# Analízis 1

Andai Attila*

2016. szeptember 24.

*andaia@math.bme.hu

# Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő számtalan hiba kijavításáért és értékes megjegyzéseiért, *Joó Attilának*, aki felhívta figyelmem a halmazelmélet részben pár pontatlanságra a jegyzet előzetes változatában, valamint *Lovas Attilának* a függelék gondos átnézéséért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\stackrel{\triangle}{=}$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \stackrel{\triangle}{=} b$ azt jelenti, hogy a már ismert $b$ kifejezést a továbbiakban $a$ jelöli.

2015. március 7.
Andai Attila

# 1 Metrikus terek

## 1.1. Metrikus terek topológiája

**1.1. Definíció.** Az $M$ halmazon értelmezett *metrikának* vagy *távolságfüggvénynek* nevezünk minden olyan

$$d : M \times M \to \mathbb{R}^+ \qquad (x, y) \mapsto d(x, y) \tag{1.1}$$

függvényt, melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x, y \in M : \; d(x, y) = 0 \; \leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in M : \; d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in M : \; d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

Az $(M, d)$ párt *metrikus térnek* nevezzük, ha $M$ halmaz és $d$ metrika az $M$ halmazon.

**1.1. Tétel.** *Tetszőleges $M$ nem üres halmaz esetén*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & ha \quad x \ne y, \\ 0 & ha \quad x = y \end{cases} \tag{1.2}$$

*metrika, tehát minden nem üres halmazon létezik egy kitüntetett metrika.*

***Bizonyítás.*** A metrika definíciójából rögtön adódik az állítás.

**1.2. Definíció.** Legyen $(M, d)$ metrikus tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ számra és $x \in M$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in M | \; d(x, y) < r\} \tag{1.3}$$

halmazt az *$x$ pont körüli $r$ sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

**Megjegyzés.** A mertikus terek elméletében számtalanszor fogjuk használni hivatkozás nélkül az alábbi egyszerű, de fontos tényt.

$\diamondsuit$

**1.2. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor minden $y \in B_r(x)$ pontra és $\rho \in ]0, r - d(x, y)[$ számra*

$$B_\rho(y) \subseteq B_r(x) \tag{1.4}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $x \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$, $y \in B_r(x)$ és $\rho \in ]0, r - d(x, y)[$. Ha $z \in B_\rho(y)$, akkor $d(y, z) < \rho$, amiből

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \rho < r \tag{1.5}$$

következik, azaz $z \in B_r(x)$. Tehát $B_\rho(y) \subseteq B_r(x)$.

**1.3. Definíció.** Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $X \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az $X$ halmaz

- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $M \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in M$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

**1.3. Tétel.** *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

***Bizonyítás.*** Az első állítás a definíció alapján nyilvánvaló. A második állításhoz vegyük az $(M,d)$ metrikus tér $A_1,\dots,A_n$ korlátos részhalmazait, és legyen $(r_i,x_i)_{i=1,\dots,n}$ olyan rendszer, hogy minden $i=1,\dots,n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i=1,\dots,n$ esetén legyen $R_i = r_i + d(x_i,x_1)$. Ekkor minden $i$ számra $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül a metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt. Tehát az $R = \max\{R_i \mid i=1,\dots,n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq B_R(x_1)$.

**1.4. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér. Minden $x\in M$ pont és $r\in\mathbb{R}^+$ szám esetén $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

***Bizonyítás.*** A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y\in B_r(x)$ és legyen $R=r-d(x,y)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_R(y)\subseteq B_r(x)$ teljesül. Ha $z\in B_R(y)$, akkor $d(z,y)<R=r-d(x,y)$, vagyis $d(x,y)+d(y,z)<r$, amiből pedig $d(x,z)<r$ adódik, vagyis $z\in B_r(x)$.

**1.5. Tétel.** *(Nyílt halmazok rendszere.) Legyen $(M,d)$ metrikus tér.*

1. *Az üres halmaz és $M$ nyílt.*
2. *Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*
3. *Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.*

***Bizonyítás.*** 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ nyílt halmazok tetszőleges véges rendszere, és legyen továbbá $x\in\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Ekkor minden $i=1,\dots,n$ számhoz létezik olyan $r_i\in\mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x)\subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R=\min\{r_i \mid i=1,\dots,n\}, \tag{1.6}$$

akkor $R\in\mathbb{R}^+$ és $B_R(x)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i\in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és legyen továbbá $x\in\bigcup_{i\in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0\in I$ melyre $x\in A_{i_0}$ teljesül. Mivel $A_{i_0}$ nyílt halmaz, így létezik olyan $r\in\mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x)\subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x)\subseteq\bigcup_{i\in I} A_i$.

