1. feladatsor, Analízis 1

(1) Adjuk meg az alábbi komplex számok valós és képzetes részét:
$\exp(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$, $\sin(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$, $\cos(\frac{\pi}{2} + i\pi)$.

(2) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex sz ámok körében:
$e^{iz} + 5 = 0$
$\sin(2z) + 3i = 0$
$\sin z = i \cos z$

(3) Igazoljuk, hogy $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(e^z)' = e^z$.

(4) Mennyi az $f(z) = \frac{z+1}{z+i}$ függvény nyújtási együtthatója és elforgatási szöge a $z_0 = 1$ pontban?

(5) Hol differenciálható az $f(x + iy) = (x^3 + 2xy) + i(3x^2 + 6y)$ függvény? És hol reguláris?

(6) Legyen $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ egy reguláris függvény egy D tartományon. Mutassuk meg, hogy ekkor D minden pontjában $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, és hasonlóan D minden pontjában $\Delta v = 0$.

(7) Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $u(x, y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$ függvény egy reguláris f függvény valós része legyen. Határozzuk meg $f'(1 + 2i)$ értékét.

(8) Mely c érték mellett létezik az $u(x, y) = -x^3 + cxy^2 - y$ függvénynek harmonikus párja? Keressük meg azt a harmonikus párt, amelyre $v(0, 0) = 0$.

(9) Mutassuk meg, hogy ha egy D tartományon egy reguláris f függvény deriváltja minden pontban 0, akkor f konstans.

(10) Tegyük fel, hogy a 0 egy kis $B(0, \varepsilon)$ környezetében $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ teljesül (mindkét sor knvergens, és egyenlőek). Mutassuk meg, hogy ekkor $a_n = b_n$ minden n-re.

(11) Mutassuk meg, hogy a $\sin z$ és $\cos z$ függvenyek nem korlátosak $\mathbb{C}$-n!

2. feladatsor, Analízis 1

(12) Mutassuk meg, hogy az $f(z) = e^{iz}$ függvény korlátos a felső félsíkon.

(13) (HF) Mutassuk meg, hogy minden $z \in \mathbb{C}$-re $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

(14) Számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrálokat:

a; $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, γ az origó körüli 1 sugarú kör.

b; $f(z) = \frac{1}{z}$, γ az origó körüli 1 sugarú kör.

c; $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n \geq 2$, γ az origó körüli 1 sugarú kör.

d; $f(z) = e^{2z}$, γ az 1-ből a $-1+i$-be menő egyenes szakasz.

e; $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ γ az origó körüli 2 sugarú kör.

f; $f(z) = e^{2\overline{z}}$, γ az 1-ből a $-1+i$-be menő egyenes szakasz

g; $f(z) = \cos z$, γ pedig a $z(t) = e^{it^2}$, $t \in [0, \sqrt{\pi}]$ görbe.

(15) (HF) Legyen γ a $3i$ középpontú 2 sugarú körnek az i-ből $5i$-be menő félköríve a jobb félsíkon. Legyen $f(z) = \sin(2z+1)$. Számoljuk ki az $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti integrált.

(16) Legyen $R > 1$ és legyen γ_R az R-ből $-R$-be menő origó közepű félkörív a felső félsíkon. Legyen $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$. Mutassuk meg, hogy $R \to \infty$ esetén $\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0$.

3. feladatsor, Analízis 1

(17) Jelölje $\gamma(z_0, r)$ a z_0 körüli r sugarú kört pozitív körüljárással. A Cauchy integrálformulák segítségével számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrálokat:

a; $\int_{\gamma(-i,1)} \frac{e^{iz^2}}{z^2+9}dz$

b; $\int_{\gamma(0,2)} \frac{1}{z} + z\cos z^2 dz$

c; $\int_{\gamma(2i,3)} \frac{\sin iz}{(z-1)(z^2+4)}dz$

(18) (HF) Jelölje $\gamma(z_0, r)$ a z_0 körüli r sugarú kört pozitív körüljárással. A Cauchy integrálformulák segítségével számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrált:

$\int_{\gamma(1,3)} \frac{e^{\pi z}-1}{(z-i)z}dz$

(19) A Cauchy integrálformulák segítségével számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrált:

$\int_\gamma \frac{\cos z}{4z-3-3i}dz$ ahol γ az origó középpontú 2 oldalhosszú négyzet.

