határozzuk meg a fémlemez tömegét és súlypontját.

(61) ^{HF} Legyen A egy olyan egyenetlen ötvözetű fémlemez a síkon, amelyet az $x+y=0$ es $x=y-y^2$ görbék határolnak. Legyen a fémlemez sűrűsége az (x,y) pontban $\delta(x,y)=x+2y$. Határozzuk meg a fémlemez tömegét és súlypontját.

(62) $^\circ$ Polár koordináták. Legyen $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1, y\geq 0\}$, és legyen $f(x,y)=x+3y$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_T f(x,y)dxdy$.

(63) ^{HF} Legyen $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}\leq 1\}$, és legyen $f(x,y)=x^2y+3y+1$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_T f(x,y)dxdy$.

(64) $^\circ$ Legyen $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}\leq 1\}$ ellipszis. Számoljuk ki E területét.

Gyakorló feladatok 7.

(65) $^\circ$ Hengerkoordináták: legyen $f(x,y,z)=z^2$ es $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\geq 1, x^2+y^2+z^2\leq 4\}$. Mennyi $\int_V f$?

(66) $^\circ$ Hengerkoordináták: legyen $f(x,y,z)=2ye^{x^2+z^2}$ es $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$. Mennyi $\int_V f$?

(67) $^\circ$ Gömbi koordináták: számítsuk ki, hogy hol van egy $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq 0\}$ félgömb súlypontja.

(68) $^\circ$ Számítsuk ki a következő görbe ívhosszát: $r(t)=(t+1,\frac{t^2}{2},\frac{2\sqrt{2t^3}}{3})$, $t\in[-2,0]$.

(69) ^{HF} Számítsuk ki a következő görbe ívhosszát: $r(t)=(\cos t+t\sin t,\sin t-t\cos t,t)$, $t\in[0,1]$.

(70) $^\circ$ Normálvektor és érintősík: adott egy $r(u,v)=(u^2-2v^2,uv-v^3,u^4-2v)$ felület. Számítsuk ki a normálvektort az $(u,v)=(-1,1)$ pont felett, és adjuk meg az érintősík egyenletét.

(71) ^{HF} Legyen $r(u,v)=(u+v,u^2+v^2,u^3+v^3)$. Számítsuk ki a normálvektort az $(u,v)=(1,-1)$ pont felett, és adjuk meg az érintősík egyenletét.

(72) $^\circ$ Számítsuk ki a következő felület felszínét: $r(u,v)=(u^2,2u\cos v,2u\sin v$, $u\in[0,1], v\in[0,\pi/2]$.

(73) ^{HF} Számítsuk ki a következő felület felszínét: $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$, $u\in[-1,1], v\in[0,2\pi]$.

(74) $^\circ$ Vonalmenti inegrál: adott egy $r(t)=(t,t^2,t^3)$, $0\leq t\leq 2$ paraméterezésű G görbe, és egy $F(x,y,z)=(y^2-x^2,2yz,-x^2)$ vektormező. Számítsuk ki a következö vonalmenti integrált: $\int_G F(r)dr$.

(75) ^{HF} Legyen $A = (1, -2, 3)$, $B = (2, 1, 4)$, és tekintsük az A-t és B-t összekötő L szakaszt. Legyen továbbá $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$. Számítsuk ki a következő vonalmenti integrált: $\int_L F$.

(76) $^\circ$ Felületi integrál: legyen $F(x, y, z) = (x, y, z)$ és legyen egy S felület adva: $r(u, v) = (3\cos v, 3\cos u \sin v, \sin u)$, $u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi]$. Számítsuk ki a következő felületi integrált: $\int F dS$.

(77) $^\circ$ Legyen $F(x, y, z) = (xy, 0, 2x + z)$ és legyen egy S felület adva: $r(u, v) = (u + 2v, -v, u^2 + 3v)$, $0 \le u \le 3$, $-2 \le v \le 0$. Számítsuk ki a következő felületi integrált: $\int F dS$.

Gyakorló feladatok 8.

(78) $^\circ$ Divergencia és rotáció: legyen $F(x, y, z) = (x^2 + y^3, 12xy - 3x, xyz^2)$. Számítsuk ki F divergenciáját és rotációját az $(x, y, z) = (1, 3, 5)$ pontban.

(79) ^{HF} Divergencia és rotáció: legyen $F(x, y, z) = (x^3 - y^2, 7xy + 3x - z, xy^2 z)$. Számítsuk ki F divergenciáját és rotációját az $(x, y, z) = (1, 4, 7)$ pontban.

(80) $^\circ$ Mutassuk meg, hogy ha $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sima függvények, akkor $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} u) = \mathbf{0}$, és $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{v}) = 0$.

(81) $^\circ$ Mutassuk meg, hogy ha hogy ha $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sima függvények akkor $\mathrm{rot}(u\mathbf{v}) = \mathrm{grad} u \times \mathbf{v} + u \mathrm{rot}\mathbf{v}$.

(82) ^{HF} Mutassuk meg, hogy ha $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sima függvények, akkor $\mathrm{div}(u\mathbf{v}) = \langle (\mathrm{grad} u), \mathbf{v} \rangle + u \mathrm{div}\mathbf{v}$.

(83) $^\circ$ Skalár potencál: legyen $F(x, y, z) = (2xy - yz, x^2 + 3y^2 z - xz, y^3 - xy)$. Mutassuk meg, hogy F-nek létezik $v(x, y, z)$ skalárpotenciálja, és határozzuk meg azt.

(84) ^{HF} Skalár potencál: legyen $F(x, y, z) = (2x + z + yz, z - 3y^2 + xz, x + y + xy)$. Mutassuk meg, hogy F-nek létezik $v(x, y, z)$ skalárpotenciálja, és határozzuk meg azt.

(85) $^\circ$ Divergencia tétel: legyen $F(x, y, z) = (x, y, -2z)$, és legyen S az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloid $0 \le y \le 4$ része, kifelé mutató normálvektorral. Számoljuk ki az $\int F dS$ felületi integrált.

(86) ^{HF} Divergencia tétel: legyen $F(x, y, z) = (2x + e^{y \cos z}, y^2 + \sin(2x) \arctan z, 2z)$, és legyen S a következő félgömb felszíne: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$ (a normálvektor kifelé mutat). Számoljuk ki az $\int F dS$ felületi integrált.

Gyakorló feladatok 9.

Összefoglaló feladatsor a többváltozós integrálás témakörből.

(87) Az elméleti anyagban tettem olyan megjegyzéseket, hogy az ívhossz, vonalmenti integrál, felszín és felületi integrál független a paraméterezéstől. Ezek közül nézünk itt meg egyet. Legyen adott egy $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ erőtér, és egy görbének két paraméterezése: $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ és $g : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ úgy, hogy f, g injektívek, folytonosan differenciálhatóak, és $\mathrm{Ran} f = \mathrm{Ran} g$. Ekkor $\int_a^b \langle F(f(t)), f'(t)\rangle dt = \int_c^d \langle F(g(x)), g'(x)\rangle dx$.

(88) ◦ Legyen T az a háromszög, amelynek csúcsai $(-3, 4), (1, 2), (3, 7)$, és legyen $f(x, y) = 1 - xy$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_T f(x, y)dxdy$.

(89) ◦ Legyen T az $x^2 + y^2 = 1$ és az $x + y = 1$ görbék által közrezárt tartomány, és legyen $f(x, y) = x + y$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_T f(x, y)dxdy$.

(90) ◦ Legyen $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} \leq 4\}$, és legyen $f(x, y) = xy + 1$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_T f(x, y)dxdy$.

(91) ◦ Legyen $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$, és legyen $f(x, y, z) = x + y^3 + z^2$. Számoljuk ki a következő integrált: $\int_T f(x, y)dxdydz$.

(92) ◦ Legyen $r(u, v) = (2v + \cos u, -v + \sin u, 3v)$. Számítsuk ki a normálvektort az $(u, v) = (\pi, 1)$ pont felett, és adjuk meg az érintősík egyenletét.

(93) ◦ Az $x^2y + z^2 + yz = 0$ egyenletet kielégítő pontok egy felületet írnak le. Adjuk meg a felület normálvektorát, és adjuk meg az érintősík egyenletét az $(x_0, y_0, z_0) = (0, -1, 1)$ pontban.

(94) ◦ Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$, $z \in [0, 4]$ paraboloid feszínét.

(95) ◦ Legyen $F(x, y, z) = (x, z, y)$ és legyen $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, \pi/2]$. Határozzuk meg az $\int F dr$ vonalmenti integrált.

(96) ◦ Adott egy S felület: $S = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$, és egy $F(x, y, z) = (0, yz, z^2)$ erőtér. Határozzuk meg az $\int F dS$ felületi integrált.

(97) ◦ Legyen $a \in \mathbb{R}^3$ rögzített vektor és $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az identitás függvény, azaz $r(x, y, z) = (x, y, z)$. Igazoljuk, hogy $\mathrm{rot}(a \times r) = 2a$ és $\mathrm{div}(r\langle r, a\rangle) = 4\langle r, a\rangle$ teljesül

(98) ◦ Legyen $F(x, y, z) = (z \cos xz + yz, = 1 + z^2 + xz, x \cos xz + 2yz + xy)$. Mutassuk meg, hogy F-nek létezik $v(x, y, z)$ skalárpotenciálja, és határozzuk meg azt.

(99) Legyen $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, a $H = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tartományon. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{rot} F = \mathbf{0}$, de F-nek mégsincs skalárpotenciálja a H halmazon.

(100) ◦ Legyen S a $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ kocka felszíne, és $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$. Határozzuk meg az $\int F dS$ felületi integrált. (A felület paraméterezése helyett használjuk a divergencia tételt).

(101) Stokes tételének segítségével lássuk be a Green-tételt: ha egy konvex $T \subset \mathbb{R}^2$ tartományt egy G zárt görbe határol a síkon, és $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható vektormező, akkor $\int Fdr = \int_T (\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} dxdy$. (Gondoljunk T-re, mint egy lapos felületre, amelyet G határol.)

(102) Az előző feladatban szereplő Green-tétel alapján mutassuk meg, hogy a síkon egy $r(t)$ zárt görbe által határolt alakzat területe: $A = \frac{1}{2} \int Fdr$, ahol $F(x,y) = (-y, x)$.

