1. feladatsor, Analízis 2

(1) Mutassuk meg, hogy ha $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^d$, akkor A Jordan mérhető és $\lambda_J(A) = 0$.

(2) Legyen $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Mutassuk meg, hogy $\lambda_J^*(A) = 1$ de $\lambda_{*,J}(A) = 0$, tehát A nem Jordan mérhető.

(3) Mutassuk meg, hogy bármely $\mathcal{A}$ σ-algebra zárt a megszámlálható metszetre, azaz ha $A_n \in \mathcal{A}$, akkor $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(4) Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ egy mértéktér, és $E, F \in \mathcal{M}$. Mutassuk meg, hogy $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

(5) Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ egy mértéktér, és $E \in \mathcal{M}$. Legyen $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$ bármely $A \in \mathcal{M}$ esetén. Mutassuk meg, hogy μ_E is egy mérték a $(X, \mathcal{M})$ téren.

(6) Legyen X tetszőleges halmaz, és $A \subset X$. Határozzuk meg az
(a) $\{A\}$
(b) $\{B : B \subset A\}$
halmazrendszerek által generált σ-algebrát.

(7) Adjuk meg azon metrikus tereket, ahol a nyílt halmazok σ-algebrát alkotnak.

(8) * Mutassuk meg, hogy ha egy σ-algebra nem véges, akkor legalább kontinuum számosságú.

(9) Legyen $f : X \to Y$ tetszőleges függvény. Mutassuk meg, hogy
(a) ha $\mathcal{B}$ egy σ-algebra Y-ban, akkor $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ is σ-algebra X-ben.
(b) Ha $\mathcal{A}$ egy σ-algebra X-ben, akkor $\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ is σ-algebra Y-ban.

(10) Legyen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a Borel σ-algebra $\mathbb{R}$-en, és legyen $Y \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Mutassuk meg, hogy Y-ban a Borel σ-algebra éppen $\mathcal{B}(Y) = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

1/b feladatsor, Analízis 2

(11) Adjuk meg az alábbi komplex számok valós és képzetes részét:
$\exp(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$, $\sin(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$, $\cos(\frac{\pi}{2} + i\pi)$.

(12) Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex sz ámok körében:
$e^{iz} + 5 = 0$
$\sin(2z) + 3i = 0$
$\sin z = i \cos z$

(13) Igazoljuk, hogy $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(e^z)' = e^z$.

(14) Mennyi az $f(z) = \frac{z+1}{z+i}$ függvény nyújtási együtthatója és elforgatási szöge a $z_0 = 1$ pontban?

(15) Hol differenciálható az $f(x+iy) = (x^3 + 2xy) + i(3x^2 + 6y)$ függvény? És hol reguláris?

(16) Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $u(x,y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$ függvény egy reguláris f függvény valós része legyen. Határozzuk meg $f'(1+2i)$ értékét.

(17) Mely c érték mellett létezik az $u(x,y) = -x^3 + cxy^2 - y$ függvénynek harmonikus párja? Keressük meg azt a harmonikus párt, amelyre $v(0,0) = 0$.

2. feladatsor, Analízis 2.

(18) Mutassuk meg, hogy a Jordan-féle belső mérték definíciójában nem kapunk semmi újat, ha megengedünk megszámlálhatóan sok belső téglát is, azaz $\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(T_n) \ : \ \dot{\cup} T_n \subset A\} = \lambda_{*,J}(A)$.

(19) Mutassuk meg, hogy minden $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz előáll megszámlálhatóan sok nyílt tégla uniójaként.

(20) Bizonyítsuk be a Borel-Cantelli lemmát: "ha A_i olyan események, hogy a bekövetkezési valószínűségeik összege véges, akkor 0 annak a valószínűsége, hogy végtelen sok bekövetkezik belőlük". Formálisan, ha μ egy valószínűségi mérték egy $\mathcal{A}$ σ-algebrán, és $A_i \in \mathcal{A}$ olyanok, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < +\infty$ akkor $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} A_k) = 0$. (Mutassuk meg először, hogy $\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} A_k$ pontosan azt az eseményt írja le, hogy végtelen sok A_i következik be.)

(21) Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ egy mértéktér, és legyen $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0\}$, és $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{A}, F \subset N$ valamely $N \in \mathcal{N}$−re$\}$. Mutassuk meg, hogy $\overline{\mathcal{M}}$ szintén egy σ-algebra.

