1. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: metrikus tér, normált tér, nyílt halmaz, halmaz belseje

1. Metrikát definiálnak-e $\mathbb{R}$-en a következő távolságfüggvények:

   a; $d(x, y) = (x - y)^2$

   b; $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

2. Lássuk be, hogy az Euklideszi norma ($\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{1/2}$) teljesíti a norma axiómákat $\mathbb{R}^n$-en és $\mathbb{C}^n$-en.

3. Jelölje $C[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos valós értékű függvényeket, és legyen $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Lássuk be, hogy $(C[a, b], \| \cdot \|_\infty)$ normált tér.

4. Legyen $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$. Lássuk be, hogy $(C[a, b], \| \cdot \|_1)$ normált tér.

5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges (X, d) metrikus térben minden $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ halmaz nyílt.

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A \subset (X, d)$ esetén $int(A)$ nyílt halmaz ($int(A)$ jelöli az A halmaz belsejét).

7. Legyenek $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrikus terek. Mutassuk meg, hogy $X_1 \times X_2$-n metrikát definiálnak a következő távolságfüggvények:

   a; $d((y_1, y_2), (z_1, z_2)) = d_1(y_1, z_1) + d_2(y_2, z_2)$

   b; $d((y_1, y_2), (z_1, z_2)) = \max\{d_1(y_1, z_1), d_2(y_2, z_2)\}$

8. Mutassunk példát olyan (X, d) metrikus térre, ahol létezik $x_1, x_2 \in X$ és $0 < r_1 < r_2$ úgy, hogy $B(x_2, r_2) \subsetneq B(x_1, r_1)$ (azaz egy kis gömg tartalmaz egy nagyobb gömböt).

9. Mutassuk meg, hogy egy normált térben a fenti szituáció nem fordulhat elő, azaz egy kis gömb nem tartalmazhat egy nagyobb sugarú gömböt.

2. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: zárt halmaz, korlátos halmaz, konvex halmaz, ℓ^p-terek, szeparábilis tér

1. Lássuk be a zárt halmazok alaptulajdonságait:

   (i) X és $\emptyset$ zárt

   (ii) ha $F_1, \dots, F_n$ zárt, akkor $\cup_{i=1}^n F_n$ zárt

   (iii) ha F_i zárt akkor $\cap_{i \in I} F_i$ zárt.

2. Mutassuk meg, hogy metrikus térben minden véges sok pontból álló halmaz zárt.

3. Mutassuk meg, hogy diszkrét metrikus térben minden részhalmaz egyszerre nyílt és zárt.

4. Jelölje H_0 a véges sok nem nulla tagot tartalmazó sorozatok halmazát. Mutassuk meg, hogy H_0 altere az ℓ^∞ térnek, de H_0 nem zárt ℓ^∞-ben.

5. Mutassuk meg, hogy $K \subset (X, d)$ pontosan akkor korlátos, ha minden $x \in X$ esetén létezik olyan R, hogy $K \subset B(x, R)$.

6. Mutassuk meg, hogy két korlátos halmaz uniója korlátos.

7. Mutassuk meg, hogy $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ normált tér.

8. Mutassuk meg, hogy minden normált térben a $B(0, 1)$ nyílt egységgömb konvex. Mutassuk meg, hogy normált térben minden gömb (nyílt is, zárt is) konvex.

9. Az előző feladat segítségével mutassuk meg, hogy $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ nem normált tér ha $0 < p < 1$.

10. Adjunk példát olyan a_n sorozatra, hogy $(a_n) \in \ell^p$ minden $p > 1$-re, de $(a_n) \notin \ell^1$.

11. Adjunk példát olyan a_n sorozatra, hogy $a_n \to 0$, de $(a_n) \notin \ell^p$ minden $1 < p < +\infty$ esetén.

12. Mutassuk meg, hogy minden $1 \leq p < +\infty$ esetén ℓ^p szeparábilis. (Segítség: tekintsük a véges sok nemnulla tagot tartalmazó racionális számokból álló sorozatokat.)