(103) ° Stokes tétel: legyen $H(x,y,z) = (xz^2, -yz^2, 3(4y - 1 - y^2)$. A (78) feladat megoldása azonnal elvezet egy olyan F vektormezőhöz, hogy $\mathrm{rot}F = H$ (ekkor egyébként F-et a H vektorpotenciáljának nevezzük). Az F vektorpotenciál segítségével számítsuk ki az $\int_H dS$ felületi integrált, ahol az S felületet a következő függvény határozza meg: $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 1 + \frac{\pi}{4} - \arctan u)$, ahol $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$.

Gyakorló feladatok 10.

(104) ° Határozzuk meg az alábbi függvénysorozat konvergencia tartományát és pontonkénti határfüggvényét. Egyenletes-e a kovergencia a teljes konvergencia tartományon?
$f_n(x) = \frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}$

(105) ^{HF} Határozzuk meg az alábbi függvénysorozat konvergencia tartományát és pontonkénti határfüggvényét. Egyenletes-e a kovergencia a teljes konvergencia tartományon?
$f_n(x) = \frac{1-(\ln x)^n}{1+(\ln x)^n}$

(106) ° Határozzuk meg az alábbi függvénysorozat konvergencia tartományát és pontonkénti határfüggvényét. Egyenletes-e a kovergencia a teljes konvergencia tartományon?
$f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$

(107) ^{HF} Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorozatok egyenletesen konvergensek-e a megadott halmazon:

a; $f_n(x) = e^{-nx} \quad H = [0, +\infty)$.

b; $f_n(x) = xe^{-nx} \quad H = [0, +\infty)$.

(108) ° Legyen $f_n(x) = \frac{\cos(n^2x+1)}{n^2+1+x}$, ahol $0 \le x \le 1$. Mennyi $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$?

(109) ^{HF} Legyen $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^{1/n}}$, ahol $0 \le x \le 1$. Mennyi $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$?

(110) ° Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx^2}$ pontonként konvergál, de a konvergencia nem egyenletes a $H = (0, +\infty)$ félegyenesen.

(111) ^{HF} Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx^2}$ egyenletesen konvergál a $H = [1, +\infty)$ félegyenesen. (Használjuk a Weierstrass-kritériumot.)

(112) Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e $\mathbb{R}$-en:

a; $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}$

b; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}$

(113) $^\circ$ Határozzuk meg a következő hatványsorok összegét és konvergenica-sugarát:

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$,

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^{n+1}}$,

$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}$

(114) Adjuk meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét:

a; $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x-1}{x+1})^n$

b; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log x}{(x+n)(x+n+1)}$

(115) $^\circ$ Igaz-e minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, hogy

$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(\frac{1-x}{n})}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\arctan(\frac{1-x}{n})}{n+1}\right)$

Gyakorló feladatok 11.

(116) ^{HF} Mutassuk meg, hogy a $[0, 2\pi]$ felett folytonos valós értékű függvények vektorterén az $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ művelet teljesíti a skalárszorzás axi-ómáit, azaz pozitív definit, nem-degenerált, szimmetrikus, bilineáris; lásd a jegyzet legelején.

(117) $^\circ$ Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos 2π-periodikus függvény, akkor bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén $\int_t^{t+2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx$.

(118) $^\circ$ Legyen $f(x) = x^2$ ha $-\pi \le x < \pi$, és terjesszük ki f-et 2π-periodikusan $\mathbb{R}$-re. Számítsuk ki f Fourier-együthatóit.

(119) ^{HF} Legyen $f(x) = 1$ ha $-\pi \le x \le 0$ és $f(x) = x$ ha $0 < x < \pi$, és terjesszük ki f-et 2π-periodikusan $\mathbb{R}$-re. Rajzoljuk le a függvényt, és számítsuk ki f Fourier-együthatóit.

(120) $^\circ$ Legyen $f(x) = 1$ ha $-\pi \le x \le 0$ és $f(x) = x^2$ ha $0 < x < \pi$, és terjesszük ki f-et 2π-periodikusan $\mathbb{R}$-re. Rajzoljuk le a függvényt, és számítsuk ki f Fourier-együthatóit.

(121) $^\circ$ Legyen $f(x) = -x$ ha $-\pi \le x \le 0$ és $f(x) = x^2$ ha $0 < x < \pi$, és terjesszük ki f-et 2π-periodikusan $\mathbb{R}$-re. Rajzoljuk le a függvényt, és számítsuk ki f Fourier-együtthatóit.

(122) $^\circ$ Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy 2π-periodikus, folytonosan differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy f es f' Fourier-együtthatóira fennáll, hogy: $a_0(f') = 0$, $a_n(f') = nb_n(f)$ and $b_n(f') = -na_n(f)$.

(123) ° Az $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ formula alapján adjuk meg a következő Fourier-sor összegfüggvényét zárt alakban: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx$, $|q| < 1$.

(124) ^{HF} Legyen az integrálható, 2π szerint periodikus $x \mapsto h(x)$ függvény Fourier sora $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Mutassuk meg, hogy az $x \mapsto h(x+\pi)$ függvény Fourier-sora $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \cos(kx) + (-1)^k b_k \sin(kx)$.

(125) ^{HF} Legyen $f(x) = x$ ha $-\pi \le x < \pi$, és terjesszük ki f-et 2π-periodikusan $\mathbb{R}$-re. Számítsuk ki f Fourier-együthatóit, alkalmazzuk a Parseval-formulát, és ezáltal számítsuk ki a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ összeget.

(126) ° Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a 2π szerint periodikus függvény, melyre minden $x \in [-\pi, \pi[$ esetén $f(x) = x(x^2 - \pi^2)$ teljesül. Igazoljuk, hogy f folytonosan differenciálható (a $\pm\pi$-ben is). Határozzuk meg az f függvény Fourier-együtthatóit. A Fourier-sor segítségével igazoljuk a

$$\frac{\pi^2 - 1}{6} = \frac{\sin 1}{1^3} - \frac{\sin 2}{2^3} + \frac{\sin 3}{3^3} - \frac{\sin 4}{4^3} + \dots$$

formulát. Végül a Parseval-formula segítségével igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

(127) ° Mutassuk meg, hogy ha f páratlan 2π periodikus függvény, akkor minden a_n Fourier-együtthatója 0.

(128) ° Legyen $f(x) = 1 + 3\cos x + \sin 4x - 7\cos 3x$. Számítsuk ki f Fourier-együtthatóit.

(129) ° Legyen $f(x)$ folytonos 2π-periodikus függvény. Legyen $g(x) = f(2x)$. Hogyan kaphatjuk meg g Fourier-együtthatóit f Fourier egyutthatóiból?

Gyakorló feladatok 12.

Összefoglaló gyakorló feladatok a függvénysorozatok, függvénysorok, Fourier-sorok témakörből.

(130) ° Határozzuk meg az alábbi függvénysorozat konvergencia tartományát és pontonkénti határfüggvényét. Egyenletes-e a kovergencia a teljes konvergencia tartományon? Egyenletes-e a konvergenica $[-1, 1]$-en?

$f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$.

(131) ^{HF} Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorozat egyenletesen konvergens-e a megadott halmazon:

$f_n(x) = nxe^{-nx} \qquad H = [0, +\infty)$.

(132) ° Legyen $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{k^2}$. Adjuk meg $f'(0)$ értékét.

(133) ° Döntsük el, hogy a következő függvénysor pontonként illetve egyenletesen converegens-e az egész $\mathbb{R}$-en: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{x + x^{1/3}}{n})$.

(134) ° Döntsük el, hogy a következő függvénysor pontonként illetve egyenletesen converegens-e az egész $\mathbb{R}$-en: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{2x}{x^2 + n^2})$.

(135) ° Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciasugarát, és hozzuk zárt alakra az összeget: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{2n}(2n-1)}$

(136) ° Legyen $f(x) = \sin x$ ha $-\pi \leq x \leq 0$ és $f(x) = x$ ha $0 < x < \pi$, és terjesszük ki f-et 2π-periodikusan $\mathbb{R}$-re. Rajzoljuk le a függvényt, és számítsuk ki f Fourier-együtthatóit.

(137) ° Legyen $f(x)$ folytonos 2π-periodikus függvény. Legyen $g(x) = f(3x)$. Mutassuk meg, hogy $a_n(g) = b_n(g) = 0$ ha n nem osztható 3-mal, és $a_n(g) = a_{n/3}(f)$, $b_n(g) = b_{n/3}(f)$ ha n osztható 3-mal.

(138) ° Legyen $f(x)$ folytonos 2π-periodikus függvény. Legyen $g(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$. Számítsuk ki g Fourier-együtthatóit f Fourier-együtthatói segítségével.

Megoldások

(1) Ha $\|\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{y}\|$, akkor a $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ jelölessel $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$ adódik, és a bizonyítandó egyenlőtlenség $\|\mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{z} + \mathbf{y}\| - \|\mathbf{y}\|$ alakú, ami valóban igaz a háromszögegyenlőtlenség miatt.

Ha pedig $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{y}\|$, akkor $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$, és kihasználjuk, hogy $\| - \mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\|$, és a bizonyítandó egyenlőtlenség $\|\mathbf{z}\| = \| - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| - \|\mathbf{x}\|$ alakú, ami megint a háromszögegyenlőtlenség.

(2) Mind a $\| \cdot \|_1$, mind a $\| \cdot \|_\infty$ esetében mindhárom norma axióma (pozitív nemdegeneráltság, skálázás, háromszögegyenlőtlenség) triviális. A feladat célja csak a norma axiómák gyakorlása és az egyébként nevezetes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_\infty$ normák bevezetése.

(3) $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$ négyzetre emelés után triviális, $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{p}\|\mathbf{x}\|_2$ pedig a számtani-négyzetes egyenlőtlenség. (Másképpen: alkalmazzuk a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget az $\mathbf{x}_+ = (|x_1|, |x_2|, \ldots |x_p|)$ és a $(1, 1, \ldots, 1)$ vektorokra. Ekkor éppen a $\sum_{i=1}^{p} |x_i| \leq \sqrt{p}\|\mathbf{x}\|_2$ egyenlőtlenséget kapjuk.)

(4) A jobb oldalon a norma négyzeteket skaláris szorzatként írva és bilineárisan kifejtve $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, ugyanis a négyzetes tagok kiesnek, a vegyes tagokat pedig össze lehet vonni az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ szimmetria miatt.

(5) A bilinearitás mindenképp teljesül, de a szimmetriához és a pozitív definitséghez arra van szükség, hogy $A = A^T$ szimmetrikus mátrix legyen, és A pozitıv definit mátrix legyen, azaz $\langle Ax, x \rangle > 0$ minden $x \in \mathbb{R}^p$ esetén.