(22) Az előző feladatban legyen $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. Mutassuk meg, hogy $\overline{\mu}$ egy teljes mérték $\overline{\mathcal{M}}$-on. (Az $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ mértéktér az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *teljes burka*).

(23) Legyenek $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ mérhető terek, és legyen $T \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$ egy mérhető halmaz a szorzat σ-algebrában. Mutassuk meg, hogy a keresztmetszetek $T_x = \{y \in Y : (x,y) \in T\}$ és $T_y = \{x \in X : (x,y) \in T\}$ mérhetőek minden $x \in X$ és $y \in Y$ esetén.

2/b feladatsor, Analízis 2

(24) Számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrálokat:

a; $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, γ az origó körüli 1 sugarú kör.

b; $f(z) = \frac{1}{z}$, γ az origó körüli 1 sugarú kör.

c; $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n \geq 2$, γ az origó körüli 1 sugarú kör.

d; $f(z) = e^{2z}$, γ az 1-ből a $-1+i$-be menő egyenes szakasz.

e; $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ γ az origó körüli 2 sugarú kör.

f; $f(z) = e^{2\overline{z}}$, γ az 1-ből a $-1+i$-be menő egyenes szakasz

3/a feladatsor, Analízis 2

(25) Legyen $\mathcal{A}_0$ azon $\mathbb{R}$-beli halmazok családja, amelyek előállnak véges sok diszjunkt $(a_i, b_i]$ alakú intervallum uniójaként. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}_0$ algebra, de nem σ-algebra.

(26) Legyen $\mathcal{A}_1$ azon $\mathbb{R}$-beli halmazok családja, amelyek előállnak véges sok (nem feltétlenül diszjunkt) $(a_i, b_i]$ alakú intervallum uniójaként. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1$.

(27) Az előző két feladatot oldjuk meg $\mathbb{R}^n$-ben is (ahol az intervallumok helyett $\prod_{j=1}^n (a_i, b_i]$ téglák véges unióit tekintjük).

(28) Legyen μ egy véges Borel mérték $\mathbb{R}$-en (azaz egy véges mérték $\mathbb{R}$ Borel halmazain). Legyen $F(x) = \mu((-\infty, x])$. Mutassuk meg, hogy F monoton növő, jobbról folytonos függvény. (F-et nevezzük μ *eloszlásfüggvényének*.)

(29) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$-en a Lebesgue-mérték *kívülről nyílt reguláris*, azaz minden mérhető E halmazra $\lambda(E) = \inf\{\lambda(U) : U \supset E, U \text{ nyilt}\}$.

(30) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$-en a Lebesgue-mérték *belülről kompakt reguláris*, azaz minden mérhető E halmazra $\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) : K \subset E, K \text{ kompakt}\}$.

(31) Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ olyan halmaz, amelynek Lebesgue külső mértéke 0. Mutassuk meg, hogy A Lebesgue mérhető, és $\lambda(A) = 0$.

(32) A Caratheodory kiterjesztési tétel bizonyításában fogadjuk el, hogy a μ^*-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, amelyen μ^* egy mérték. Mutassuk meg, hogy ez a mérték valóban teljes, ahogy a tétel állítja.

(33) Legyen X a sík egységnégyzete, és $\mathcal{E}$ a $T_{ab} = \{(x, y) \in X : 0 \leq a \leq x \leq b \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ alakú téglalapok családja. Legyen $\nu : \mathcal{E} \to [0, 1]$, $\nu(T_{ab}) = b - a$. Legyen μ^* a ν által generált külső mérték. Mutassuk meg, hogy a $D = \{(x, y) \in X : x = y\}$ halmaz nem mérhető.

3/b feladatsor, Analízis 2

(34) Jelölje $\gamma(z_0, r)$ a z_0 körüli r sugarú kört pozitív körüljárással. A Cauchy integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrálokat:

a; $\int_{\gamma(-i,1)} \frac{e^{iz^2}}{z^2+9} dz$

b; $\int_{\gamma(0,2)} \frac{1}{z} + z \cos z^2 dz$

c; $\int_{\gamma(2i,3)} \frac{\sin iz}{(z-1)(z^2+4)} dz$

d; $\int_{\gamma(1,3)} \frac{e^{\pi z}-1}{(z-i)z} dz$

(35) A Cauchy integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrált:

$\int_\gamma \frac{\cos z}{4z-3-3i}dz$ ahol γ az origó középpontú 2 oldalhosszú négyzet.