13. További nevezetes metrikák:

    (a) Jelölje X az $\mathbb{R}^n$ tér kompakt részhalmazainak összességét. Egy tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^n$ esetén legyen $A_\varepsilon = \cup_{a\in A}\overline{B}(a,\varepsilon)$, az A halmaz "ε-kövérítése". Ezután $A, B \in X$ esetén legyen $d(A,B) = \inf\{\varepsilon : A \subset B_\varepsilon \text{ és } B \subset A_\varepsilon\}$. Ez a Hausdorff-metrika.

    (b) Legyen $X = \mathbb{Z}_2^n$, az n-hosszú 0-1-sorozatok tere. Legyen $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n), \mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in X$ esetén $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. Ez a Hamming-távolság.

    (c) Legyen $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \forall n,k \geq 0 \ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(k)}(x)| < +\infty\}$, azaz azon végtelenszer differenciálható függvények tere, amelyeknek minden deriváltja minden polinom reciprokánál gyorsabban tart 0-hoz. Ez a "Schwartz-tér". Legyen $|f|_{n,k} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(k)}(x)|$. Ezután $f, g \in S$ esetén legyen $d(f,g) = \sum_{n,k=0}^\infty \frac{1}{2^{n+k}} \frac{|f-g|_{n,k}}{1+|f-g|_{n,k}}$.

3. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: metrika megszorítása részhalmazra, torlódási pontok, konvergens sorozatok, Cauchy sorozatok, teljes tér

1. Legyen $A \subset (X,d)$. Mutassuk meg, hogy $B \subset (A,d)$ pontosan akkor nyílt (az (A,d) metrikus térben), ha létezik olyan $U \subset (X,d)$ nyílt halmaz, amelyre $B = A \cap U$.

2. Legyen $(X,d) = (\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$, és $A = [0,1) \cup \{2\} \cup (3,4]$. Legyen $B = (1/2,1) \cup \{2\} \cup (7/2,4]$. Döntsük el, hogy B nyílt-e vagy zárt-e (X,d)-ben, illetve (A,d)-ben.

3. Legyen $A \subset (X,d)$ tetszőleges részhalmaz. Mutassuk meg, hogy az A torlódási pontjainak halmaza zárt.

4. Mutassuk meg, hogy metrikus térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.

5. Mutassuk meg, hogy minden konvergens sorozat Cauchy.

6. Mutassuk meg, hogy ha (X,d)-ben $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor $d(a_n,b_n) \to d(a,b)$.

7. Legyen $d_1(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$, $d_2(x,y) = |e^x - e^y|$. Teljesek-e az $(\mathbb{R}, d_1), (\mathbb{R}, d_2)$, illetve a $(\mathbb{R}_0^+, d_2)$ metrikus terek (ahol $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$).

8. Legyen $f \in C[0,1]$, esetén $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. Mutassuk meg, hogy a $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ normált tér nem teljes.

9. Tegyük fel, hogy az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér teljes, és X-en adott még egy $\|\cdot\|'$ norma, amelyre léteznek olyan $a, b > 0$ számok, hogy minden $x \in X$-re $a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|$. Mutassuk meg, hogy $(X, \|\cdot\|'$ is teljes.

10. Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$.

11. Mutassuk meg, hogy $\ell^1 \subset \ell^2$. Mutassuk meg továbbá, hogy nem létzik olyan $a > 0$ szám, amelyre minden $\mathbf{x} \in \ell^1$-re $\|\mathbf{x}\|_1 \leq a\|\mathbf{x}\|_2$

4. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: folytonosság, ekvivalens metrikák és normák, teljessé tétel, Baire-féle kategóriatétel

1. Lássuk be az átviteli elvet: egy $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ függvény pontosan akkor folytonos $a \in X$-ben, ha minden a-hoz tartó x_n sorozatra $f(x_n) \to f(a)$.