**1.6. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér. (Zárt halmazok rendszere.)*

1. *Az üres halmaz és $M$ zárt.*
2. *Véges sok zárt halmaz uniója zárt.*
3. *Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.*

***Bizonyítás.*** 1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Legyen $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ zárt halmazok tetszőleges véges rendszere. Ekkor minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén $M\setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$M\setminus\bigcup_{i=1}^{n} Z_i=\bigcap_{i=1}^{n}(M\setminus Z_i) \tag{1.7}$$

de'Morgan azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i$ halmaz zárt.

3. Legyen $(Z_i)_{i\in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $M \setminus Z_i$ nyílt halmaz. A

$$M \setminus \bigcap_{i\in I} Z_i = \bigcup_{i\in I} (M \setminus Z_i) \tag{1.8}$$

de'Morgan azonosság miatt $\bigcap_{i\in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcap_{i\in I} Z_i$ halmaz zárt.

**1.7. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $Z, U \subseteq M$. Ha $Z$ zárt halmaz és $U$ nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.*

***Bizonyítás.*** Az $(M, d)$ metrikus térben legyen $Z \subseteq M$ zárt halmaz és $U \subseteq M$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (M \setminus U) \tag{1.9}$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (M \setminus Z) \tag{1.10}$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

**1.4. Definíció.** Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in M$. Azt mondjuk, hogy $x$
- *belső pontja az $X$ halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az $X$ halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az $X$ halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az $X$ halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

**1.5. Definíció.** Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $X \subseteq M$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy $X$ *környezete* az $x$ pontnak, ha $x$ belső pontja az $X$ halmaznak.

**1.6. Definíció.** Legyen $(M, d)$ metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in M | \ \exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X\} \tag{1.11}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in M | \ \forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\} \tag{1.12}$$

halmazt, azaz az *érintési pontok* halmazát. Az $X$ halmaz *határának* nevezzük a

$$\operatorname{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X \tag{1.13}$$

halmazt.

**1.8. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén*
1. $\operatorname{Int} X$ *halmaz nyílt;*
2. $\operatorname{Int} X$ *az a legbővebb nyílt halmaz, melyet $X$ tartalmaz;*
3. $\overline{X}$ *halmaz zárt;*
4. $\overline{X}$ *az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza $X$-et.*

***Bizonyítás.*** 1. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az $X$ halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \operatorname{Int} X$ teljesül.
2. Jelölje $U$ azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet $X$ tartalmaz. Ekkor nyilván $\operatorname{Int} X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az $U$ halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(x) \subseteq X$ adódik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. Tehát az $U \subseteq \operatorname{Int} X$ tartalmazás is fennáll.
3. Legyen $z \in M \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$. teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq M \setminus \overline{X}$, vagyis az $\overline{X}$ halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - d(y, z) > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárás definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.
4. Jelölje $Z$ azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az $X$ halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A $Z$ halmaz zártsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárás értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

**1.9. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmaz esetén*

1. *az $X$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \operatorname{Int} X$;*
2. *az $X$ halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.*

***Bizonyítás.*** Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

**1.10. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér. Az $X \subseteq M$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.*

***Bizonyítás.*** Legyen $X \subseteq M$ zárt halmaz, és legyen $x \in M$ az $X$ halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset. \tag{1.14}$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset, \tag{1.15}$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel $X$ zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$.
Legyen $X \subseteq M$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az $X$ halmaz zártságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset, \tag{1.16}$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset, \tag{1.17}$$

vagyis $x$ az $X$ halmaz torlódási pontja. Mivel $X$ tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