4/a feladatsor, Analízis 2

A feladatokban λ a Lebesgue-mértéket jelöli.

(36) Legyen $F(x) = 0$ ha $x < 0$, és $F(x) = 1$ ha $x \geq 0$. Kövessük végig az F által generált μ_F Lebesgue-Stiletjes mérték konstrukcióját, és mutassuk meg, hogy $\mu_F = \delta_0$.

(37) Mutassuk meg, hogy a Cantor halmaz kompakt, sehol sem sűrű, Lebesgue-mértéke 0, és a számossága kontinuum.

(38) Mutassuk meg, hogy ha $E \subset [0, 1]$, $\lambda(E) = 1$, akkor E sűrű $[0, 1]$-ben.

(39) Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt G_δ-halmaznak nevezünk ha H előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként. Egy $T \subset \mathbb{R}^n$ halmazt F_σ-halmaznak nevezünk ha T előáll megszámlálható sok zárt halmaz uni'ojaént. Legyen $E \subset \mathbb{R}^n$ véges Lebesgue-mértékű halmaz. Mutassuk meg, hogy létezik olyan H G_δ-halmaz és T F_σ halmaz, amelyekre $T \subset E \subset H$ és $\lambda(H \setminus T) = 0$.

(40) Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $\lambda(H) = 0$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ amelyre minden $c + h$ $(h \in H)$ irracionális.

(41) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-en a Borel halmazok σ-algebrája eltolásinvariáns, azaz ha $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ akkor $t + A = \{t + a : a \in A\} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. (Használjuk ki, hogy a nyílt intervallumok eltoásinvariánsak.)

(42) Kihasználva a Caratheodory kiterjesztés unicitását (Theorem 1.14) mutassuk meg, hogy minden $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ esetén $\lambda(A) = \lambda(t + A)$.

4/b feladatsor, Analízis 2

(43) Jelölje $\gamma(z_0, r)$ a z_0 körüli r sugarú kört pozitív körüljárással. A Cauchy integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrálokat:

a; $\int_{\gamma(0,3)} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$

b; $\int_{\gamma(-1,3)} \frac{\sin z}{z(z-i)^2}dz$

(44) Mutassuk meg, hogy minden $0 \leq p < 1$-re $\int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos t+p^2}dt = \frac{2\pi}{1-p^2}$ (használjuk a $z = e^{it}$ helyettesítést).

(45) Legyen $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ polinom, $(a_k \in \mathbb{C})$, és $M := \sup\{|p(z)| : |z| = 1\}$. Mutassuk meg, hogy minden k-ra $|a_k| \leq M$.

(46) Az előző feladatban legyen $M_r = \sup\{|p(z)| : |z| = r\}$. Milyen becslést kapunk $|a_k|$-ra az M_r függvényében?

(47) * Az előző feladatokat hatványsorra általánosítva mutassuk meg, hogy ha $f(z)$ függvény az egész síkon reguláris, és korlátos, akkor konstans. (Ez a nevezetes Liouville-tétel.)

5/a feladatsor, Analízis 2

(48) Legyenek $(X, \mathcal{A}), (Y_1, \mathcal{M}_1), (Y_2, \mathcal{M}_2)$ mérhető terek. Mutassuk meg, hogy egy $f = (f_1, f_2) : X \to Y_1 \times Y_2$ függvény pontosan akkor $\mathcal{A} - \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ mérhető, ha f_1 $\mathcal{A} - \mathcal{M}_1$ mérhető, és f_2 $\mathcal{A} - \mathcal{M}_2$ mérhető. (Egyszerűen használjuk a szorzat σ-algebra definícióját.)

(49) Mutassuk meg, hogy $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ pontosan akkor mérhető (értsd: Borel-mérhető), ha $\mathrm{Re} f$ és $\mathrm{Im} f$ méhetőek.

(50) Mutassuk meg, hogy ha $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ mérhetőek, akkor $f + g$ és fg is mérhetőek.