(20) Jelölje $\gamma(z_0, r)$ a z_0 körüli r sugarú kört pozitív körüljárással. A Cauchy integrálformulák segítségével számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrálokat:

a; $\int_{\gamma(0,3)} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$

b; $\int_{\gamma(-1,3)} \frac{\sin z}{z(z-i)^2}dz$

(21) (HF) Jelölje $\gamma(z_0, r)$ a z_0 körüli r sugarú kört pozitív körüljárással. A Cauchy integrálformulák segítségével számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrált:

$\int_{\gamma(2,3)} \frac{\cos 2z}{(z-1)^2(z+i)}dz$

(22) Legyen $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ polinom, ($a_k \in \mathbb{C}$), és $M := \sup\{|p(z)| : |z| = 1\}$. Mutassuk meg, hogy minden k-ra $|a_k| \le M$.

(23) Az előző feladatban legyen $M_r = \sup\{|p(z)| : |z| = r\}$. Milyen becslést kapunk $|a_k|$-ra az M_r függvényében?

4. feladatsor, Analízis 1

(24) Mutassuk meg, hogy $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$. (Segítség: vegyük egy origó középpontú, nagy R sugarú körvonal felső félsíkba eső részét kiegészítve a $[-R,+R]$ intervallummal, és ezen végezzünk komplex vonalintegrált az $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ függvńyre, majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)

(25) Mutassuk meg, hogy $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

(26) (HF) Mutassuk meg, hogy $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

(27) Mutassuk meg, hogy $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}(b-a)$. (Hint: legyen $r \approx 0, R \approx \infty$, és az $\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$ függvényt integráljuk a következő görbén: $-r$-ből egy felső félköríven menjünk el r-ig, aztán r-ből R-be, aztán R-ből egy felső félköríven $-R$-ig, aztán $-R$-ből $-r$-be.)

(28) Jelölje $n(\gamma, s)$ a γ görbe s pontra vonatkozó indexét. Legyen γ a következő zárt görbe: $z(t) = e^{2it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Mennyi $n(\gamma, 0)$, $n(\gamma, \frac{1}{2i})$, $n(\gamma, 3i)$?

(29) Legyen γ egy rögzített zárt görbe, és jelölje $n(\gamma, s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-s}dz$ a γ görbe s pontra vonatkozó indexét minden $s \notin \gamma$ esetén. Mutassuk meg ezen képlet alapján, hogy $n(\gamma, s)$ az s vátozónak folytonos függvénye. Mutassuk meg azt is a képlet alapján, hogy ha $|s|$ elég nagy, akkor $n(\gamma, s) = 0$.

(30) (HF) Legyen $f(z)$ olyan egész függvény, amelyre létezik olyan $\alpha > 0$, hogy $|f(z)| \leq |z|^\alpha$ minden z-re. Mutassuk meg, hogy $f(z)$ egy polinom, és $deg\ f \leq \alpha$.

(31) Legyen $f(z)$ reguláris a $D = \{z : |z| < 1\}$ egységkörlapon, és tegyük fel, hogy $f(0) = 0$ és $|f(z)| \leq 1$ minden $z \in D$ esetén. Mutassuk meg, hogy $|f(z)| \leq |z|$ minden $z \in D$-re. (Ez a Schwarz lemma. Hint: a $g(z) = f(z)/z$ függvényre alkalmazzuk a maximum elvet.)