**1.11. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $X \subseteq M$. Ekkor*

$$\operatorname{Int} X = M \setminus \overline{M \setminus X}, \tag{1.18}$$

$$\overline{X} = M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus X). \tag{1.19}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $X \subseteq M$. Legyen $x \in \operatorname{Int} X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül. Vagyis $(M \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $x \notin \overline{M \setminus X}$ következik. Fordítva, ha $x \notin \overline{M \setminus X}$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $(M \setminus X) \cap B_r(x) = \emptyset$. Ebből $B_r(x) \subseteq X$ következik, vagyis $x \in \operatorname{Int} X$. A második egyenlőség következik az elsőből, hiszen

$$M \setminus \operatorname{Int}(M \setminus X) = M \setminus \left(M \setminus \overline{M \setminus (M \setminus X)}\right) = \overline{M \setminus (M \setminus X)} = \overline{X}. \tag{1.20}$$

**1.7. Definíció.** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $X, Y \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az $X$ halmaz
- *sűrű az $Y$ halmazban*, ha $\overline{X} = Y$;
- *sűrű*, ha $\overline{X} = M$.

## 1.2. Metrikus alterek

**1.12. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor $(A, d|_{A \times A})$ is metrikus tér.*

***Bizonyítás.*** A metrika tulajdonságai öröklődnek az $M$ halmazról az $A$ részhalmazára.

**1.8. Definíció.** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $(A, d|_{A \times A})$ párt az $(M,d)$ *metrikus tér alterének* nevezzük.

**1.13. Tétel.** *(Nyílt és zárt halmazok metrikus altérben.) Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $A \subseteq M$, $B \subseteq A$ és $d' = d|_{A \times A}$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*
1. *A $B$ halmaz pontosan akkor nyílt az $(A,d')$ metrikus altérben, ha létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül.*
2. *A $B$ halmaz pontosan akkor zárt az $(A,d')$ metrikus altérben, ha létezik olyan $Z \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $B = A \cap Z$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és legyen $B \subseteq A$. Vezessük be a következő jelöléseket.

$$B_r^d(x) = \{y \in M |\ d(x,y) < r\} \tag{1.21}$$
$$B_r^{d'}(x) = \{y \in A |\ d(x,y) < r\} \tag{1.22}$$

Ekkor nyilván $B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A$.
1. Tegyük fel, hogy $B$ nyílt az $(A,d)$ térben. Ekkor minden $x \in B$ esetén létezik olyan $r(x) \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r(x)}^{d'}(x) \subseteq B$ teljesül. Legyen

$$U = \bigcup_{x \in B} B_{r(x)}^d(x). \tag{1.23}$$

Az $U$ halmaz nyílt az $(M,d)$ térben, hiszen nyílt halmazok uniója. Megmutatjuk, hogy $B = A \cap U$ teljesül. Az $U$ definíciója és $B \subseteq A$ alapján a $B \subseteq A \cap U$ tartalmazás nyilvánvaló. Legyen $z \in A \cap U$. Ekkor $z \in A$ és $z \in \bigcup\limits_{x \in B} B_{r(x)}^d(x)$. Vagyis létezik olyan $y \in B$, melyre $z \in B_{r(y)}^d(y)$ teljesül. Mivel $z \in A$, ezért

$$z \in B_{r(y)}^d(y) \cap A = B_{r(y)}^{d'}(y) \subseteq B. \tag{1.24}$$

Tehát $A \cap U \subseteq B$ is teljesül.
Most tegyük fel, hogy létezik olyan $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $B = A \cap U$ teljesül, és legyen $x \in B$ tetszőleges. Ha $x \in U$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^d(x) \subseteq U$ teljesül. Ekkor

$$B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A \subseteq U \cap A = B \tag{1.25}$$

teljesül, vagyis $x$ belső pontja a $B$ halmaznak az $(A, d')$ térben.
2. Az alábbi ekvivalens lépések igazolják az állítást.

$$B \text{ zárt az } (A, d') \text{ térben } \Leftrightarrow \tag{1.26}$$
$$\Leftrightarrow A \setminus B \text{ nyílt az } (A, d') \text{ térben } \Leftrightarrow \tag{1.27}$$
$$\Leftrightarrow \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } A \setminus B = (A \setminus B) \cap U \Leftrightarrow \tag{1.28}$$
$$\Leftrightarrow \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } B = A \setminus ((A \setminus B) \cap U) \Leftrightarrow \tag{1.29}$$
$$\Leftrightarrow \exists U \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } B = A \cap (M \setminus U) \Leftrightarrow \tag{1.30}$$
$$\Leftrightarrow \exists Z \subseteq M \text{ zárt halmaz, melyre } B = A \cap Z \tag{1.31}$$