(51) Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, és $H_1, \ldots, H_n \subset X$ páronként diszjunkt halmazok. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (nem feltétlenül különböző) számok, amelyekre az $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{H_j}$ függvény mérhető. Következik-e ebből, hogy minden H_j mérhető?

(52) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény. Mutassuk meg, hogy f mérhető.

(53) * A $[0, 1)$ intervallumon vezessük be a következő ekvivalencia relációt: $x \sim y$ ha $x - y \in \mathbb{Q}$. Legyen $N \subset [0, 1)$ egy olyan halmaz, amely minden ekvivalencia osztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Mutassuk meg, hogy N nem Lebesgue-mérhető.

5/b feladatsor, Analízis 2

(54) Mutassuk meg, hogy $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$. (Segítség: vegyük egy origó középpontú, nagy R sugarú körvonal felső félsíkba eső részét kiegészítve a $[-R, +R]$ intervallummal, és ezen végezzünk komplex vonalintegrált, majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)

(55) Legyen $0 < p < 1$. Mutassuk meg, hogy $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$. (Segítség: vegyük a $[-R, R]$ alapú és $2\pi i$ magas téglalapot a felső fésíkon, és ezen végezzünk komplex vonalintegrált.)

6/a feladatsor, Analízis 2

(56) Legyen $\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R} : E \text{ megszamlalhato vagy } E^c \text{ megszamlalhato}\}$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}$ σ-algebra $\mathbb{R}$-en, és az egyelemű halmazok éppen $\mathcal{A}$-t generálják.

(57) Határozzuk meg egy metrikus térben a sehol sem sűrű halmazok által generált σ-algenrát.

(58) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y$. Határozzuk meg az $\mathcal{A} = \{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}$ σ-algebrát.

(59) Legyen $\mu(E) = 0$ ha $E \subset \mathbb{R}$ első kategóriájú, és $\mu(E) = 1$ ha $E \subset \mathbb{R}$ második kategóriájú. Mutassuk meg, hogy μ mérték $\mathbb{R}$-en. (Mi a σ-algebra?)

(60) Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, és $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n \leq \ldots$ mértékek rajta. Mutassuk meg, hogy $\mu(E) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(E)$ szintén mérték $(X, \mathcal{A})$-n.

(61) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és legyen $T : X \to Y$ szürjektív leképezés. Láttuk, hogy ekkor $\mathcal{B} = \{E \subset Y : T^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ egy σ-algebra Y-on. Mutassuk meg, hogy $\nu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ egy mérték $(Y, \mathcal{B})$-n.

(62) Legyen μ^* külső mérték valamely X halmazon, és legyen $B \subset A \subset X$ olyanok, hogy $\mu^*(A) = \mu^*(B) < \infty$. Mutassuk meg, hogy ha B mérhető, akkor A is az.

(63) Létezik-e olyan μ valószínűségi Borel mérték $\mathbb{R}^n$-en, amelyre $\mu(B) = 0$ vagy 1 minden Borel halmazra, és $\mu(\{x\}) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$-re?

(64) Jelölje egy $x = 0, a_1a_2\cdots \in [0, 1)$ tizedestört alakban felírt szám esetén $A_n(x)$ az első n tizedejegy közt szereplő 1-esek számát. Mutassuk meg, hogy a $B = \{x \in [0, 1) : \lim_{n\to\infty} A_n(x)/n = 1\}$ halmaz Borel halmaz.

(65) Legyen $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue mérhető, és $\lambda(A) > 0$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan I intervallum, amelyre $\lambda(I \cap A) > 0.99\lambda(I)$. (Hint: használjuk A-ra a Lebesgue-mérték definícióját.)

(66) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér, és legyenek $f, g : X \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy $f = g$ μ-majdnem-minenütt. Mutassuk meg, hogy ha f mérhető, akkor g is az.

(67) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mérhető függvény, és $g(x) = \|f(x)\|_\infty$. Mutassuk meg, hogy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szintén mérhető.

6/b feladatsor, Analízis 2

(68) Adjuk meg a következő komplex számok algebrai alakját:
$e^{-2+i\pi}$, $\cos(1 + i)$, $\sin(i\pi)$.

(69) Oldjuk meg: $\cos(2z) = 3$.

(70) Mutasuk meg, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ esetén $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$.