2. Legyen az X alaphalmazon adott két metrika d_1, d_2. Mutassuk meg, hogy ha létzik olyan $a, b > 0$, hogy $ad_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq bd_1(x,y)$ minden $x, y \in X$-re, akkor d_1 és d_2 ekvivalensek (azaz a nyílt halmazok ugyanazok d_1 és d_2 szerint).

3. Legyen $X = \mathbb{R}$, és $d_1(x,y) = |x-y|$, $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. Ekvivalens-e (X, d_1) és (X, d_2)? Léteznek-e olyan $a, b > 0$ számok, hogy $ad_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq bd_1(x,y)$?

4. Legyen $X = \mathbb{R}$, és $d_1(x,y) = |x-y|$, $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$, $d_3(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$, $d_4(x,y) = |e^x - e^y|$. Mutassuk meg, hogy (X, d_1) és (X, d_2) teljes, de $(X, d_3), (X, d_4)$ nem teljesek. Határozzuk meg (azaz írjuk le valamilyen átlátható módon) az (X, d_3) tér teljes burkát.

5. Legyen X egy vektortér, amelyen adott két ekvivalens norma $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ (azaz létezik olyan $a, b > 0$, hogy $a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|$ minden $x \in X$-re). Mutassuk meg, hogy ha $(X, \|\cdot\|)$ teljes, akkor $(X, \|\cdot\|')$ is teljes.

6. Mutassuk meg, hogy ha Y véges dimenziós altér egy $(X, \|\cdot\|)$ normált térben, akkor Y zárt.

7. Mutassuk meg, hogy $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ teljes, de $(C[a, b], \|\cdot\|_1$ nem teljes.

8. Mutassuk meg, hogy ha a_n, b_n Cauchy sorozatok (X, d)-ben, akkor létezik $\lim d(a_n, b_n)$.

9. Mutassuk meg, hogy a Cantor halmaz sehol sem sűrű és zárt $\mathbb{R}$-ben.

10. Mutassuk meg, hogy megszámlálható sok első kategoriájú halmaz uniója első kategoriájú.

11. Mutassuk meg, hogy véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű.

5. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: kompaktság, teljesen korlátos halmazok, kontrakció

1. Mutassunk példát olyan (X, d) metrikus térre, és olyan $A \subset X$ halmazra, amely korlátos és zárt, de nem kompakt.

2. Adjunk példát olyan (X, d) metrikus térre, és olyan A_n halmazsorozatra, hogy minden A_n zárt, nem üres, $A_{n+1} \subset A_n$, de $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

3. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}$ az Euklideszi metrikával nem lokálisan kompakt.

4. Mutassuk meg, hogy metrikus térben véges sok kompakt halmaz metszete kompakt.

5. Legyen $Y \subset (X, d)$, és d' a d metrika megszorítása Y-ra. Mutassuk meg, hogy ha A kompakt (X, d)-ben, akkor A kompakt (Y, d')-ben is.

6. Legyen $Y \subset (X, d)$, és d' a d metrika megszorítása Y-ra. Mutassuk meg, hogy ha Y kompakt (X, d)-ben, akkor az (Y, d') metrikus tér teljes.

7. Legyen (X, d) kompakt metrikus tér. Mutassuk meg, hogy $A \subset X$ pontosan akkor kompakt ha zárt.

8. Legyen $A, B \subset (X, d)$ két diszjunkt kompakt halmaz. Mutassuk meg, hogy $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$. Mutassunk példát arra, hogy két zárt halmaz esetén ez az infimum akár 0 is lehet.

9. Legyen $A \subset (X, d)$, és $dist_A(y) = \inf\{d(y, x) : x \in A\}$ az A-tól való távolság függvény. Mutassuk meg, hogy $dist_A : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy $\overline{A} = \{y \in X : dist_A(y) = 0\}$.