**1.14. Tétel.** *(Halmaz lezártja metrikus altérben.) Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a $B$ halmaz lezártját az $(M, d)$ metrikus térben, és $\tilde{B}$ a $B$ halmaz lezártját az $(A, d')$ metrikus térben. Ekkor minden $B \subseteq A$ halmazra*

$$\tilde{B} = \overline{B} \cap A \tag{1.32}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $A \subseteq M$, $d' = d|_{A \times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a $B$ halmaz lezártját az $(M, d)$ metrikus térben, és $\tilde{B}$ a $B$ halmaz lezártját az $(A, d')$ metrikus térben. Továbbá minden $x \in A$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$B_r^d(x) = \{y \in M |\ d(x, y) < r\} \tag{1.33}$$
$$B_r^{d'}(x) = \{y \in A |\ d(x, y) < r\} . \tag{1.34}$$

Ekkor nyilván $B_r^{d'}(x) = B_r^d(x) \cap A$.
Ha $x \in \tilde{B}$, akkor $x \in A$, valamint minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{d'}(x) \cap B \neq \emptyset$, amiből $B_r^{d'}(x) \subseteq B_r^d(x)$ miatt $B_r^d(x) \cap B \neq \emptyset$ következik, vagyis $x \in \overline{B}$. Vagyis igazoltuk a $\tilde{B} \subseteq \overline{B} \cap A$ tartalmazást.
Fordítva, legyen $x \in \overline{B} \cap A$. Ekkor $x \in A$ és minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^d(x) \cap B \neq \emptyset$. Ha $x \notin \tilde{B}$ teljesülne, akkor létezne olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{d'}(x) \cap B = \emptyset$ teljesülne. Ekkor

$$\emptyset = B_R^{d'}(x) \cap B \subseteq B_R^d(x) \cap B \neq \emptyset. \tag{1.35}$$

Vagyis létezne $z \in B_R^d(x) \cap B$, $z \notin B_R^{d'}(x) \cap B$ elem. Erre az elemre $z \in B \subseteq A$, $d(x, z) = d'(x, z) < R$ teljesülne, amiből a $z \in B_R^{d'}(x) \cap B$ ellentmondás adódna. Tehát $x \in \tilde{B}$, amivel igazoltuk a $\overline{B} \cap A \subseteq \tilde{B}$ tartalmazást.

## 1.3. Ekvivalens metrikák

**1.9. Definíció.** Legyen $d_1$ és $d_2$ metrika az $M$ halmazon. Azt mondjuk, hogy *a $d_1$ és $d_2$ metrikák ekvivalensek*, ha minden $d_1$ metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a $d_2$ metrika szerint is, valamint minden $d_2$ metrika szerinti nyílt halmaz nyílt a $d_1$ metrika szerint is.

Tehát két metrika pontosan akkor ekvivalens, ha ugyanazok a nyílt halmazok a metrikák szerint.

**1.15. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$.*

*1. A*

$$d_p : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad (x,y) \mapsto d_p(x,y) \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.36}$$

$$d_\infty : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad (x,y) \mapsto d_\infty(x,y) \triangleq \max\{|x_k - y_k| \mid k \in \{1,\dots,n\}\} \tag{1.37}$$

*leképezés metrika.*

*2. Minden $p \in [1,\infty[$ esetén a $d_p$ és a $d_\infty$ metrikák ekvivalensek.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1,\infty[$. A $d_p$ és a $d_\infty$ függvények nyilván szimmetrikusak, és minden $x,y \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$d_p(x,y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y \tag{1.38}$$

$$d_\infty(x,y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y. \tag{1.39}$$

Legyen $x,y,z \in \mathbb{K}^n$. Ekkor a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$d_p(x,z) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k + y_k - z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k - y_k| + |y_k - z_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \tag{1.40}$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = d_p(x,y) + d_p(y,z), \tag{1.41}$$

valamint

$$d_\infty(x,z) = \max\{|x_k - y_k + y_k - z_k| \mid k \in \{1,\dots,n\}\} \le \tag{1.42}$$

$$\le \max\{|x_k - y_k| + |y_k - z_k| \mid k \in \{1,\dots,n\}\} \le \tag{1.43}$$

$$\le \max\{|x_k - y_k| \mid k \in \{1,\dots,n\}\} + \max\{|y_k - z_k| \mid k \in \{1,\dots,n\}\} = \tag{1.44}$$