(71) Határozzuk meg a c paramáter értékét úgy, hogy a $v(x, y) = cx^3+36xy^2+xy$ függvény egy reguláris f függvény képzetes része legyen. Határozzuk meg $f'(1 + 3i)$ értékét.

(72) Számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrált:
$f(z) = \sin(\overline{z})$, γ az 1-ből a $-1 + 2i$-be menő szakasz.

(73) Jelölje $\gamma(z_0, r)$ a z_0 körüli r sugarú kört pozitív körüljárással. A Cauchy integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f(z)dz$ vonalmenti komplex integrálokat:

a; $\int_{\gamma(i,4)} \frac{e^z}{z-1}$

b; $\int_{\gamma(0,2)} \frac{-1+\cos z}{z^3}$

c; $\int_{\gamma(1,5)} \frac{z^2+3}{z(z-2)^2}$

(74) Mutassuk meg, hogy $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}(b-a)$. (Hint: legyen $r \approx 0, R \approx \infty$, és az $\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$ függvényt integráljuk a következő görbén: $-r$-ből egy felső félköríven menjünk el r-ig, aztán r-ből R-be, aztán R-ből egy felső félköríven $-R$-ig, aztán $-R$-ből $-r$-be.)

7/a feladatsor, Analízis 2

(75) Legyen $f \in L^+$. Mutassuk meg, hogy $\int_X f d\mu = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f(x) = 0$ μ-majdnem minden $x \in X$ esetén.

(76) Legyen $f_1, f_2 \in L^+$. Az integrál definícióját használva mutassuk meg, hogy $\int (f_1 + f_2)d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu$.

(77) Az előző feladatot általánosítva, legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ L^+-beli függvények. Mutassuk meg, hogy $\int(\sum_n f_n) = \sum_n(\int f_n)$.

(78) Legyen $X = \mathbb{N}$, és μ a számláló mérték (azaz $\mu(A) = |A|$ ha A véges, és $\mu(A) = \infty$ ha A végtelen). Mutassuk meg, hogy ekkor L^+ nem más, mint a nemnegatív sorozatok halmaza, és $f = (a_n) \in L^+$ esetén $\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^\infty a_n$.

(79) Felhasználva az előző feladatot és a monoton konvergencia tételt, oldjuk meg a 60. feladatot.

(80) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f \in L^+$, és $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ minden $E \in \mathcal{A}$ esetén. Mutassuk meg, hogy λ mérték $(X, \mathcal{A})$-n.

(81) Mutassunk olyan példát, ahol $f_n \in L^+$, $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$, de $\int f \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

7/b feladatsor, Analízis 2

(82) Határozzuk meg a következő $f(z)$ függvények z_0 pont körüli Laurent-sorfejtését minden szóba jövő körgyűrűn:

a; $f(z) = \frac{1}{z+1}$, $z_0 = i$

b; $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-i)}$, $z_0 = i$

c; $f(z) = e^z + \frac{1}{z}$, $z_0 = 2$

d; $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3}$, $z_0 = -1$

e; $f(z) = \frac{e^z}{1+e^z}$, $z_0 = i\pi$

(83) Legyen $f(z) = \frac{\sin z}{1-\cos z}$. Ekkor f-nek izolált szingularitása van a 0-ban. Döntsük el, hogy f-nek a 0-ban pólusa van-e, és ha igen, akkor hányadrendű.

8/a feladatsor, Analízis 2

(84) Legyen $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}_+$ egy monoton csökkenő függvénysorozat, és tegyük fel, hogy $\int f_1 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy $\int(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n$. Mutassunk példát, amikor $\int f_1 = +\infty$, és a fenti egyenlőség nem igaz.

(85) Mutassuk meg, hogy ha $f, g \in L^1$, akkor $f + g \in L^1$.

(86) Mutassuk meg, hogy ha $f \in L^1$ és $|\int f| = \int |f|$, akkor létezik olyan $\alpha \in \mathbb{C}$, amelyre $|\alpha| = 1$, és $f(x) = \alpha|f(x)|$ teljesül majdnem minden $x \in X$-re.

(87) Számoljuk ki: $\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-2x}(1 + \frac{x}{n})^n dx$.

(88) Számoljuk ki: $\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\pi+2x^2 \arctan(nx)}{x^4(2-2^{-n})+\sin\frac{1}{n}} dx$.