10. Mutassuk meg, hogy ha $A \subset (X, d)$ teljesen korlátos, akkor $\overline{A}$ is teljesen korlátos.

11. Legyen $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ kontrakció. Mutassuk meg, hogy f folytonos.

6. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: folytonosság, egyenletes folytonosság, összefüggőség,

1. Lássuk be a folytonoság egy másik ekvivalens jellemzéset: $f : (X, d) \to (Y, d')$ folytonos ha minden zárt halmaz ősképe zárt, azaz minden $H \subset Y$ zárt halmaz esetén $f^{-1}(H) = \{x \in X : f(x) \in H\}$ zárt. (Emlékeztető: már szerepelt, hogy f pontosan akkor folytonos, ha minden nyílt halmaz ősképe nyílt.)

2. Legyenek $f : (X, d) \to (Y, d')$, és $g : (Y, d) \to (Z, d'')$ folytonos függvények. Mutassuk meg, hogy $g \circ f$ is folytonos.

3. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \arctan x$ függvény egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en. Általánosabban, legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, és tegyük fel, hogy f' korlátos. Mutassuk meg, hogy f egyenletesen folyotnos $\mathbb{R}$-en.

4. Lássuk be Heine tételét: ha $f : (X, d) \to (Y, d')$ folytonos függvény, és $K \subset X$ kompakt, akkor f egyenletesen folytonos K-n.

5. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \sqrt{|x|}$ függvény egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en.

6. Legyen $f : (X, d) \to (X, d)$ kontrakció. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $x_1 \in X$ esetén az $x_{n+1} = f(x_n)$ képlettel definiált sorozat Cauchy-sorozat X-ben.

7. Legyenek $F, H \subset (X, d)$ diszjunkt zárt halmazok. A $dist_F, dist_H$ függvények segítségével konstruáljunk olyan $g : X \to [0, 1]$ folytonos függvényt, amelyre $g|_F = 0$, $g|_H = 1$. Ezután konstruáljunk olyan U, V diszjunkt nyílt halmazokat, amelyekre $F \subset U$, $H \subset V$.

8. Mutassuk meg, hogy az $(X, d) = ([0, 1], |\cdot|)$ metrikus tér összefggő, azaz, nem léteznek olyan X-beli U, V nem-üres, diszjunkt nyílt halmazok, amelyekre $U \cup V = X$.

9. Mutassuk meg, hogy ha egy (X, d) tér ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.

10. Legyen $f : (X, d) \to (Y, d')$ folytonos függvény, és $H \subset X$ összefüggő halmaz. Mutassuk meg, hogy $f(H)$ is összefüggő.

11. Mutassuk meg, hogy ha egy $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt is és zárt is egyszerre, akkor $U = \emptyset$ vagy $U = \mathbb{R}^n$.

7. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: normált tér, operátor norma, folytonos lineáris leképezés

1. Mutassuk meg, hogy bármely $(V, \|\cdot\|)$ normált téren $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. Ez alapján mutassuk meg, hogy a norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{K}$ folytonos leképezés. A norma lináris leképezés?

2. Legyen $a < b \in \mathbb{R}$, valamint $C^1[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f' \in C[a, b]\}$ (ahol az a, b végpontokban jobb- és baloldali deriváltak értendők).

   Norma-e a $C^1[a, b]$ vektortéren az

   $\|f\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$

   illetve

   $\|f\|_0 = |f(a)| + \int_a^b |f(t)|dt$

   leképezések valamelyike?

3. Legyen $M : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ a (t^2-3)-mal való szorzás operátora, azaz $\forall g \in C[0,1]$-re, $(Mg)(t) := (t^2-3)g(t)$. Mutassuk meg, hogy M korlátos lineáris operátor, és határozzuk meg a normáját.

4. Legyen $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, és legyen $T : X \to X$, és $f : X \to \mathbb{R}$ a következő operátorok:
$(T\mathbf{x})(t) = \int_0^t \mathbf{x}(\tau)d\tau$, $f(\mathbf{x}) = \int_0^{1/2} \mathbf{x}(t)dt - \int_{1/2}^1 \mathbf{x}(t)dt$.
Mutassuk meg, hogy T és f lineáris és korlátos, valamint határozzuk meg a normájukat.