(6) Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ ortogonálisak, akkor $\|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + |\alpha|^2\|\mathbf{y}\|^2 \geq \|\mathbf{x}\|^2$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq 0$. Tegyük fel, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle < 0$ (ha > 0 akkor is hasonlóan járhatunk el, mint alább).

A megoldás lényege, hogy ha α-t kicsi pozitív számnak választjuk, akkor ellentmondásra fogunk jutni. Ugyanis $\|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + |\alpha|^2\|\mathbf{y}\|^2 + 2\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq \|\mathbf{x}\|^2$, és ha α kicsi pozitív szam, akkor az $|\alpha|^2\|\mathbf{y}\|^2$ tag elhanyagolhatóan kicsi a $2\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ taghoz képest, és az utóbbi negatív. Konkrétan, legyen $\alpha = \frac{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}$. Ekkor $\|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + |\alpha|^2\|\mathbf{y}\|^2 + 2\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^2} < \|\mathbf{x}\|^2$

(7) A $B(\mathbf{x}, r)$ halmaz nyílt, mivel ha $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$, akkor $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = q < r$, és a háromszögegyenlőtlenség miatt $B(\mathbf{y}, r - q) \subset B(\mathbf{x}, r)$. Hasonló érveles miatt az $A = \{\mathbf{y} : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > r\}$ halmaz szintén nyílt, így ennek komplementere $A^c = \overline{B(\mathbf{x}, r)}$ zárt. És végül $S(\mathbf{x}, r) = (B(\mathbf{x}, r) \cup A)^c$ zárt, mivel a zárójelben egy nyílt halmaz van, hiszen két nyílt halmaz uniója nyílt.

(8) Ez az $int(A), \partial(A), ext(A)$ halmazok definíciójából azonnal következik.

(9) $int(\mathbb{Q}^2) = \emptyset$ mivel bármely pont bármely környezeteben van olyan pont amelynek legálább egyik koordinátája irracionális (persze olyan is van, amelynek mindkét koordinátája irracionális). $ext(\mathbb{Q}^2 = \emptyset$ mivel bármely pont bármely környezetében van olyan pont amelynek mindkét koordinátája racionális. Ezek szerint viszont $\partial(\mathbb{Q}^2) = \mathbb{R}^2$ hiszen az előző feladat szerint a három halmaz uniója kiadja az egész teret.

(10) Legyen $\mathbf{x} \in int(A)$. Ekkor létezik $r > 0$, amelyre $B(\mathbf{x}, r) \subset A$. Legyen $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$. Ekkor $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = q < r$, és a háromszögegyenlőtlenség miatt $B(\mathbf{y}, r - q) \subset B(\mathbf{x}, r) \subset A$. Tehát $\mathbf{y}$-nak is van A-beli környezete, azaz $\mathbf{y} \in int(A)$. De ez minden $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$-re igaz, így $B(\mathbf{x}, r) \subset int(A)$.

(11) Az előző feladat szerint $int(A)$ nyílt, és mivel $ext(A) = int(A^c)$ ezért $ext(A)$ is nyílt. És $\partial(A) = (int(A) \cup ext(A))^c$, ezért $\partial(A)$ zárt.

(12) A Cantor halmaz $C \subset \mathbb{R}$ úgy van definiálva, hogy $C = \cap_{n=0}^{\infty} F_n$, ahol $F_0 = [0, 1]$, és F_n-et mindig úgy kapjuk, hogy az F_{n-1}-ben szereplő intervallumok középső nyílt harmadát elhagyjuk. A Cantor-tétel szerint a fenti végtelen metszet nem üres (hiszen egymásba ágyazott, nem-üres, kompakt halmazok metszete). Viszont világos, hogy $\cap_{n=0}^{N} F_n = F_N$, és F_N előáll úgy, mint néhány (egesz pontosan 2^N darab) $1/3^N$ hosszú diszjunkt zárt intervallum uniója. Ezért tetszőleges $B(x, r)$ intervallumra teljesül, hogy elég nagy N esetén $B(x, r) \not\subseteq F_N$ (hiszen nem fér bele). Ezért $int(C) = \emptyset$.

(13) Ha $A \subset \mathbb{R}^p$ nyílt akkor $A = int(A)$. Ha $A \subset \mathbb{R}^p$ zárt, akkor A^c nyílt, ezért $A^c = int(A^c) = ext(A)$. Tehát $\mathbb{R}^p = A \cup A^c = int(A) \cup ext(A)$, ami azt jelenti, hogy $\partial(A) = \emptyset$.

Tehát elég azt megmutatni, hogy ha $A \neq \emptyset, \mathbb{R}^p$, akkor $\partial(A) \neq \emptyset$. Legyen $x \in A$, $y \in A^c$ (ilyen pontok vannak, hiszen $A \neq \emptyset, A^c \neq \emptyset$). Tekintsük az x-ből y-ba menő szakaszt: $x + t(y - x), t \in [0, 1]$. A szakasz eleje $x \in A$, a szakasz vége pedig $y \in A^c$. Legyen $t_0 = \sup\{t : x + t(y - x) \in A\}$, azaz t_0 annak a "határa" ameddig A-ban marad a szakasz. Ekkor $x + t_0(y - x) \notin int(A)$ hiszen ha $int(A)$-ban lenne, akkor egy kicsit t_0 után is tovább mehettünk volna A-ban maradva (hiszen $int(A)$ nyílt). Hasonlóan, $x + t_0(y - x) \notin ext(A)$ hiszen ha $ext(A)$-ban lenne, akkor már egy kicsivel t_0 előtt kiléptunk volna A-ból. Ezek szerint $x + t_0(y - x) \in \partial(A)$, és így $\partial(A)$ valóban nem üres.

(14) Az A halmaz az $y = x^2$ függvenygrafikon alatti terület a $(0, 2]$ intervallum felett (a határok aszerint nincsenek vagy vannak benne, hogy a definiáló egyenlőtlenség szigorú-e vagy sem). Az ilyen "hétköznapi" halmazoknal a halmaz belseje és határa pontosan az, amit az ember magától is gondolna: $int(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, 0 < y < x^2\}$, $\partial(A) = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 2\} \cup \{(2, y) : 0 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) : y = x^2, 0 \leq x \leq 2\}$.

A B halmaz az $y = \sin \frac{1}{x}$ függveny grafikonja, ahol $0 < x < 1$. Ez annyiban nem "hétköznapi" halmaz, hogy a grafikon besűrűsödik (végtelen sok hullámot vet) a 0 kozelében. Világos, hogy $int(B) = \emptyset$, mivel a függvenygrafikon nem tartalmaz semmilyen teljes nyílt gömböt. Az is világos, hogy minden $0 < x \leq 1$ esetén az $(x, \sin \frac{1}{x})$ pont eleme $\partial(B)$-nek, hiszen minden környezetében van B-beli és B^c-beli pont is. Másrészt, mivel a grafikon besűrűsödik a 0-nál, ezért a $\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$ is $\partial(B)$-hez tartozik. Az is könnyen látható, hogy minden más pont $ext(B)$-hez tartozik. Tehát $\partial(B) = \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$.

(15) $int(A) = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 < 9, x - y > 1, y > 0\}$,

$\partial(A) = \{(x, 4) : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 0) : 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\} \cup \{(x, y) : y = x - 1, 1 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{41}}{5}\} \cup \{(x, y) : 4x^2 + y^2 = 9, \frac{1+\sqrt{41}}{5} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$.

(16) $int(A_2) = \emptyset$, $\partial(A_2) = A_2 \cup \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$

(17) $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ esetén $\cap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$.

(18) $F_n = [n, +\infty) \subset \mathbb{R}$ esetén F_n egy zárt félegyenes minden n-re, amelyek egymásba vannak ágyazva, de mégis $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

(19) $A_n = (0, \frac{1}{n})$ esetén ezek egymásba ágyazott nem-üres, korlátos halmazok, de $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

(20) Legyen B relatív nyílt A-ban, azaz valamely $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt halmazra $B = A \cap G$. Legyen $b \in B$. Ekkor $b \in G$ is teljesül, és G nyíltsága miatt létezik $B(b, r) \subset G$. Ekkor $B(b, r) \cap A \subset B$.

Fordítva, ha B olyan, hogy minden $b \in B$-re létezik $B(b, r_b) \cap A \subset B$, akkor legyen $G = \cup_{b \in B} B(b, r_b)$. Ez nyílt, hiszen nyíltak uniója, és teljesül rá, hogy $G \cap A = B$.

(21) Ezek a tulajdonságok a szokásos módon következnek a konvergecia definíciójából ugyanúgy, mint az egyváltozós esetben.

(22) $|\langle x_n, b \rangle - \langle a, b \rangle| = |\langle x_n - a, b \rangle| \leq \|x_n - a\| \|b\| \to 0$, mivel az első tényező 0-hoz tart, a második pedig konstans.

(23) $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, b \rangle + \langle x_n, b \rangle - \langle a, b \rangle| = |\langle x_n, y_n - b \rangle + \langle x_n - a, b \rangle| \to 0$, ahol a második tagról már láttuk az előző feladatban, hogy 0-hoz tart, az első tag pedig szintén 0-hoz tart, mivel $y_n - b \to 0$ és x_n korlátos (mert konvergens is).

(24) a; Az $u = x - 2$, $v = y - 3$ változókat bevezetve $\lim_{(x,y) \to (2,3)} \frac{x-2}{y-3} = \lim_{(u,v) \to (0,0)} \frac{u}{v}$, és a $v = mu$ helyettesítéssel látszik, hogy nem létezik határérték.

b; A polárkoordinátás helyettesítéssel $(x = r \cos \phi, y = r \sin \phi)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x^2y^5}}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^{7/3}\sqrt[3]{\cos^2\phi \sin^5\phi}}{r^2} = r^{1/3}\sqrt[3]{\cos^2\phi \sin^5\phi} \to 0$, mivel $r^{1/3} \to 0$, és a ϕ-t tartalmazó tagok korlátosak.

c; A Lagrange-féle középértéktétel szerint $\sin x - \sin y = (x-y)\cos\xi$, ahol $\xi \in [x,y]$. Ezért $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x - \sin y}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0),\xi\in[x,y]} \cos\xi = 1$.

d; Mivel a szereplő függvények folytonosak, egyszerű behelyettesítés után $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x)^y = 1$.

e; $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-1}{x-1} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(u+1)(v+1)-1}{u} = v+1+\frac{v}{u}$, és $v = mu$ helyettesítéssel látszik, hogy nincs határérték.

f; Az $y = cx^2$ helyettesítés után $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{c}{1+c^2}$, ami fugg c-tol, így nincs határérték.

g; A $v = y-2$ helyettesítés után polárkoordinátákat bevezetve:
$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-4y+5}-1}{x^2+y^2-4y+4} = \frac{\sqrt{x^2+v^2+1}-1}{x^2+v^2} = \frac{\sqrt{r^2+1}-1}{r^2} = \frac{1}{2}$, ahol az utolsó egyenlőség már egyváltozós határérték és pl. gyöktelenítéssel vagy L'Hospital szabállyal kapható meg.