5. feladatsor, Analízis 1

(32) Határozzuk meg a következő $f(z)$ függvények z_0 pont körüli Laurent-sorfejtését minden szóba jövő körgyűrűn:

a; $f(z) = \frac{1}{z+1}$, $z_0 = i$

b; $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-i)}$, $z_0 = i$

c; $f(z) = e^z + \frac{1}{z}$, $z_0 = 2$

d; $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3}$, $z_0 = -1$

e; $f(z) = \frac{e^z}{1+e^z}$, $z_0 = i\pi$

(33) (HF) Határozzuk meg a következő $f(z)$ függvény z_0 pont körüli Laurent-sorfejtését minden szóba jövő körgyűrűn:

$f(z) = \cos z + \frac{1}{z+1}$, $z_0 = 3$

(34) Legyen $f(z) = \frac{\sin z}{1-\cos z}$. Ekkor f-nek izolált szingularitása van a 0-ban. Döntsük el, hogy f-nek a 0-ban pólusa van-e, és ha igen, akkor hányadrendű.

(35) Számoljuk ki az alábbi függvények reziduumát a megadott pontokban:

a; $f(z) = e^z + \frac{1}{z}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$

b; $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-i)}$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = 0$

c; $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3}$, $z_1 = -1$

d; $f(z) = \frac{e^z}{1+e^z}$, $z_1 = i\pi$

e; $f(z) = \frac{\sin z}{1-\cos z}$, $z_1 = 0$

f; $f(z) = \frac{\sin z}{z(1-\cos z)}$, $z_1 = 0$

g; $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$, $z_1 = 0$.

(36) (HF) Számoljuk ki az alábbi függvény reziduumát a megadott pontban:

$f(z) = \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}$, $z_1 = 0$

(37) Legyen $0 < p < 1$. Mutassuk meg, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$. (Segítség: vegyük a $[-R, R]$ alapú és $2\pi i$ magas téglalapot a felső fésíkon, és ezen végezzünk komplex vonalintegrált.)

6. feladatsor, Analízis 1

(38) A reziduum tétel segítségével számítsuk ki a következő integrálokat:

a; $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx$

b; $\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{x^2+1} dx$

(39) (HF) A reziduum tétel segítségével számítsuk ki a következő integrált:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2} dx$

(40) Hány 1-nél nem nagyobb abszolútértékű gyöke van a $p(z) = z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$ polinomnak (multiplicitással számolva)? És a $q(z) = 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 9z - 2$ polinomnak?

(41) (HF) Hány 2-nél nem nagyobb abszolútértékű gyöke van a $p(z) = z^4 + 3z^3 + 6$ polinomnak (multiplicitással számolva)? És a $q(z) = z^4 - 2z^3 + 9z^2 + z - 1$ polinomnak?

(42) Hány gyöke van a $p(z) = z^5 + 3z^2 + 1$ polinomnak az $1 < |z| < 2$ körgyűrűben?

(43) Mutassuk meg, hogy az $f(z) = z + 3 + 2e^z$ függvénynek 1 gyöke van a $Rez \leq 0$ félsíkban.

(44) Mutassuk meg, hogy a (z_1, z_2, z_3, z_4) kettősviszony pontosan akkor valós, ha a pontok egy körre vagy egy egyensre esnek.

(45) Mutassuk meg, hogy egy lineáris törtfüggvény megtartja a kettősviszonyt.

(46) Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely:

a; Az $(1, i, 0)$ ponthármast a $(2, -i, 4)$ ponthármasba viszi

b; A felső félsíkot az egységkörlapra képzi, és az $1 + i$ pontot a 0-ba

c; A $|z - 1 - 2i| < 2$ körlapot a $|w - 4 - 5i| > 3$ körlap komplementerbe viszi

d; A $\mathrm{Re}z \geq 0$ félsíkot a $w - 4i \leq 3$ körlapra képzi

e; Az $e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$ félkörívet a $[-1, 1]$ szakaszba viszi.