5. Legyen $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{\underline{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |$ az $\underline{a}$ sorozat véges sok helyen nem $0\}$, és legyen $\phi : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ a következő lineáris funkcionál:

   $\phi(\underline{a}) = \sum_{n=0}^\infty a_n$.

   Folytonos-e ϕ ha az $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ teret a

   a. $\|\cdot\|_\infty$ normával látjuk el?

   b. $\|\cdot\|_1$ normával látjuk el?

   c. $\|\cdot\|_2$ normával látjuk el?

6. Legyen $P \subset (C_\mathbb{R}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ a valós együtthatós polinomok halmaza. Mutassuk meg, hogy P altér, és $D : P \to P$, $D(p) = p'$ deriválás operátor lineáris, de nem folytonos.

7. Mutassuk meg, hogy ha X, Y véges dimenziós normált terek, akkor minden $T : X \to Y$ lineáris leképezés folytonos.

8. Mutassuk meg, hogy ha egy $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ lineáris leképezés folytonos egyetlen $x_0 \in X$ pontban, akkor mindenütt folytonos X-en.

8. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: operátor norma, korlátos lineáris leképezés, skaláris szorzás, ortogonalitás

1. Mutassuk meg, hogy ha $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ korlátos lineáris operátor, akkor minden $x \in X$-re $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. Ez alapján mutassuk meg, hogy ha $S : (Y, \|\cdot\|) \to (Z, \|\cdot\|)$ korlátos lineáris, akkor $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

2. Legyenek $a_n \to A$, $b_n \to B$ konvergens sorozatok $(X, \|\cdot\|)$-ben. Mutassuk meg, hogy $a_n + b_n \to A + B$, $\lambda a_n \to \lambda A$ (minden $\lambda \in \mathbb{K}$-ra), és $\|a_n\| \to \|A\|$.

3. Legyenek $z \in X$ és $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ esetén $T_z, M_\lambda : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|)$ a következő operátorok: $T_z(x) = x + z$, $M_\lambda x = \lambda x$. Mutassuk meg, hogy T_z és M_λ homeomorfizmusok. (Igaz-e, hogy lineárisak?)

4. Legyen V normált tér, és $A \subset V$ konvex halmaz. Igazoljuk, hogy a lezárt $\overline{A}$ szintén konvex halmaz.

5. Legyen $X = C[a, b]$, és $f, g \in X$ esetén legyen $\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx$. Mutassuk meg, hogy ez skaláris szorzás X-en. (Speciálisan, ha csak valós értékű függvényeket tekintünk, akkor a konjugálás elhagyható.)

6. Bizonyítsuk be a polarizációs azonosságokat Hilbert-téren:

   $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$

   $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$, és
   $\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$.

7. Bizonyítsuk be a skaláris szorzás folytonossági tulajdonságát:
   ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$ akkor $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

8. Legyen A egy $n \times n$-es valós mátrix, és legyen $\langle\cdot, \cdot\rangle$ a szokásos skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-en. Milyen tulajdonságokkal kell A-nak rendelkeznie ahhoz, hogy $\langle x, y\rangle_A = \langle Ax, y\rangle$ skaláris szorás legyen? És a komplex esetben?

9. Legyen $M \subset H$ tetszőleges halmaz egy Hilbert-térben, és
   $M^\perp = \{z \in H \mid z \perp x \text{ for all } x \in M\}$. Mutassuk meg, hogy $M^\perp$ zárt altér.

9. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: skaláris szorzás, ortogonális felbontási tétel, ortonormált rendszerek, Carl Neumann sor, egyenletes korlátosság tétele

1. Legyen $z \in H$ adott vektor, és tekintsük az $f(x) = \langle x, z\rangle$ függvényt H-ról $\mathbb{K}$-ba. Igaz-e, hogy f egyenletesen folytonos?