(25) Ezek pont ugyanúgy bizonyíthatók, mint az egyváltozós esetben. Például az átviteli elv ad egy gyors bizonyítást. Lásd [2, 21.45. Tétel].

(26) Ez is ugyanúgy bizonyítható, mint az egyváltozós esetben. Lásd [2, 21.49. Következmény].

(27) Az így megadott halmazokat "nívóhalmazoknak" szokás nevezni, mivel az összes olyan pontot foglalja magába, ahol az $f(x,y) = x^4+2y^4+x+3y+7$ függvény egy "nívónál" azaz egy küszöbértéknél (jelen feladatban 15-nél) kisebb egyenlő. Az "ökölszabály" az, hogy ha a definiáló egyenlőtlenség szigorú, akkor a nívóhalmaz nyílt, ha pedig megengedő, akkor a nívóhalmaz zárt (ha f folytonos). Ennek oka, hogy a $H_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : f(\mathbf{x}) < a\}$ halmaz nem más, mint az $(a, +\infty)$ nyílt félegyenes ősképe, és mint tudjuk, folytonos függvényekre nyílt halmaz ősképe nyílt.

Azt kell belátnunk, hogy a feladatban adott H halmaz nem-üres, korlátos és zárt. H zártsága következik a fenti érvelésből, ugyanis f folytonos, és H nem más, mint a $[15, +\infty)$ zárt félegyenes ősképe. H nyilván nem-üres mivel $(0,0) \in H$. Továbbá H korlátos is, mert könnyű látni, hogy ha $|x|$ vagy $|y|$ nagy, akkor $f(x,y)$ is nagy lesz. Pl. ha $|x| \geq 3$, akkor $x^4+x \geq 78$, és ha $|y| \geq 3$, akkor $2y^4+3y \geq 153$, és emiatt könnyű látni, hogy $(x,y) \notin H$ minden olyan (x,y)-ra, ahol $\max\{|x|,|y|\} \geq 3$.

(28) a; $f(x,y) = \sin xy + xy^2 - \ln(x+y)$,
$D_1 f(x,y) = y\cos xy + y^2 - \frac{1}{x+y}$, $D_2 f(x,y) = x\cos xy + 2xy - \frac{1}{x+y}$.

A b,c,d feladatok hasonlóan.

(29) $f(x,y,z) = x^3 + y^4 + x^2ye^{2z}$.
$\partial_x f(x,y,z) = 3x^2 + 2xye^{2z}$,
$\partial_y f(x,y,z) = 4y^3 + x^2e^{2z}$,
$\partial_z f(x,y,z) = 2x^2ye^{2z}$.
$\partial_{xx} f(x,y,z) = 6x + 2ye^{2z}$
$\partial_{yy} f(x,y,z) = 12y^2$
$\partial_{zz} f(x,y,z) = 4x^2ye^{2z}$

$\partial_{yx} f(x, y, z) = \partial_{xy} f(x, y, z) = 2xe^{2z}$
$\partial_{zx} f(x, y, z) = \partial_{xz} f(x, y, z) = 4xye^{2z}$
$\partial_{zy} f(x, y, z) = \partial_{yz} f(x, y, z) = 2x^2 e^{2z}$.

(30) A T tartomány egy háromszög. Weierstrass min-max tétele miatt f felveszi a minimumát és maximumát is T-n. Először megnézzük, hogy T belsejében hol lehet lokális szélsőérték. Ehhez $\partial_x f(x, y) = y^2(2 - 2x - y) = 0$, $\partial_y f(x, y) = xy(4 - 2x - 3y) = 0$. A háromszög belsejében $x > 0, y > 0$, ezért $2 - 2x - y = 0, 4 - 2x - 3y = 0$. Ezt megoldva, $x = \frac{1}{2}, y = 1$ adódik, ami valóban T-be esik. Itt f értéke $f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{4}$. Meg kell még nézni T határait. A tengelyeken $f(x, y) = 0$, és látszik, hogy f felvesz T-n pozitív és negatív értékeket is, így a tengelyeken nem lehet extrémum. Az $x + y = 6$ egyenletű oldalon kell még megvizsgálni f-et. Itt $f(x, y) = -4x(6 - x)^2$ adódik, ahol $x \in [0, 6]$. Megoldva az $f'(x) = 0$ egyenletet $x = 2$ adódik, és $f(2, 4) = -128$ (a határokon pedig $f(0, 6) = f(6, 0) = 0$). Tehát f maximuma T-n az $f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{4}$, a minimuma pedig $f(2, 4) = -128$.

(31) Hasonlóan az előző feladathoz, meg kell keresni a négyzet belsejében a derivált nullhelyeit, illetve vizsgálni kell a függvényt a négyzet határán. Az jön ki, hogy f maximuma a határon van, $f(0, 1) = f(1, 0) = 1$, míg a minimuma a négyzet belsejében, $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{432}$.

(32) Az $\mathbf{a}$ feletti érintősík egyenlete $z = f(\mathbf{a}) + \langle f'(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a}\rangle$. Jelen esetben $D_1 f(x, y) = \frac{-16}{x^2 y} = -8$, $D_2 f(x, y) = \frac{-16}{xy^2} = -4$, így az érintősík egyenlete $z = 8 - 8(x - 1) - 4(y - 2)$.

(33) Egy $\mathbf{u}_0$ egységvektor esetén $D_{u_0} f(\mathbf{a}) = \langle f'(\mathbf{a}), \mathbf{u}_0\rangle$. Jelen esetben $\mathbf{u}_0 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, és $D_1 f(x, y) = 2x - y = 0$, $D_2 f(x, y) = -x + 6y = 11$, ezért $D_{u_0} f(\mathbf{a}) = \frac{44}{5}$.

(34) A víz a legnagyobb meredekség irányába kezd folyni, ami az f gradiensével ellenkező irány. Jelen esetben $D_1 f(x, y) = 2xy + y^2 + 1 = 10$, $D_2 f(x, y) = x^2 + 2xy + 3 = 27$, tehát $f'(\mathbf{a}) = \mathrm{grad} f(\mathbf{a}) = (10, 27)$, így a víz a $(-10, -27)$ irányvektorú irányba kezd folyni.

(35) a; $D_1 f(x, y) = 2x + y - 3 = 0$, $D_2(x, y) = x + 2y - 3 = 0$, és ezt megoldva $x = y = 1$. A második deriváltak $D_{11} f(x, y) = 2$, $D_{12} f(x, y) = D_{21} f(x, y) = 1$, $D_{22} f(x, y) = 2$, tehát $f''(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, ami pozitív definit, tehát $(1, 1)$-ben lokális minimum van. Ez egyébként globális minimum is, mivel könnyen látható, hogy nagy $|x|, |y|$ esetén $f(x, y)$ is nagy lesz (azaz $|x|, |y| \to +\infty$ esetén $f(x, y) \to +\infty$), és ezért elég egy véges $B(0, R)$ tartományon keresnünk f minimumát, és így a Weierstrass min-max tétel szerint valahol kell lennie minimumnak.

b; Megoldva a $D_1 f = D_2 f = 0$ egyenleteket $x = 1, y = \frac{2}{3}$ adódik, illetve minden $x = 0$ és $y = 0$ pont. A $(0, y)$ pontokban nincs szélsőérték, mivel f értéke 0, és egy kis környezetben felvesz $\pm$ értékeket is. Az $(x, 0)$ pontban lokális maximum van ha $x^3(2 - x) < 0$, és lokális minimum van ha $x^3(2 - x) > 0$. Az $(1, \frac{2}{3})$ pontban a második derivált mátrix $f''(1, \frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} -\frac{16}{9} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix}$, ami negatív definit, tehát itt lokális maximum van. Könnyen látható, hogy a függvény bármilyen nagy pozitív és negatív értéket is felvesz, így globalis maximum illetve minimum nem létezik.

c; $D_1 f(x,y) = 3x^2 - 9y = 0$, $D_2 f(x,y) = 3y^2 - 9x = 0$, és ezeket megoldva $x = 0, y = 0$ és $x = 3, y = 3$ adódik. A második derivált mátrix $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{bmatrix}$,

ami $(0,0)$-ban indefinit, így ott nincs szélsőérték, míg $(3,3)$-ban pozitív definit, így ott lokális minimumm van. Könnyen látható, hogy a függvény bármilyen nagy pozitív és negatív értékeket is felvesz, ezért globalis minimum illetve maximum nem létezik.

A d, e, f feladatok hasonlóan.

(36) a; A másodrendű Taylor polinom képlete $T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \langle f'(\mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a}\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \mathbf{x} - \mathbf{a}\rangle$. Jelen esetben $\mathbf{a} = (1,2)$, $f(1,2) = \frac{1}{2}$, $f'(\mathbf{a}) = (D_1 f, D_2 f) = (\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2})|_{(1,2)} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$. Továbbá $D_{11} f(x,y) = 0$, $D_{12} f(x,y) = D_{21}(x,y) = -\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{4}$, $D_{22} f(x,y) = \frac{2x}{y^3} = \frac{1}{4}$, tehát $f''(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$,

Ezek után a Taylor-polinom: $T_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(y-2) - \frac{1}{4}(x-1)(y-2) + \frac{1}{8}(y-2)^2$.

A b, c, d feladatok hasonlóan.

(37) Lásd [2, 21.97. Lemma].

(38) A második derivált mátrixa: $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{bmatrix}$, és ennek kell pozitív szemi-definitnek lennie. Ez akkor teljesül, ha $x > 0, y > 0, xy \geq \frac{81}{36}$. Ellenőrizni kell még, hogy ez az (x,y)-síkon ez konvex halmaz-e, hiszen egy függvény konvexitását csak konvex halmaz felett értelemzzük. Ez egy hiperbola feletti tartomány, így valóban konvex.

(39) a; $f'(x,y) = \begin{bmatrix} f_1'(x,y) \\ f_2'(x,y) \\ f_3'(x,y) \end{bmatrix}$, ahol $f_1'(x,y) = (D_1 f_1, D_2 f_1) = (2xy, x^2)$, és $f_2'(x,y) = (D_1 f_2, D_2 f_2) = (1,1)$, és $f_3'(x,y) = (D_1 f_3, D_2 f_3) = (ye^x, e^x)$. Tehát $f'(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 1 \\ ye^x & e^x \end{bmatrix}$.