7. feladatsor (összefoglaló), Analízis 1

(47) Oldjuk meg: $\cos(3z) = 2i$.

(48) Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $u(x, y) = cx^3 + 12xy^2 + 4xy$ függvény egy reguláris f függvény valós része legyen. Határozzuk meg $f'(1 - 3i)$ értékét.

(49) Számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrálokat:

a; $f(z) = \cos(2z)$, γ a -1-ből az $1 + i$-be menő egyenes szakasz.

b; $f(z) = \overline{z} + z^2$, γ az egységkör felső félsíkba eső félköríve.

(50) Jelölje $\gamma(z_0, r)$ a z_0 körüli r sugarú kört pozitív körüljárással. Számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ komplex vonalmenti integrált:

$\int_{\gamma(3,2)} \frac{\cos z}{z(z-2)^2} dz$

(51) Számoljuk ki az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx$ integrált.

(52) Számoljuk ki az alábbi függvény reziduumát a megadott pontokban:

$f(z) = \frac{z+1}{(e^z-1)(z-i)}$, $z_1 = i$, $z_2 = 0$, $z_3 = 7 + 3i$

(53) Határozzuk meg a következő $f(z)$ függvény z_0 pontbeli reziduumát, és z_0 körüli Laurent-sorfejtését minden szóba jövő körgyűrűn:

$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-i)}$, $z_0 = 1$

(54) Számítsuk ki: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2x+2} dx$

(55) Hány gyöke van a $p(z) = z^7 + 2z^5 - z^4 + 7z^2 + 2$ polinomnak az $1 < |z| < 2$ körgyűrűben?

(56) Számítsuk ki: $\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{x^3+1} dx$.

(57) Adjunk meg olyan $w = f(z)$ lineáris törtfüggvényt, amely a Re $z \geq 0$ félsíkot a $|w + 1| \leq 1$ körlapra képzi, és a $z = 2$ pontot a $w = -1$ pontba képezi.

8. feladatsor, Analízis 1

(58) Metrikát definiálnak-e $\mathbb{R}$-en a következő távolságfüggvények:
a; $d(x, y) = (x - y)^2$
b; $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

(59) Mutassuk meg, hogy metrikus térben minden véges sok pontból álló halmaz zárt.

(60) (HF) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A \subset (X, d)$ esetén $int(A)$ nyílt halmaz ($int(A)$ jelöli az A halmaz belsejét).

(61) Mutassuk meg, hogy minden normált térben a $B(0, 1)$ nyílt egységgömb konvex. Mutassuk meg, hogy normált térben minden gömb (nyílt is, zárt is) konvex.

(62) Mutassunk példát olyan (X, d) metrikus térre, ahol létezik $x_1, x_2 \in X$ és $0 < r_1 < r_2$ úgy, hogy $B(x_2, r_2) \subsetneq B(x_1, r_1)$ (azaz egy kis gömb tartalmaz egy nagyobb gömböt).

(63) Mutassuk meg, hogy egy normált térben a fenti szituáció nem fordulhat elő, azaz egy kis gömb nem tartalmazhat egy nagyobb sugarú gömböt.

(64) Mutassuk meg, hogy ha (X, d)-ben $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor $d(a_n, b_n) \to d(a, b)$.

(65) Mutassuk meg, hogy metrikus térben minden Cauchy sorozat korlátos.

(66) (HF) Legyen $f \in C[0, 1]$, esetén $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Mutassuk meg, hogy a $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ normált tér nem teljes.

(67) Jelölje $C[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos valós értékű függvényeket, és legyen $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$. Lássuk be, hogy a $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér teljes.

(68) Legyen $\ell^p := \{(a_n) : \sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < \infty\}$. Adjunk példát olyan a_n sorozatra, hogy $(a_n) \in \ell^p$ minden $p > 1$-re, de $(a_n) \notin \ell^1$.