2. Legyen x és y két tetszőleges vektor egy Hilbert-téren. Mutassuk meg, hogy x és y pontosan akkor ortogonálisak, ha $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ teljesül minden $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén.

3. Legyen $H = L^2(0,1)$ és legyen $f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = t^2 + at + b$. Válasszuk meg az a, b paraméterket úgy, hogy f_3 ortogonális legyen f_1-re és f_2-re. Legyen $f_4(t) = 5t^2 + t + 1$. Adjuk meg f_4 ortogonális projekcióját a $\text{span}\{f_1, f_2\}$ altérre.

4. Legyen $Y \subset l^2$ a következő altér: $Y = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l^2 : x_{2n} = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$. Mutassuk meg, hogy Y zárt altér és találjuk meg $Y^\perp$-t.

5. Legyen $(e_n) \subset H$ egy ortonormált rendszer. Mutassuk meg, hogy az e_n vektorok lineárisan függetlenek.

6. Legyen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormált bázis egy H Hilbert-térben, és legyenek x, y tetszőleges vektorok. Mutassuk meg, hogy

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle y, e_k\rangle}$$

7. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach tér és legyen $T \in B(V, V)$ korlátos lineáris operátor. Legyen $R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I)^{-1} \in B(V, V)\}$ a T operátor úgynevezett rezolvens halmaza. Mutassuk meg, hogy $R(T)$ nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben.

8. Legyen $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ egy komplex sorozat, amelyre $\sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j$ konvergens minden $\mathbf{x} = (x_1, \dots x_n, \dots) \in c_0$ esetén (c_0 jelöli a 0-hoz tartó komplex sorozatok terét). Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$. (Segítség: tekintsük az $f_n(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j$ funkcionál sorozatot, és alkalmazzuk az egyenletes korlátosság tételét.)

10. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: abszolút konvergencia, duális tér, egyenletes korlátosság tétele, nyílt leképezés tétel, korlátos inverz tétel, zárt gráf tétel

1. Legyen X Banach tér, és $T \in B(X, X)$. Mutassuk meg, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$ korlátos lineáris operátort definiál, és adjunk felső becslést a normájára. (Speciállisan, ha T egy $n \times n$-es mátrix, akkor így definiáljuk az e^T mátrixot.)

2. Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots,) \in \ell^\infty$ esetén az $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ leképezés korlátos lineáris funkcionált definiál ℓ^1-en, és $\|f\| = \|\mathbf{y}\|_\infty$. Mutassuk meg továbbá, hogy minden $f \in (\ell^1)'$ előáll ilyen alakban, azaz $(\ell^1)' = \ell^\infty$.

3. Legyen $j : X \to X''$ a kanonikus beágyazás, azaz $x \mapsto g_x$, ahol $g_x(f) = f(x)$ minden $f \in X'$-re. Mutassuk meg, hogy $\|g_x\| \le \|x\|$. (Hamarosan látni fogjuk, hogy $\|g_x\| = \|x\|$).

4. Az egyenletes korlátosság tételének felhasználásával bizonyítsuk be a Banach-Steinhaus tételt: ha U Banach tér, V normált tér, és $T_n \in B(U, V)$, olyan operátorsorozat, amelyre minden $x \in U$ esetén $T_n x$ konvergens V-ben, akkor a $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ formulával definiált operátor lineáris, korlátos, és $\|T\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

5. Legyen $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ két különböző norma egy X téren úgy, hogy $(X, \|\cdot\|_1)$ és $(X, \|\cdot\|_2)$ egyaránt teljesek. Tegyük fel, hogy minden $(x_n) \subset X$ sorozatra $\|x_n\|_1 \to 0$ maga után vonja, hogy $\|x_n\|_2 \to 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor a két norma ekvivalens. (Segítség: használjuk a korlátos inverz tételt az identitás operátorra.)