A b, c feladatok hasonlóan.

(40) A behelyettesítési értékek: $f(1) = (0, \frac{1}{2}, e)$, $g(\mathbf{a}) = -1$. A deriváltak

$f'(t) = \begin{bmatrix} 2t-1 \\ \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \\ e^t \end{bmatrix}$, $f'(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \\ e \end{bmatrix}$, $f'(-1) = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ 1/e \end{bmatrix}$

$g'(x,y,z) = (2xy, x^2, -1)$, $g'(1,2,3) = (4,1,-1)$, $g'(0, \frac{1}{2}, e) = (0,0,-1)$.

Végül a láncszabály szerint $(f \circ g)'(\mathbf{a}) = f'(g(\mathbf{a})) \cdot g'(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} -12 & -3 & 3 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 4/e & 1/e & -1/e \end{bmatrix}$

$(g \circ f)'(t_0) = g'(f(t_0)) \cdot f'(t_0) = -e$

(41) A [2, 22.13. Tétel] szerint f pontosan akkor differenciálható egy $\mathbf{a}$ pontban ha minden f_i koordinátafüggvény differenciálható $\mathbf{a}$-ban. Korábban láttuk, hogy f_i :

$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ differenciálhatóságából következik, hogy f_i folytonos $\mathbf{a}$-ban. Továbbá azt is láttuk, hogy ha minden f_i koordinátafüggvény folytonos $\mathbf{a}$-ban, akkor f folytonos $\mathbf{a}$-ban.

(42) A [2, 22.13. Tétel] szerint f pontosan akkor differenciálható egy $\mathbf{a}$ pontban ha minden f_i koordinatafüggvény differenciálható $\mathbf{a}$-ban, és ekkor f deriváltja (Jacobi mátrixa) felírható úgy, mint az egyes koordinátafüggvények parciális deriváltjaiból összeállított mátrix. Tehát a mátrix elemei egyértelműen vannak meghatározva, így a derivált leképezés egyértelmű. Ennek az érvelésnek a konklúzióját mondja ki a [2, 22.14. Következmény].

(43) Legyen $F(u,v) = \int_{a(u)}^{b(u)} f(v,t)dt$ és $H(x) = (x,x)$. Ekkor $G(x) = (F \circ H)(x)$, és a láncszabály szerint $G'(x) = F'(H(x)) \cdot H'(x)$. Itt $H'(x) = (1,1)$, és $F'(u,v) = (f(v,b(u))b'(u) - f(v,a(u))a'(u), \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial}{\partial v} f(v,t)dt)$, és ebből adódik a formula.

(44) Az előző feladat általános képletét használva:
$G'(x) = e^{x^2 \sin^2 x} \cos(x^3 \sin^2 x + 3)(\sin x + x \cos x) - \int_0^{x \sin x} te^{t^2} \sin(tx+3)dt.$

(45) Az előzőhöz hasonlóan.

(46) $(\phi^{-1})'(7,-2) = [\phi'(0,1)]^{-1}$, és $\phi'(u,v) = \begin{bmatrix} 4u^3+v & 21v^2 \\ e^u & -6v \end{bmatrix}$,
tehát $(\phi^{-1})'(7,-2) = \begin{bmatrix} 1 & 21 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{27} \begin{bmatrix} -6 & -21 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(47) Az előzőhöz hasonlóan.

(48) Mivel $f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$, ezért $f'(\mathbf{x}) = (A + A^T)\mathbf{x}$.

(49) Mivel $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = u_1 x_1 + \dots u_p x_p$, ezért a parciális deriváltakból összeállított derivált vektor $f'(\mathbf{u}) = (u_1, \dots, u_p) = \mathbf{u}$. Ezután pedig $h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle$ esetén $h'(\mathbf{x})$ a szorzat szabály szerint adódik: $h'(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$.

(50) Az $F(x,y,z) = x^2y + 3x^3z^2 - xyz + \ln(2x+y-z) - 23$ függvény parciális deriváltjai kiértékelve az $(1,2,3)$ pontban: $\partial F/\partial x = 2xy + 9x^2z^2 - yz + \frac{2}{2x+y-z} = 81$, $\partial F/\partial y = x^2 - xz + \frac{1}{2x+y-z} = -1$, $\partial F/\partial z = 6x^3z - xy - \frac{1}{2x+y-z} = 15$. Tehát a keresett deriváltak a következők: $\partial z/\partial y = -(\partial F/\partial y)/(\partial F/\partial z) = \frac{1}{15}$, $\partial z/\partial x = -(\partial F/\partial x)/(\partial F/\partial z) = -\frac{81}{15}$, $\partial y/\partial x = -(\partial F/\partial x)/(\partial F/\partial y) = 81$.

(51) Az első egyenletet nevezzük el F_1-nek, a másodikat pedig F_2-nek. Í gy együttesen egy $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ függvényt kapunk. Behelyettesítéssel látjuk, hogy valóban $F(0,2,1,3,-1) = (0,0)$. Ezután számoljuk ki F derivált mátrixát:
$F'(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) =$

$$\begin{bmatrix} 3x_1^2y_2 + x_3 + 3x_2y_1^2 & 3x_1y_1^2 & x_1 + y_1y_2^2 & 6x_1x_2y_1 + x_3y_2^2 & x_1^3 + 2x_3y_1y_2 \\ 2x_1x_2y_1 & x_1^2y_1 + 7y_2^5 & -y_1^2y_2 & x_1^2x_2 - 2x_3y_1y_2 & -x_3y_1^2 + 35x_2y_2^4 \end{bmatrix},$$

és ezt kiértékelve az $(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) = (0,2,1,3,-1)$ pontban kapjuk, hogy

$F'(0,2,1,3,-1) = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & -7 & 9 & 6 & 61 \end{bmatrix}$. Ezek alapján az y_1, y_2 változók lokálisan kifejezhetők $(y_1,y_2) = \varphi(x_1,x_2,x_3)$ alakban, és

$$\partial\mathbf{y}/\partial\mathbf{x} = -[\partial F/\partial\mathbf{y}]^{-1}[\partial F/\partial\mathbf{x}] = -\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 61 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 55 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

(52) a; $f'(x,y,z) = (1,-1,3)$ lineárisan összefüggő kell legyen a feltétel deriváltjával: $g'(x,y,z) = (2x, y, 2z/3)$. Azaz $\lambda_1(1,-1,3) + \lambda_2(2x,y,2z/3) = (0,0,0)$, ahol definíció szerint nem lehet λ_1, λ_2 mindegyike 0. Itt mindig érdemes meggondolni, hogy vajon az egyik λ-ról biztosan látszik-e, hogy nem 0, mert ha igen, akkor azzal le lehet osztani, és így eggyel kevesebb változónk lesz. Jelen esetben λ_2 nyilván nem lehet 0, mert akkor λ_1 is 0 kéne legyen. Ezután leosztva λ_2-vel, és bevezetve a $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ jelölést, azt kapjuk, hogy: $\lambda + 2x = 0$, $-\lambda + y = 0$, $3\lambda + \frac{2z}{3}$. Valamint az eredeti feltétel fenn kell álljon, azaz $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1$. Ez négy egyenlet négy ismeretlenre, és ezeket megoldva két megoldás adódik: $(x_1, y_1, z_1) = (-\frac{1}{\sqrt{30}}, \sqrt{\frac{2}{15}}, -\sqrt{\frac{27}{10}})$, valamint $(x_2, y_2, z_2) = (\frac{1}{\sqrt{30}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}, \sqrt{\frac{27}{10}})$. Mivel a feltétel egy ellipszoid felszínét írja le, a Weierstrass min-max tétel miatt kell lennie minimum- illetve maximum-helynek. Behelyettesítéssel látjuk, hogy az első a minimumhely, a második a maximumhely az adott feltétel mellett. A függvényértékek ezeken a helyeken numerikusan ∓ 5.477.

b; A függvény deriváltja $(2x, 2y, 2z)$ lineárisan összefüggő kell legyen a két feltétel deriváltjával: $\lambda_1(1,2,1) + \lambda_2(2,-1,-3) = (2x,2y,2z)$. És persze a két eredeti feltételnek is teljesülnie kell: $x + 2y + z = 1$, $2x - y - 3z = 4$. Ezeket megoldva: $(x,y,z) = (\frac{16}{15}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{15})$ adódik, ami minimumhely, mivel a feltételek egy egyenest írnak le (két sík metszete), és a függvény $+\infty$-be tart, ahogy a változók ezen az egyenesen kimennek a végtelenbe. Ezért a Weierstrass min-max tétel szerint valahol egy minimumhelynek kell lennie, és ez a Lagrange multiplikátor elv miatt nem lehet máshol, mint $(\frac{16}{15}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{15})$-ben.

c; A deriváltak lineáris összefüggősége miatt $\lambda(\frac{2x}{9}, 2y) = (4y^2, 8xy)$, és az eredeti feltétel szerint $y^2 + \frac{x^2}{9} = 1$. Ezeket megoldva (x,y)-ra hat lehetőség adódik: $(-1,0), (1,0), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{6}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{6}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{6}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{6})$. A feltétel egy ellipszis kerületét írja le a síkon, ezért a Weierstrass min-max tétel miatt itt kell lennie mimimum- illetve maximumhelynek. A fenti pontokat behelyettesítve látjuk, hogy $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{6}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{6})$ a minimumhelyek (és a függvényérték numerikusan -10.856), és $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{6}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{6})$ maximumhelyek (és a függvényérték numerikusan 16.856).

d; A deriváltak lineáris összefüggősége miatt $\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(4x,-1,1) = (2x - 1, 2y, -1)$. A lineáris összefüggőséget néha célszerű a λ változók bevezetése helyett úgy felírni, hogy a három derivált vektorból álló mátrix determinánsa 0. Ez a determináns arra vezet, hogy $-1 + 8x - 2y + 8xy = 0$. Továbbá az eredeti feltételek szerint $x + y + z = 0$, $2x^2 - y + z = 0$. Ha jól számolom, akkor ezek az egyenletek megoldhatók ugyan, de csúnya a számolás mivel végül a $8x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$ egyenletre jutunk, aminek nincs racionális gyöke. Az egyetlen valós gyök felírható köbgyökökkel, de most csak numerikusan írom ide: $x \approx 0.119$. Az ehhez tartozó y, z értékek pedig $y \approx -0.045$, $z \approx -0.074$. Megint meg lehet gondolni, hogy a függvény $+\infty$-be tart ahogy $|x| \to +\infty$, ezért a $(0.119, -0.045, -0.074)$ pontban feltételes minimum kell legyen.