(69) Legyen $\ell^\infty := \{(a_n) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$. Jelölje H_0 a véges sok nem nulla tagot tartalmazó sorozatok halmazát. Mutassuk meg, hogy H_0 altere az ℓ^∞ térnek, de H_0 nem zárt ℓ^∞-ben.

9. feladatsor, Analízis 1

(70) Legyen $A \subset (X, d)$. Mutassuk meg, hogy $B \subset (A, d)$ pontosan akkor nyílt (az (A, d) metrikus térben), ha létezik olyan $U \subset (X, d)$ nyílt halmaz, amelyre $B = A \cap U$.

(71) Legyen $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, és $A = [0, 1) \cup \{2\} \cup (3, 4]$. Legyen $B = (1/2, 1) \cup \{2\} \cup (7/2, 4]$. Döntsük el, hogy B nyílt-e vagy zárt-e (X, d)-ben, illetve (A, d)-ben.

(72) Adjunk példát olyan (X, d) metrikus térre, és olyan A_n halmazsorozatra, hogy minden A_n zárt, nem üres, $A_{n+1} \subset A_n$, de $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

(73) (HF) Mutassuk meg, hogy metrikus térben véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.

(74) Mutassuk meg, hogy metrikus térben akárhány kompakt halmaz metszete kompakt.

(75) Legyen $Y \subset (X, d)$, és $A \subset Y$. Mutassuk meg, hogy ha A kompakt (X, d)-ben, akkor A kompakt (Y, d)-ben is.

(76) Legyen $Y \subset (X, d)$. Mutassuk meg, hogy ha Y kompakt (X, d)-ben, akkor az (Y, d) metrikus tér teljes. (Segítség: használjuk a Bolzano-Weierstrass tételt.)

(77) Legyen $A, B \subset (X, d)$ két diszjunkt kompakt halmaz. Mutassuk meg, hogy $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$. Mutassunk példát arra, hogy két zárt halmaz esetén ez az infimum akár 0 is lehet.

(78) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \arctan x$ függvény egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en. Általánosabban, legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, és tegyük fel, hogy f' korlátos. Mutassuk meg, hogy f egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en.

(79) (HF) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \sqrt{|x|}$ függvény egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en.

(80) Legyen $X = \mathbb{R}$, és $d_1(x, y) = |x - y|$, $d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$, $d_3(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$, $d_4(x, y) = |e^x - e^y|$. Mutassuk meg, hogy (X, d_1) és (X, d_2) teljes, de $(X, d_3), (X, d_4)$ nem teljesek. Határozzuk meg (azaz írjuk le valamilyen átlátható módon) az (X, d_3) tér teljes burkát.

10. feladatsor, Analízis 1

(81) Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$. (Már láttuk előadáson, hogy $\mathbb{K}^n$-en bármely két norma ekvivalens, de most mutassuk meg ezt a két konkrét egyenlőtlenséget).

(82) Mutassuk meg, hogy $\ell^1 \subset \ell^2$ (azaz ha egy sorzatra $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ konvergens, akkor $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$ is konvergens). Mutassuk meg továbbá, hogy nem létzik olyan $a > 0$ szám, amelyre minden $\mathbf{x} \in \ell^1$-re $\|\mathbf{x}\|_1 \leq a\|\mathbf{x}\|_2$, tehát $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ nem ekvivalensek az ℓ^1 téren.

(83) Mutassuk meg, hogy ha Y véges dimenziós altér egy $(X, \|\cdot\|)$ normált térben, akkor Y zárt.

(84) Mutassuk meg, hogy az $(X, d) = ([0,1], |\cdot|)$ metrikus tér összefğgő, azaz, nem léteznek olyan X-beli U, V nem-üres, diszjunkt nyílt halmazok, amelyekre $U \cup V = X$. (Vigyázzunk arra, hogy U, V az X térben nyíltak, $\mathbb{R}$-ben nem feltétlenül.).