(89) Mutassuk meg, hogy $\int_0^1 x^a(1-x)^{-1} \log x dx = \sum_{k=1}^{\infty}(a+k)^{-2}$ minden $a > -1$ esetén.

(90) Legyen (f_n) olyan L^1-beli függvények sorozata, amelyekre $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < +\infty$. (Itt a szokásos $\|f\|_1 = \int |f|$ jelölést használtuk.) Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pontonként majdnem mindenütt konvergeál, és $\int(\sum_{n=1}^{\infty} f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$.

8/b feladatsor, Analízis 2

(91) A reziduum tétel segítségével fejezzük be az 55. feladat megoldását.

(92) Számoljuk ki az alábbi függvények reziduumát a megadott pontokban:

a; $f(z) = e^z + \frac{1}{z}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$

b; $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-i)}$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = 0$

c; $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3}$, $z_1 = -1$

d; $f(z) = \frac{e^z}{1+e^z}$, $z_1 = i\pi$

e; $f(z) = \frac{\sin z}{1-\cos z}$, $z_1 = 0$

f; $f(z) = \frac{\sin z}{z(1-\cos z)}$, $z_1 = 0$

g; $f(z) = z \cos\frac{1}{z}$, $z_1 = 0$.

(93) Mutassuk meg, hogy $\int_0^{\infty} \frac{x \sin(2x)}{x^2+3} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\sqrt{3}}$.

9/a feladatsor, Analízis 2

(94) Tudjuk, hogy függvénysorozatok konvergencia fajtáira fennállnak a triviális "egyenletes" $\Rightarrow$ "pontonként" $\Rightarrow$ "pontonként majdnem mindenütt" következtetések. Adjunk példákat arra, hogy ezek fordítva nem igazak.

(95) Mutassunk példát, amikor $f_n \to f$ egyenletsen, de $f_n \not\to f$ L^1-ben.

(96) Mutassuk meg, hogy ha $f_n \to f$ pontonként, és létezik olyan $g \in L^1$, hogy $|f_n| \le g$ minden n-re, akkor $f_n \to f$ L^1-ben.

(97) Mutassunk példát, amikor $f_n \to f$ L^1-ben, de $f_n(x) \not\to f(x)$ minden $x \in X$-re (azaz pontonként sehol sem konvergál).

(98) Tanultuk, hogy függvénysorozatok L^1-beli konvergenciájából következik a mértékben való konvergencia. Mutassunk példát arra, hogy $f_n \to f$ mértékben, de $f_n \not\to f$ L^1-ben.

(99) Legyen μ a számláló mérték $\mathbb{N}$-en. Mutassuk meg, hogy $f_n \to f$ mértékben pontosan akkor ha $f_n \to f$ egyenletesen.

(100) Mutassuk meg, hogy $f_n \to f$ mértékben pontosan akkor ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N amelyre $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) < \varepsilon$ minden $n \ge N$-re.

(101) Tegyük fel, hogy $f_n \to f$ és $g_n \to g$ mértékben. Mutassuk meg, hogy $f_n + g_n \to f + g$ mértékben.

(102) Legyen $\mu(X) < +\infty$, és $f, g : X \to \mathbb{C}$ esetén vezessük be a $d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$ távolságot. Mutassuk meg, hogy ez egy metrikát definiál (ha azonosítjuk a μ-m.m. egyenlő függvényeket), és $f_n \to f$ ebben a metrikában pontosan akkor ha $f_n \to f$ mértékben.

9/b feladatsor, Analízis 2

(103) A reziduum tétel segítségével számítsuk ki a következő integrálokat:

a; $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx$

b; $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

c; $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2-2x+2} dx$

d; $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+1} dx$, $\alpha \in (-1, 1)$

(104) Hány 1-nél nem nagyobb abszolútértékű gyöke van a $p(z) = z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$ és a $q(z) = 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$ polinomoknak (multiplicitással számolva)?

(105) Hány 2-nél nem nagyobb abszolútértékű gyöke van a $p(z) = z^4 + 3z^3 + 6$ és a $q(z) = z^4 - 2z^3 + 9z^2 + z - 1$ polinomoknak (multiplicitással számolva)?