(53) Az integrációs tartomány egy téglalap, ezért az x változót 0-tól 1-ig, az y változót pedig 2-től 5-ig futtatjuk. Figyelnünk kell arra, hogy ha a külső integrálás megy x szerint és a belső y szerint, akkor az integrálás sorrendje $dydx$, hiszen először belül kell kiintegrálnunk y szerint, és csak utána kívül x szerint. Ezt a zárójelezéssel jeleztem ebben a megoldásban:

$\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=2}^{5} (7x^2y^3 - xy + 3)dy \right) dx = \int_{x=0}^{1} [\frac{7x^2y^4}{4} - \frac{xy^2}{2} + 3y]_2^5 \; dx =$

$\int_{x=0}^{1} (\frac{7 \cdot 609x^2}{4} - \frac{21x}{2} + 9)dx = \frac{4263}{12} - \frac{21}{4} + 9$

Természetesen a másik sorrendben is felírhatjuk a változókat, és ugyanaz az eredmény fog kijönni (ez a Fubini tétel):

$\int_{y=2}^{5} \left(\int_{x=0}^{1} (7x^2y^3 - xy + 3)dx \right) dy = \int_{y=2}^{5} [\frac{7x^3y^3}{3} - \frac{x^2y}{2} + 3x]_0^1 \; dy =$

$\int_{y=2}^{5} (\frac{7y^3}{3} - \frac{y}{2} + 3)dy = \frac{4263}{12} - \frac{21}{4} + 9$

(54) Ha az integrációs tartomány nem téglalap, akkor a tartományt paraméterezni kell. Ezt úgy csináljuk, hogy megnézzük x mettől meddig fut (hol van a tartomány "bal széle" és "jobb széle"), és ezután megnézzük, hogy egy lerögzített x érték esetén y mettől meddig fut x függvényében. Ekkor a külső integrálás történik dx szerint, és a belső dy szerint. (Természetesen fordítva is dönthetünk: y szerint integrálva kívül, és x szerint belül, értelemszerüen futtatva az értékeket a tartomány alakja szerint). Jelen esetben x 0-tól 1-ig fut, és rögzitett x esetén y 0-tol $1-x$-ig fut, hiszen ez a háromszög oldalának az egyenlete. Tehát a megoldás:

$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} (1 - 6x^2y)dydx = \cdots = \frac{2}{5}$

A változók fordított sorrendje esetén:

$\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1-y} (1 - 6x^2y)dxdy = \cdots = \frac{2}{5}$

(55) $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} (3x^2 - y + xy)dydx = \cdots = \frac{7}{2}$ vagy pedig

$\int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{2-y} (3x^2 - y + xy)dxdy = \cdots = \frac{7}{2}$.

(56) Néha előfordul az az érdekes eset, hogy az integrálás az egyik sorrendben elvégezhető, de a másikban nem. (Ettől persze a másik sorrendben is ugyanaz az eredmény jönne ki, csakhogy nem jutunk a végére, mivel elakadunk az integrálással.) Erre példa ez a feladat. Ha kívül integrálunk x szerint, akkor a megoldás könnyű:

$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \frac{\sin x}{x} dydx = \int_{x=0}^{1} \sin x \; dx = 1 - \cos 1.$

Ha viszont a változók sorrendjét megfordítjuk, akkor:

$\int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{1} \frac{\sin x}{x} dxdy$

és itt elakadunk, mivel a belső integrált nem tudjuk kiértékelni (mert $\frac{\sin x}{x}$-nek nincs zárt alakban primitív függvénye).

(57) Ennél a feladatnál egyik irány sem vezet célra, mivel elakadunk az integrálással (ha jól látom). De azért a paraméterezést felírom mindkét sorrendben:

$\int_{x=0}^{2} \int_{y=x^2}^{2x} (e^{xy} + x - x^2y)dydx$

$\int_{y=0}^{4} \int_{x=y/2}^{\sqrt{y}} (e^{xy} + x - x^2y)dxdy$

de a belső integrál elvégzése után mindkét irányban elakadunk, mert a kulső integrált nem tudjuk elvégezni zárt alakban, ha jól látom.

(58) A térfogatot úgy számítjuk ki, hogy az azonosan 1 függvényt integráljuk a tartományon. Ehhez a tartományt szokás szerint paraméterezni kell:

$Vol(P) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \int_{z=0}^{3-x-y} 1 dz dy dx = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} (3-x-y) dy dx = \cdots = 1.$

(59) $2\int_{r=0}^{1} (\sqrt{1-r^2})^3 \frac{4\pi}{3} dr = \frac{8\pi}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{8\pi}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \cdots =$
$= \frac{\pi^2}{2}$

(60) A tömeg kiszámítása értelemszerűen úgy történik, hogy az adott sűrűségfüggvényt integráljuk a tartományon:

$M = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2x} (x+3y+6) dy dx = \cdots = \frac{18}{3}$

A súlypont első koordinátája $\frac{1}{M} \int_T x\delta(x,y) dx dy$, míg a második koordinátája $\frac{1}{M} \int_T y\delta(x,y) dx dy$. Ezek kiszámolását rátok hagyom.

(61) $M = \int_{y=0}^{2} \int_{x=-y}^{y-y^2} (x+2y) dx dy = \cdots = \frac{28}{15}$

$S_x = \frac{1}{M} \int_{y=0}^{2} \int_{x=-y}^{y-y^2} x(x+2y) dx dy = \cdots = -\frac{15}{28}\frac{136}{105} = -\frac{34}{49}$

$S_x = \frac{1}{M} \int_{y=0}^{2} \int_{x=-y}^{y-y^2} y(x+2y) dx dy = \cdots = \frac{15}{28}\frac{32}{15} = \frac{8}{7}.$

(62) Először bevezetjük az $u = x$ és $v = y/2$ változókat. Ezt átrendezve (annak érdekében, hogy a régi változók legyenek kifejezve az újakkal) $x = u$, $y = 2v$, és ennek Jacobi-matrixa $f'(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

amelynek determinánsa $det f'(u,v) = 2$. Tehát az első lépésben:

$\int_T (x+3y) dx dy = 2 \int_{u^2+v^2 \leq 1, v \geq 0} (u+6v) du dv.$

Ezután áttérünk polár koordinátákra: $u = r\cos\varphi, v = r\sin\varphi$, és ezzel

$2 \int_{u^2+v^2 \leq 1, v \geq 0} u + 6v du dv = 2 \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{\pi} (r\cos\varphi + 6r\sin\varphi) r d\varphi dr = \cdots = 8$

(63) Először bevezetjük az $u = \frac{x+1}{3}$, $v = \frac{y-2}{2}$ változókat, majd pedig polárkoordinátákra áttérve az $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ változókat, a Jacobi-determináns $6r$, így azt kapjuk, hogy
$\int\int_T (x^2y + 3y + 1) dx dy =$
$6 \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (18r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi - 12r^3 \cos\varphi \sin\varphi + 8r^2 \sin\varphi + 18r^3 \cos^2\varphi - 12r^2 \cos\varphi +$
$9r) d\varphi dr =$
$= \cdots = 81\pi.$

(64) Bevezetve az $u = x/2$, $v = y/5$ változókat, majd polárkoordinátákra áttérve:

$\int_E 1 dx dy = 10 \int_{u^2+v^2 \leq 1} 1 du dv = 10 \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r d\varphi dr = 10\pi.$

(65) Az integrációs tartomány egy origó közepű 2 sugarú gömbön belüli, és egy 1 sugarú függőleges hengeren kívüli pontok halmaza. Hengerkoordinátákkal:

$\int_V f = \int\int\int_V z^2 dx dy dz = \int_{r=1}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{m=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r m^2 dm d\varphi dr = \ldots$

a számolást rátok hagyom.

(66) Az integrációs tartomány egy olyan 1-sugarú henger, amelynek alapja az xz-síkban van. Hengerkoordinátákkal:
$\int_V f = \int\int\int_V 2ye^{x^2+z^2} dxdydz = \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{m=0}^1 2mre^{r^2} dmd\varphi dr = \dots$
a számolást rátok hagyom.

(67) Nyilván a súlypont a z tengelyen lesz, így elég azt a koordinátát kiszámolni. A félgömb tömege $M = \frac{2\pi}{3}$. A súlypont z koordinátája:
$\frac{1}{M}\int_V z\ dxdydz = \frac{3}{2\pi}\int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r^3 \sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi dr = \frac{3}{8}$

(68) Az ívhossz képlete szerint:

$s = \int_{t=-2}^0 \sqrt{1+t^2+2t}dt = \int_{t=-2}^0 |t+1|dt = 1.$

(69) $r'(t) = (-t\cos t, t\sin t, 1)$, ezért az ívhossz $s = \int_0^1 \sqrt{t^2+1}dt = \int_0^{\mathrm{arsh}1} \mathrm{ch}^2 u du = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{arsh}1}(1+\mathrm{ch}2u)du = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\mathrm{arsh}1)$.

(70) A normálvektor $\mathbf{n} = r_u \times r_v$, ahol az r_u, r_v parciális deriváltakat a $(-1,1)$ pontban kiértekelve $r_u = (2u, v, 4u^3) = (-2, 1, -4)$, $r_v = (-4v, u-3v^2, -2) = (-4, -4, -2)$. Ezért $\mathbf{n} = (-18, 12, 12)$. A felület adott pontja pedig ($(u,v) = (-1,1)$-et behelyettesítve $r(u,v)$-be) $(-1,-2,-1)$, így az érintősík egyenlete:
$-18x + 12y + 12z = -18.$

(71) $r_u = (1, 2u, 3u^2)$, $r_v = (1, 2v, 3v^2)$, és ezeket kiértékelve az $(1,-1)$ pontban: $r_u = (1,2,3)$, $r_v = (1,-2,3)$, ezért a normálvektor $\mathbf{n} = r_u \times r_v = (12, 0, -4)$. A felület pontja pedig $r(1,-1) = (0,2,0)$. Ezért az érintősík egyenlete: $12x - 4z = 0$, vagy egszerűsítve $3x - z = 0$.

(72) A normálvektor egy (u,v) pont felett $\mathbf{n} = r_u \times r_v$, ahol $r_u = (2u, 2\cos v, 2\sin v)$, $r_v = (0, -2u\sin v, 2u\cos v)$. Ezért $\mathbf{n}(u,v) = (4u, -4u^2\cos v, -4u^2\sin v)$.
A felszín képlete szerint

$A = \int\int |\mathbf{n}(u,v)|dudv = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{\pi/2} 4u\sqrt{u^2+1}dvdu = \dots$
a számolást rátok hagyom.