(85) Az előző feladat segítségével mutassuk meg, hogy ha egy (X, d) tér ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.

(86) (HF) Legyen $f : (X, d) \to (Y, d')$ folytonos függvény, és $H \subset X$ összefüggő halmaz. Mutassuk meg, hogy $f(H)$ is összefüggő.

(87) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, amelyre $|f'(x)| < 1/2$ minden x-re. Mutassuk meg, hogy létezik egyetlen olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre $f(x) = x$. (Segítség: f kontrakció.) Mi van, ha csak annyit teszünk fel, hogy minden x-re $|f'(x)| < 1$?

(88) (HF) Mutassuk meg, hogy bármely $(V, \|\cdot\|)$ normált téren $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Ez alapján mutassuk meg, hogy a norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{K}$ folytonos leképezés. A norma egy lináris leképezés?

(89) Legyen $a < b \in \mathbb{R}$, valamint $C^1[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f' \in C[a,b]\}$ (ahol az a, b végpontokban jobb- és baloldali deriváltak értendők).
Norma-e a $C^1[a,b]$ vektortéren az
$\|f\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$
illetve
$\|f\|_0 = |f(a)| + \int_a^b |f(t)| dt$
leképezések valamelyike?

(90) Legyen $M : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ a $(t^2 - 3)$-mal való szorzás operátora, azaz $\forall g \in C[0,1]$-re, $(Mg)(t) := (t^2 - 3)g(t)$. Mutassuk meg, hogy M korlátos lineáris operátor, és határozzuk meg a normáját.

11. feladatsor, Analízis 1

(91) Legyen $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, és legyen $T : X \to X$, és $f : X \to \mathbb{R}$ a következő operátor illetve funkcionál:
$(T\mathbf{x})(t) = \int_0^t \mathbf{x}(\tau)d\tau$, $f(\mathbf{x}) = \int_0^{1/2} \mathbf{x}(t)dt - \int_{1/2}^1 \mathbf{x}(t)dt$.
Mutassuk meg, hogy T és f lineáris és korlátos, valamint határozzuk meg a normájukat.

(92) (HF) Legyen $X = (C[0,3], \|\cdot\|_\infty)$, és legyen $f : X \to \mathbb{R}$ a következő funkcionál
$f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}(3) - \int_0^1 \mathbf{x}(t)dt$.
Mutassuk meg, hogy f lineáris és korlátos, valamint határozzuk meg a normáját.

(93) Legyen $P \subset (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ a valós együtthatós polinomok halmaza. Mutassuk meg, hogy P altér, és $D : P \to P$, $D(p) = p'$ deriválás operátor lineáris, de nem folytonos.

(94) Mutassuk meg, hogy ha X, Y véges dimenziós normált terek, akkor minden $T : X \to Y$ lineáris leképezés folytonos.

(95) Mutassuk meg, hogy ha egy $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ lineáris leképezés folytonos egyetlen $x_0 \in X$ pontban, akkor mindenütt folytonos X-en.

(96) Mutassuk meg, hogy ha $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ korlátos lineáris operátor, akkor minden $x \in X$-re $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. Ez alapján mutassuk meg, hogy ha $S : (Y, \|\cdot\|) \to (Z, \|\cdot\|)$ korlátos lineáris, akkor $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

(97) Legyenek $a_n \to a$, $b_n \to b$ konvergens sorozatok $(X, \|\cdot\|)$-ben. Mutassuk meg, hogy $a_n + b_n \to a + b$, $\lambda a_n \to \lambda a$ (minden $\lambda \in \mathbb{K}$-ra), és $\|a_n\| \to \|a\|$.

(98) Legyen V normált tér, és $A \subset V$ konvex halmaz. Igazoljuk, hogy a lezárt $\overline{A}$ szintén konvex halmaz.