10/a feladatsor, Analízis 2

(106) Legyen $X = [0, 1]$, és tekintsük az $f_n = x^n$ fggvénysorozatot. Minden $\varepsilon > 0$ esetén adjunk meg olyan E_ε halmazt, amelynek Lebesgue mértéke $< \varepsilon$, és amelyre igaz hogy $f_n \to 0$ egyenletesen E_ε^c-en. Létezik-e olyan nullmértékű E_0 halmaz, amelyre igaz hogy $f_n \to 0$ egyenletesen E_0^c-en?

(107) Mutassunk pédát arra, hogy $\mu(X) = +\infty$ esetén Jegorov tétele már nem igaz.

(108) Tegyük fel, hogy $f_n \to f$ majdnem egyenletesen (azaz, mint Jegorov tételében, $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists E_\varepsilon \subset X$, amelre $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, és $f_n \to f$ egyenletesen E^c-en). Mutassuk meg, hogy ekkor $f_n \to f$ μ-m.m., valamint $f_n \to f$ mértékben.

(109) Mutassuk meg, hogy bármely $f \in L^1(\mathbb{R})$ függvény tetszőlegesen megközelíthető L^1 normában folytonos függvényekkel (azaz létezik folytonos függvényeknek olyan f_n sorozata, amelyre $f_n \to f$ L^1-ben.

10/b feladatsor, Analízis 2

(110) Hány gyöke van a $p(z) = z^5 + 3z^2 + 1$ polinomnak az $1 < |z| < 2$ körgyűrűben?

(111) Mutassuk meg, hogy az $f(z) = z + 3 + 2e^z$ függvénynek 1 gyöke van a $Rez \leq 0$ félsíkban.

(112) Legyen $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Mutassuk meg, hogy minden $R > 0$-ra létezik olyan N, hogy minden $N \leq n$ esetén p_n-nek nincs R-nél kisebb abszolút értékű gyöke.

(113) A reziduum tétel segítségével számítsuk ki a következő integrált:

d; $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^3+1} dx$, $\alpha \in (-1, 1)$

11/a feladatsor, Analízis 2

(114) Mutassuk meg példákkal, hogy $L^p(\mathbb{R}) \not\subseteq L^q(\mathbb{R})$ minden $1 \leq p \neq q < \infty$ esetén.

(115) Mutassuk meg, hogy minden $1 \leq p \leq q < \infty$ esetén $\ell^p \subset \ell^q$, és minden $\underline{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ sorozatra $\|\underline{a}\|_q \leq \|\underline{a}\|_p$.

(116) Tegyük fel, hogy $\mu(X) < +\infty$. Mutassuk meg, hogy $1 \leq p < q < \infty$ esetén $L^p(X) \supset L^q(X)$, és $\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$.

(117) Mutassuk meg, hogy $L^p(\mathbb{R})$ szeparábilis minden $1 \leq p < \infty$ esetén.

(118) Legyenek p, q konjugált kitevők, (azaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), és legyen $h \in L^q(X)$. Definiáljunk egy $\phi_h : L^p(X) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionált: $\phi_h(f) = \int_X f(x)h(x)d\mu(x)$. Mutassuk meg, hogy ϕ_h korlátos lineáris funkcionál, és $\|\phi_h\| \leq \|h\|_q$.

(119) Legyen $1 \leq p < \infty$, $f_n, f \in L^p$ és $f_n \to f$ μ-m.m. Mutassuk meg, hogy $\|f_n - f\|_p \to 0$ pontosan akkor ha $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

11/b feladatsor, Analízis 2

(120) Mutassuk meg, hogy a (z_1, z_2, z_3, z_4) kettősviszony pontosan akkor valós, ha a pontok egy körre vagy egy egyenesre esnek.

(121) Adjunk meg olyan lineáris törtfüggvényt, amely:

a; Az $(1, i, 0)$ ponthármast a $(2, -i, 4)$ ponthármasba viszi

b; A felső félsíkot az egységkörlapra képzi, és az $1 + i$ pontot a 0-ba

c; A $|z - 1 - 2i| < 2$ körlapot a $|w - 4 - 5i| > 3$ körlap komplementerbe viszi

d; A $\mathrm{Re}z \geq 0$ félsíkot a $w - 4i \leq 3$ körlapra képzi

e; Az $e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$ félkörívet a $[-1, 1]$ szakaszba viszi.

A 2. zh a 7-8-9-10-11 feladatsorokban érintett témákból lesz.