(73) $r_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $r_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$, ezért $\mathbf{n} = r_u \times r_v = (\sin v, -\cos v, u)$, és $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{1+u^2}$. Tehát a felszín: $\int_{v=0}^{2\pi}\int_{u=-1}^1 \sqrt{1+u^2}dudv = 2\pi(\mathrm{arsh}1 + \sqrt{2})$.

(74) Itt $F(r(t)) = (t^4 - t^2, 2t^5, -t^2)$ es $r'(t) = (1, 2t, 3t^2)$. Ezért a vonalmenti integrál képlete szerint

$\int_G F(r)dr = \int_{t=0}^2 (t^4 - t^2 + 4t^6 - 3t^4)dt = \dots$
a számolást rátok hagyom.

(75) Az A és B pontot összekötjük egy L szakasszal: $r(t) = (1-t)A + tB = (1-t)(1,-2,3) + t(2,1,4) = (1+t, -2+3t, 3+t)$. Ennek deriváltja $r'(t) = (1,3,1)$, és így a vonalmenti inegrál: $\int_L F = \int_0^1 \langle F(r(t)), r'(t)\rangle dt = 19$.

(76) A felület normálvektora $\mathbf{n} = r_u \times r_v$, ahol $r_u = (0, -3\sin u\sin v, \cos u)$, $r_v = (-3\sin v, 3\cos u\cos v, 0)$. Ezért $\mathbf{n}(u,v) = (-3\cos^2 u\cos v, -3\cos u\sin v, -9\sin u\sin^2 v)$.

Továbbá $F(r(u,v)) = (3\cos v, 3\cos u \sin v, \sin u)$. Ezért a felületi integrál képlete szerint:
$\int F dS = \int_{u=0}^{\pi}\int_{v=0}^{2\pi}(-9\cos^2 u \cos^v -9\cos^2 u \sin^2 v - 9\sin^2 u \sin^2 v)\, dvdu = \dots$
a számolást rátok hagyom.

(77) Az előzőhöz hasonlóan.

(78) $F(x,y,z) = (x^2+y^3, 12xy-3x, xyz^2)$, $\mathrm{div}F(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2x + 12x + 2xyz = 44$ az $(x,y,z) = (1,3,5)$ pontban.

(79) $\mathrm{div}F(x,y,z) = 3x^2+7x+xy^2 = 26$ az $(1,4,7)$ pontban. Továbbá $\mathrm{rot}F(x,y,z) = \nabla \times F = (2xyz+1, -y^2z, 9y+3) = (57, -112, 39)$ az $(1,4,7)$ pontban.

(80) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u) = (\partial_2\partial_3 u - \partial_3\partial_2 u, -\partial_1\partial_3 u + \partial_3\partial_1 u, \partial_1\partial_2 u - \partial_2\partial_1 u) = \mathbf{0}$, mert a Young-tétel miatt a vegyes parciális deriváltak egyenlőek.

$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{v}) = (\partial_1\partial_2 v_3 - \partial_1\partial_3 v_2) + (\partial_2\partial_3 v_1 - \partial_2\partial_1 v_3) + (\partial_3\partial_1 v_2 - \partial_3\partial_2 v_1) = 0.$

(81) $\mathrm{rot}(u\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ uv_1 & uv_2, uv_3 & \end{bmatrix}$, és ezt kifejtve és a megfelelő tagokat összevonva $\mathrm{grad}u \times \mathbf{v} + u\mathrm{rot}\mathbf{v}$ adódik.

(82) Mivel $u \cdot \mathbf{v} = (u\cdot v_1, u\cdot v_2, u\cdot v_3)$, ezért $\mathrm{div}(u\cdot\mathbf{v}) = \frac{\partial u\cdot v_1}{\partial x} + \frac{\partial u\cdot v_2}{\partial y} + \frac{\partial u\cdot v_3}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}v_1 + u\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}v_2 + u\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}v_3 + u\frac{\partial v_3}{\partial z} = \langle \mathrm{grad}u, \mathbf{v}\rangle + u\cdot\mathrm{div}\mathbf{v}$.

(83) F-nek az egész $\mathbb{R}^3$ téren létezik v skalárpotenciálja, mivel F mindenütt folytonosan differenciálható, és $\mathrm{rot}F = \mathbf{0}$ mindenütt. A $v(x,y,z)$ függvény meghatározásához jelöljünk ki egy tetszőleges kezdőpontot és kezdőértéket: legyen $v(0,0,0) = 0$. (Ez megtehető, mivel v csak konstans hozzadása erejéig van meghatározva.) Ezután $v(x,y,y)$ értéket úgy határozzuk meg, hogy $(0,0,0)$-ból tetszőleges úton elmegyunk (x,y,z)-be, és kiszámoljuk a megfelelő vonalmenti integrált. Ezt tipikusan úgy érdemes megtenni, hogy a koordináta tengelyekkel párhuzamosan mozgunk egy három szakaszból álló törött vonalon: $(0,0,0) \to (x,0,0,) \to (x,y.0) \to (x,y,z)$, és összeadjuk a három vonalintegrál értékét. (Persze választhatunk más utat is, ha más kényelmesebb. Az integrál értéke ilyenkor nem függ az út választásától.)

Az első szakasz paraméterezése: $t \mapsto (t,0,0)$, ahol $t \in [0,x]$. Ezért $I_1 = \int_{t=0}^{x}\langle F(t,0,0), (1,0,0)\rangle dt = 0$.

A második szakasz paraméterezése $t \mapsto (x,t,0)$, ahol $t \in [0,y]$, ezért $I_2 = \int_{t=0}^{y}\langle F(x,t,0), (0,1,0)\rangle dt = x^2y$.

A harmadik szakasz paraméterezése $t \mapsto (x,y,t)$, ahol $t \in [0,z]$, ezért $I_3 = \int_{t=0}^{z}\langle F(x,y,t), (0,0,1)\rangle dt = (y^3-xy)z$.

Tehát a potenciálfüggvény $v(x,y,z) = I_1 + I_2 + I_3 = x^2y + (y^3-xy)z$. Érdemes ellenőrizni egy gyors deriválással, hogy valóban $v' = F$.

(84) Az előzőhöz hasonlóan: először kiszámoljuk, hogy $\mathrm{rot}F = \mathbf{0}$, és azután három szakaszon való integrálással megkapjuk a skalárpotenciált $v(x,y,z) = x^2 - y^3 + xz + yz + xyz$. Visszaderiválással könnyen ellenőrizhetjük is.

(85) Itt a felületi integrált fel lehetne írni a múlt héten tanult formulával, miután paraméterezzük a paraboloid felületét. Ez elég fáradságos, de végigvihető, és talan érdemes egyszer végigszámolni, hogy a következő megoldást jobban értékeljük:

Ha a paraboloid felületét egy sík fedővel lezárjuk (azaz az $y = 4$ síkkal elmetsszük az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloidot), akkor egy olyan zárt V testet kapunk amit egyrészt a paraboloid felülete határol (legyen ennek jelölése S_1, másrészt egy ellipszis az $y = 4$ síkon (legyen ez S_2). Erre a testre alkalmazzuk a divergencia tételt:

$\int_V \mathrm{div} F = \int F dS_1 + \int F dS_2$.

Továbbá $\mathrm{div} F = 1+1-2 = 0$ tehát a bal oldal 0. A jobb oldalon pedig a második tagot könnyű kiszámolni, hiszen S_2 egy síknak egy ellipszis darabja, amelynek kifelé mutató normálvektora a konstans $(0, 1, 0)$ vektor, és $F(x, y, z) = (x, y, -2z)$, ezért $\langle F, \mathbf{n} \rangle = y = 4$ (hiszen az ellipszis rajta van az $y = 4$ síkon). Tehát $\int F dS_2$ az ellipszis területének 4-szerese, az ellipszis pedig az xz-síkban elheyezkedő $x^2 + 4z^2 \leq 4$ ellipszisnek az eltoltja. Ennek területe 2π, így $\int F dS_2 = 8\pi$. Tehát végül $\int F dS_1 = -8\pi$.

(86) Az előzőhöz hasonlóan a divergencia tételt használjuk. Ehhez először lezárjuk a felületet, azaz a félgömbhöz hozzávesszük az alját, azaz az $S_2 = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ körlapot. Jelölésben legyen az így kapott zárt félgömb belseje V a felülete pedig $S \cup S_2$. Erre a zárt félgömbre alkalmazzuk a divergencia tételt:

$\int_V \mathrm{div} F = \int F dS + \int F dS_2$.

Itt a jobb oldalon $\mathrm{div} F(x, y, z) = 2y + 4$, és ezt integrálhatjuk a félgömbön gömbi koordinátákat felvéve, vagy mondhatjuk egyszerűen azt, hogy a $2y$-os tag integrálja a félgömbön 0, hiszen a félgömb szimmetrikus y szerint. A $+4$-es tag integrálja nyilván a félgömb térfogatának 4-szerese, azaz $\frac{8}{3}\pi$. Tehát ez áll a jobb oldalon.

A bal oldalon a második tag szintén könnyen kiszámítható, ugyanis az S_2 körlapon a kifelé mutató normálvektor $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, és ezért $\langle F, \mathbf{n} \rangle = -2z = 0$, hiszen a $z = 0$ síkon vagyunk. Ezek szerint $\int F ds_2 = 0$, és így a jobb oldal másik tagja már adódik: $\int F dS = \frac{8}{3}\pi$.

(104) Ha $x > 0$, akkor $n \to \infty$ esetén $e^{nx} \to +\infty$, ezért $f_n(x) \to 1$. Ha $x < 0$, akkor $n \to \infty$ esetén $e^{nx} \to 0$, ezért $f_n(x) \to -1$. Ha $x = 0$, akkor $e^{nx} = 1$ minden n-re, ezért $f_n(0) \to 0$. Tehát az f_n függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x) = \mathrm{sgn} x$ függvényhez. A konvergenica nem egyenletes. Ez belátható a definícióból (tegyétek meg), vagy pedig a következő érveléssel: minden n-re f_n folytonos $\mathbb{R}$-en, ezért ha a konvergenica egyenletes volna, akkor a határfüggvény $f(x)$ is folytonos lenne. De $f(x)$ nem folytonos.