(99) Legyen X vektortér, és $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ két ekvivalens norma X felett. Legyen $G \subset X$ nyílt $\|\cdot\|$ szerint. Mutassuk meg, hogy G nyílt $\|\cdot\|'$ szerint is.

(100) (HF) Legyen X vektortér, és $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ két ekvivalens norma X felett. Tegyük fel, hogy $(X, \|\cdot\|)$ teljes. Mutassuk meg, hogy $(X, \|\cdot\|')$ is teljes.

12. feladatsor, Analízis 1

(101) Legyen X Banach tér, és $T \in B(X,X)$. Mutassuk meg, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$ korlátos lineáris operátort definiál, és adjunk felső becslést a normájára. (Speciállisan, ha T egy $n \times n$-es mátrix, akkor így definiáljuk az e^T mátrixot.)

(102) (HF) Legyen $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki az e^A mátrixot.

(103) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ komplex Banach tér és legyen $T \in B(V,V)$ korlátos lineáris operátor. Legyen $R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \in B(V,V)\}$ a T operátor úgynevezett rezolvens halmaza. Mutassuk meg, hogy $|\lambda| > \|T\|$ esetén $\lambda \in R(T)$. Mutassuk meg továbbá, hogy $R(T)$ nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben.

(104) Legyenen x, y ortogonális vektorok egy Hilbert térben. Lássuk be a Pitagorasz tételt: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(105) Bizonyítsuk be a polarizációs azonosságokat Hilbert-téren:
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén $\mathrm{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$, és
$\mathrm{Im}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x-iy\|^2 - \|x+iy\|^2)$.

(106) (HF) Bizonyítsuk be a skaláris szorzás folytonossági tulajdonságát:
ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$ akkor $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

(107) Legyen A egy $n \times n$-es valós mátrix, és legyen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a szokásos skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-en. Milyen tulajdonságokkal kell A-nak rendelkeznie ahhoz, hogy $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$ skaláris szorás legyen? És a komplex esetben?

(108) Legyen $M \subset H$ tetszőleges halmaz egy Hilbert-térben, $V = \operatorname{span} M$, és $M^\perp = \{z \in H \ : \ z \perp x \text{ minden } x \in M\}$. Mutassuk meg, hogy $M^\perp$ zárt altér H-ban, és $M^\perp = V^\perp = \overline{V}^\perp$.

(109) Legyen x és y két tetszőleges vektor egy Hilbert-téren. Mutassuk meg, hogy x és y pontosan akkor ortogonálisak, ha $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ teljesül minden $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén. (Ezt felhasználtuk az ortogonális felbontási tételnél.)

(110) Legyen $(e_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H$ egy ortonormált rendszer, és legyen $x \in H$ tetszőleges vektor. Mutassuk meg, hogy az $y = \sum_{k=0}^{N} \langle e_k, x \rangle e_k$ vektorra igaz, hogy $x - y$ ortogonális a $\operatorname{span}\{e_0, e_1, \ldots, e_N\}$ altérre.

(111) Legyen $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ortonormált bázis egy H Hilbert-térben, és legyen $x \in H$ tetszőleges vektor. Mutassuk meg, hogy $x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle e_k, x \rangle e_k$

13. feladatsor (összefoglaló), Analízis 1

A HF* feladatokat azok adhatják be pótlásként, akik valamelyik héten nem adtak be HF-et.

(112) Legyen $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, és minden $x, y \in X$ esetén legyen $d(x, y) = |\tan x - \tan y|$. Mutassuk meg, hogy (X, d) metrikus tér. Teljes-e (X, d)?

(113) Legyenek $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrikus terek. Mutassuk meg, hogy $X_1 \times X_2$-n metrikát definiálnak a következő távolságfüggvények:
a; $d((y_1, y_2), (z_1, z_2)) = d_1(y_1, z_1) + d_2(y_2, z_2)$
b; $d((y_1, y_2), (z_1, z_2)) = \max\{d_1(y_1, z_1), d_2(y_2, z_2)\}$

(114) Mutassuk meg, hogy metrikus térben két korlátos halmaz uniója korlátos.