6. Legyenek X, Y Banach terek, és $T : X \rightarrowtail Y$ injektív, zárt operátor. Mutassuk meg, hogy ekkor $T^{-1} : Y \rightarrowtail X$ szintén zárt operátor. (Segítség: T és T^{-1} gráfja lényegében ugyanaz.)

7. Legyen X Banach tér, $T \in B(X, X)$. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $T - \lambda I$ injektív, $Ran(T - \lambda I)$ sűrű X-ben, és $(T - \lambda I)^{-1}$ korlátos. Mutassuk meg, hogy ekkor $Dom(T - \lambda I) = X$, azaz ay inverz operátor mindenütt értelmezett. (Használjuk a zárt gráf tételt és az előző feladatot.)

8. Legyen $DomT \subset X$, $T : DomT \to Y$ egy zárt lineáris operátor, és legyen $C \subset X$ egy kompakt halmaz. Mutassuk meg, hogy $T(C)$ zárt halmaz Y-ban.

11. feladatsor, Analízis 1

Szükséges fogalmak: Hahn-Banach tétel, multilineáris leképezések, differenciálás normált terekben

1. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér. Azt mondjuk, hogy egy X-beli x_n sorozat gyengén tart $x \in X$-hez, ha minden $f \in X'$ korlátos lineáris funkcionál esetén $f(x_n) \to f(x)$. Mutassuk meg, hogy a gyenge limesz egyértelmű.

2. Adjunk példát olyan gyengén konvergens x_n sorozatra, amely nem konvergens.

3. Legyenek $X_1, \dots X_n$ és W normált terek, és legyen $A : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to W$ multilineáris leképezés esetén $\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \in B} \|A\mathbf{x}\|$ (ahol

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B$ azt jelenti, hogy minden $\|x_j\| \leq 1$). Mutassuk meg, hogy a korlátos multilineáris leképzések terén ez valóban normát definiál.

4. Legyenek $X_1, \dots X_n$ normált terek, és legyen $A : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to W$ multilineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy ha $x_1, \dots x_n$ bármelyike 0, akkor $A(x_1, \dots, x_n) = 0$. Mutassuk meg továbbá, hogy ha A korlátos akkor $\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|A\| \|x_1\| \dots \|x_n\|$.

5. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér, és $p, q \in X$. Definiájuk a $p \otimes q : X' \times X' \to \mathbb{K}$ leképezést a következőképpen: $p \otimes q(f, g) = f(p)g(q)$. Mutassuk meg, hogy $p \otimes q$ bilineáris, és határozzuk meg a normáját.

6. Mutassuk meg, hogy ha $dimX = N$, akkor $dimX' = N$.

7. Legyen $R : X \times X \to \mathbb{R}$ szimmetrikus bilináris forma. Mutassuk meg a polarizációs azonosságot: $R(x, y) = \frac{1}{4}(R(x+y, x+y) - R(x-y, x-y))$. Ez alapján mutassuk meg, hogy ha $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ szimmetrikus mátrixok, és $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$ minden $x \in \mathbb{R}^N$-re, akkor $A = B$. (Mutassunk ellenpéldát, ha nem tesszük fel, hogy A, B szimmetrikusak.)

8. Legyen $dimX = N$ véges dimenziós vektortér. Mutassuk meg, hogy $dim \otimes^n X = N^n$, $dim \bigwedge^n X = \binom{N}{n}$, $dim \bigvee^n X = \binom{N+n-1}{n}$.

9. Legyen $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ a következő leképezés: $f(A) = A^2$. Számoljuk ki f deriváltját.

10. Legyen $X = (C[0, 1], \|\cdot\|)$, és legyen $F : X \to X$ az $f(t) \mapsto f^3(t)$ képlettel definiálva. Legyen $f(t) = e^t$ és $g(t) = t^2$. A definíció alapján számoljuk ki a $(D_g F)(f)$ iránymenti deriváltat. (Azaz az F függvény f pontbeli g irányú deriváltját.)