(105) Minden f_n csak $x > 0$ esetén van definiálva, és könnyű látni, hogy $x \in (0, \frac{1}{e})$ esetén $f_n(x) \to -1$, $x = \frac{1}{e}$ esetén páratlan n-re a kifejezés nem értelmes, $x \in (\frac{1}{e}, e)$ esetén $f_n(x) \to 1$, $x = e$ esetén $f_n(x) \to 0$, és végül $x > e$ esetén $f_n(x) \to -1$. Tehát a konvergencia tartomány a $H = (0, \infty) \setminus \{\frac{1}{e}\}$ halmaz. A konvergencia nem egyenletes, mivel az $x = e$ egy környezetében az összes $f_n(x)$ folytonos, de a határfüggvény nem folytonos.

(106) Az $f_n(x)$ kifejezés csak $x \geq 0$-ra értelmes. Ha $x = 0$, akkor $f_n(0) = -n$, ami divergens. Ha $x > 0$, akkor az $1/n$ helyett bevezetve az y változót jobban látszik,

hogy $\lim_{y\to 0}\frac{x^y-1}{y}$ éppen az x^y fuggveny $y=0$-ban vett deriváltja, ami $\ln x$. Tehát $f_n(x)\to\ln x$, ahogy $n\to\infty$, és a konveregecia tartomány a $(0,\infty)$ félegyenes. A konvergencia nem egyenletes: ha az lenne, akkor elég nagy n-re $f_n(x)$ minden $x>0$-ra közel lenne $\ln x$-hez (például $\varepsilon=1$-nél közelebb), de például $x=(n+1)^n$ helyettesítéssel látjuk, hogy $f_n(x)=n^2$, ami nincs közel $f(x)=n\ln(n+1)$-hez. A megoldás lényege, hogy x-et választhatjuk n-től függően úgy, hogy az eltérés a határfüggvénytől nagy legyen.

(107) Az $f_n(x)=e^{-nx}$ esetben $x=0$ esetén $f_n(x)\to 1$, és minden $x>0$ esetén $f_n(x)\to 0$. A konvergencia nem egyenletes, mivel az f_n függvények folytonosak, de a határfüggvény nem az.

Az $f_n(x)=xe^{-nx}$ esetben minden $x\geq 0$-ra $f_n(x)\to 0$. A konvergencia itt egyenletes, és ennek belátásához meg kell néznünk, hogy mi $|f_n(x)|$ maximuma a $[0,\infty]$-en. A maximumhelyet megkereshetjük deriválással, és az jön ki, hogy $f_n'(x)=0$ csak $x=\frac{1}{n}$ esetén teljesül, és ott tényleg globális maximum van, amelynek értéke $f_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{ne}$, és ez 0-hoz tart, ahogy $n\to\infty$.

(108) Természetesen az integrálást nem célszerű elvégezni, hanem meg kell nézni, hogy hova tart az f_n függvénysorozat. Mivel a számláló abszolút értéke legfeljebb 1, ezert $|f_n(x)|\leq\frac{1}{n^2}\to 0$, és a konvergencia egyenletes, hiszen a becslésünk független x-től. Tehát f_n egyenletesen tart az azonosan 0 függvényhez a $[0,1]$ intervallumon, ezért $\int_0^1 f_n(x)dx\to 0$, ahogy $n\to\infty$.

(109) Az integrálás ugyan elvégezhető minden n-re, és aztán a limesz kiszámolható, de ennél egyszerűbb ha belátjuk, hogy $\frac{1}{x^2+n^{1/n}}\to\frac{1}{x^2+1}$ egyenletesen. Ez pedig igaz, mivel $|\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+n^{1/n}}|=\frac{n^{1/n}-1}{(x^2+1)(x^2+n^{1/n})}$, és itt a számláló 0-hoz tart, a nevező pedig x-től függetlenül ≥ 1. Ezért a konvergencia egyenletes, és az integrálok limesze a limesz-függvény integrálja, ami $\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}$.

(110) Az $y=e^{-x^2}$ jelöléssel a szumma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}y^n$ alakot ölt, és mivel $0<y<1$ ez a sor konvergens (pl. a hányados-kritérium miatt). A konvergecia azonban nem egyenletes, mivel a Cauchy-kritérium szerint egyenletes konvergencia esetén minden $\varepsilon>0$-ra elég nagy K,M esetén $|\sum_{n=K}^{M}\frac{1}{n}e^{-nx^2}|<\varepsilon$ kéne legyen x választásától függetlenül. De például $\varepsilon=1/2$-re, tetszőleges K esetén legyen $M=2K$, és az x-et a 0-hoz nagyon közel választva elérhetjük, hogy ebben a szummában $e^{-nx^2}\approx 1$ legyen, azaz $\sum_{n=K}^{2K}\frac{1}{n}e^{-nx^2}\approx\sum_{n=K}^{2K}\frac{1}{n}\approx\ln 2$, ami viszont nem kisebb, mint $\varepsilon=1/2$.

(111) Az előző feladattal ellentétben a konvergeciát az $[1,\infty]$ halmazon nézzük, és itt alkalmazható a Weierstrass-kritérium. Nevezetesen, $x\geq 1$ esetén $\frac{1}{n}e^{-nx^2}\leq\frac{1}{n}e^{-n}=a_n$, ami egy x-től független majoráns, és $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$, ezért az eredeti függvénysor egyenletesen konvergens. Érdemes összehasonlítani az előző feladattal, ahol az jött ki, hogy ugyanez a függvénysor a $(0,\infty)$ félegyenesen már nem egyenletesen konvergens.

(112) Ez kicsit nehezebb feladat. A Cauchy-kritérium szerint az egyenletes konvergenciához minden elég nagy $n\leq m$-re $|\sum_{k=n}^{m}f_k(x)|$ egyenletesen kicsi kéne legyen x-től függetlenül. Viszont, $m=2n$ es $x=n$ esetén azt látjuk, hogy minden

$n \leq k \leq 2n$ esetén $\arctan \frac{2x}{x^2+k^2} \geq \arctan \frac{2}{5n} \approx \frac{2}{5n}$, ezért $\sum_{k=n}^{2n} \arctan \frac{2x}{x^2+k^2} \geq n \arctan \frac{2}{5n} \approx \frac{2}{5}$. Tehát a függvénysor nem egyenletesen konvergens. (Megjegyzem, hogy a függvénysor pontonként viszont konvergens minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, hiszen rögzített x-re és nagy n-re $\arctan \frac{2x}{x^2+n^2}$ nagyságrendje $\frac{1}{n^2}$.)

A b feladatban már egyenletes lesz a konvergencia, ugyanis alkalmazhatjuk a Weierstrass-kritériumot. Ehhez először nézzük meg, hogy mennyi $|f_n(x)|$ maximuma: deriválással könnyen látszik, hogy a maximum éppen $x = n$-ben van, és ekkor az érték $a_n = \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n} \approx \frac{1}{n^2}$. És mivel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ ezért a Weierstrass-kritérium szerint a függvénysor egyenletesen konvergens.

(116) Az összes tulajdonság triviális, kivéve talán a nem-degeneráltság. Ehhez az kell, hogy ha $f \neq 0$ folytonos függvény, akkor $\int_0^{2\pi} |f|^2 \neq 0$. (Itt jegyzem meg, hogy ez azért nem teljesen triviális, mert ha a folytonosságot nem tesszük fel, akkor *nem is igaz*: ugyanis ha f mondjuk csak az $x = 1$ helyen vesz fel 1 értéket, és mindenhol máshol nulla, akkor persze $f \neq 0$, de $\int_0^{2\pi} |f|^2 = 0$). Folytonos f-re ez azért igaz, mert ha $f \neq 0$, akkor van olyan x_0 pont, ahol $f(x_0) \neq 0$, azaz valamely $\delta > 0$-ra $|f(x_0)| > \delta$ és a folytonosság miatt x_0 egy kis $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ környezetében továbbra is $|f(x)| \geq \delta$. Ezért $\int |f|^2 \geq \varepsilon\delta > 0$.

(118) Mivel f páros függvény, ezért a sinusokhoz tartozó b_n Fouier-együtthatók mind 0-k. Továbbá $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$, valamint $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}$ kétszeres parciális integrálás után.

(119) A megadott f fuggveny nem folytonos, de integralhato. A Fourier egyutthatokra vonatkozo $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$, kepleteket haszxnalva egyszeru integralassal (ahol az integracios tartomanyt felbontjuk a $[-\pi, 0)$ es $[0, 2\pi)$ intervallumokra, hiszen f is igy van megadva) adodik, hogy: $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$, $a_n = \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}$, $b_n = \frac{(-1)^n-1-\pi(-1)^n}{n\pi}$.

(124) A $g(x) = h(x + \pi)$ függvény Fourier-együtthatóira felírva a képleteket, és az $y = x + \pi$ helyettesítést elvégezve, valamint felhasználva, hogy $\cos n(x + \pi) = (-1)^n \cos nx$ és $\sin n(x + \pi) = (-1)^n \sin nx$ az állítás azonnal adódik.

(125) Mivel f páratlan, ezért minden $a_n = 0$. A b_n együtthatókra pedig egyszeri parciális integrálás után $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ adódik. A Parseval szerint $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, ahonnan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ adódik.

(128) Mivel f egy trigonometrikus polinom, és a Fourier-sorfejtés általános célja éppen az, hogy egy 2π-periodikus függvényt trigonometrikus polinomokkal közelítsünk, ezért az várhato, hogy a feladat esetében f Foruier-sora visszaadja f-et. És valóban, a sinus és cosinus függvények ortogonalitása miatt csak az $a_0, a_1, a_3 b_4$ egyutthatók nem nullák, és azok pedig éppen az f-ben szereplő együtthatók: $a_0 = 1, a_1 = 3, a_3 = -7, b_4 = 1$.

(129) $a_n(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(2x) \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(y) \cos \frac{n}{2} y dy$, ami 0 ha n páratlan (miért?), és $a_{n/2}(f)$ ha n páros. Hasonlóan a $b_n(g)$ együttatókkal. Tehát az történik, hogy g Fourier együtthatói "szét vannak húzva" f-hez képest, és a páratlan helyekre nullák kerülnek be.

Hivatkozások

[1] Laczkovich Miklos, T. Sos Vera, *Valos analizis I.* letölthető innen: https://www.interkonyv.hu/konyvek/

[2] Laczkovich Miklos - T. Sos Vera, *Valos analizis II.* letölthető innen: https://www.interkonyv.hu/konyvek/

[3] Babcsányi, Gyurmánczi, Wettl, Zibolen, *Matematika feladatgyűjtemény II.* Műegyetemi kiadó 2007, elérhető a honlapomon