(115) Mutassuk meg, hogy ha a_n, b_n Cauchy sorozatok (X, d)-ben, akkor létezik $\lim d(a_n, b_n)$.

(116) Tekintsük a $[0, 1]$-en értelmezett valós értékű folytonos függvények $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ terében az
$A_1 = \{f \in C[0, 1] : \inf_{0 \leq t \leq 1} f(t) > 0\}$, valamint
$A_2 = \{f \in C[0, 1] : f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) = 7\}$ halmazokat. Döntsük el, hogy A_1 és A_2 nyílt-e, zárt-e, vagy egyik sem.

(117) Mutassuk meg, hogy $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ normált tér.

(118) Tekintsük az $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ sorozatot. Milyen $1 \leq p \leq +\infty$ értékek esetén igaz, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$?

(119) Legyen $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, és tekintsük X-en a szokásos $d(x, y) = |x - y|$ metrikát. Mutassuk meg, hogy (X, d) nem kompakt.

(120) (HF*) Legyen $Y \subset (X, d)$, és d' a d metrika megszorítása Y-ra. Legyen $A \subset Y$. Mutassuk meg, hogy ha A kompakt (X, d)-ben, akkor A kompakt (Y, d')-ben is.

(121) Mutassuk meg, hogy minden kontrakció egyenletsen folytonos.

(122) Mutassuk meg, hogy ha egy $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt is és zárt is egyszerre, akkor $U = \emptyset$ vagy $U = \mathbb{R}^n$.

(123) Legyen $X = (C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$ a $[-1, 1]$ intervallumon valós értékű folytonos függvények tere a sup-normával, és legyen $\varphi : X \to \mathbb{R}$ a következő funkcionál: $\varphi(f) = f(0) - \int_{-1}^{-1/2} f(t)dt + \int_{1/2}^{1} f(t)dt$. Mutassuk meg, hogy φ korlátos lineáris funkcionál, és számítsuk ki a normáját.
(15 pont)

(124) Legyen X Banach tér, és $T \in B(X, X)$, amelyre $\|T\| < 1$. Mutassuk meg, hogy $\sum_{k=0}^{\infty}(k + 1)T^k$ korlátos lineáris operátort definiál, és adjunk felső becslést a normájára.

(125) Legyen X véges diemnziós vektortér, és $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ két különböző norma X-en. Tegyuk fel, hogy egy x_n sorozat konvergens $\|\cdot\|$ szerint. Mutassuk meg, hogy ekkor x_n konvergens $\|\cdot\|'$ szerint is.

(126) Legyen $X = C[a,b]$, és $f, g \in X$ esetén legyen $\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$. Mutassuk meg, hogy ez skaláris szorzás X-en. (Speciálisan, ha csak valós értékű függvényeket tekintünk, akkor a konjugálás elhagyható.)

(127) (HF*) Legyen $z \in H$ adott vektor, és tekintsük az $f(x) = \langle x, z\rangle$ függvényt H-ról $\mathbb{K}$-ba. Igaz-e, hogy f egyenletesen folytonos?

(128) Legyen $H = L^2(0,1)$ és legyen $f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = t^2 + at + b$. Válasszuk meg az a, b paraméterket úgy, hogy f_3 ortogonális legyen f_1-re és f_2-re. Legyen $f_4(t) = 5t^2 + t + 1$. Adjuk meg f_4 ortogonális projekcióját a $\operatorname{span}\{f_1, f_2\}$ altérre.

(129) Legyen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormált bázis egy H Hilbert-térben, és legyenek x, y tetszőleges vektorok. Mutassuk meg, hogy

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle y, e_k\rangle}$$