$$= d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z). \tag{1.45}$$

Megmutatjuk, hogy bármely $p \in [1,\infty[$ esetén a $d_p$ és a $d_\infty$ metrikák ekvivalensek.
Legyen $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz a $d_\infty$ metrika szerint, és legyen $x \in U$. Ekkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{d_\infty}(x) \subseteq U$. Ha $z \in B_r^{d_p}(x)$, akkor minden $k \in \{1,\dots,n\}$ indexre

$$|z_k - x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < r \tag{1.46}$$

teljesül, vagyis $d_\infty(z,x) < r$, amiből $z \in B_r^{d_\infty}(x)$ következik. Tehát a

$$B_r^{d_p}(x) \subseteq B_r^{d_\infty}(x) \subseteq U \tag{1.47}$$

tartalmazás miatt az $x$ pont belső pontja az $U$ halmaznak a $d_p$ metrika szerint. Ezért az $U$ halmaz a $d_p$ metrika szerint is nyílt.
Legyen $U \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz a $d_p$ metrika szerint, és legyen $x \in U$. Ekkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r^{d_p}(x) \subseteq U$. Legyen $R = \dfrac{r}{\sqrt[p]{n}}$ és $z \in B_R^{d_\infty}(x)$. Ekkor

$$d_p(x,z) = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k - x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{\sqrt[p]{n}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = r \tag{1.48}$$

teljesül, vagyis $d_p(z,x) < r$, amiből $z \in B_r^{d_p}(x)$ következik. Tehát a

$$B_R^{d_\infty}(x) \subseteq B_r^{d_p}(x) \subseteq U \tag{1.49}$$

tartalmazás miatt az $x$ pont belső pontja az $U$ halmaznak a $d_\infty$ metrika szerint. Ezért az $U$ halmaz a $d_\infty$ metrika szerint is nyílt.

## 1.4. Sorozatok metrikus terekben

**1.10. Definíció.** (*Sorozatok határértéke.*) Legyen $(M,d)$ metrikus tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to M$ függvényeket *sorozatoknak* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy $x \in M$ az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)). \tag{1.50}$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *konvergens*, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

**1.16. Tétel.** *Metrikus térben haladó konvergens sorozat határértéke egyértelmű.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozatnak legyen $x, y \in M$ a határértéke. Tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $d(a_n, x) < \dfrac{d(x,y)}{2}$ és $d(a_n, y) < \dfrac{d(x,y)}{2}$. Amiből az

$$d(x,y) \leq d(x,a_n) + d(a_n,y) < d(x,y) \tag{1.51}$$

ellentmondás adódik.

Tehát minden metrikus térben, ha létezik egy sorozatnak határértéke, akkor az egyértelmű.

**1.11. Definíció.** (*A* lim *művelet.*) Legyen $(M,d)$ metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

**1.12. Definíció.** Legyen $(M,d)$ metrikus tér.
- Az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen $\sigma$ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to M$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to M$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

**1.17. Tétel.** *Minden konvergens sorozat korlátos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat és legyen $\lim a = A$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a \subseteq B_1(A) \cup \left( \bigcup\limits_{n=0}^{N} \{a_n\} \right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, ezért a $\operatorname{Ran} a$ halmaz is korlátos.

**1.18. Tétel.** *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $a : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \geq n$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $\left|a_{\sigma(n)} - \lim a\right| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

**1.19. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $A \subseteq M$ és $x \in M$.*

1. *Az $A$ halmaznak $x$ pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.*
2. *Az $A$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatra $\lim a \in A$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $A \subseteq M$ és $x \in M$.
1. Tegyük fel, hogy $x$ az $A$ halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset. \tag{1.52}$$

A kiválasztási axióma alapján

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset. \tag{1.53}$$

Legyen $a$ egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor $a$ egy $\mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d(a_n, x) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül.
Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az $a$ sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, x) < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az $a_{N+1}$ elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in \left(B_{\frac{1}{r}}(x) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \emptyset. \tag{1.54}$$

2. Legyen $A \subseteq M$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Ekkor $a : \mathbb{N} \to A \setminus \{\alpha\}$ konvergens sorozat, melyre $\lim a = \alpha$ teljesül, tehát a tétel 1. pontja miatt $\alpha$ torlódási pontja az $A$ halmaznak. Amiből az $A$ halmaz zártsága miatt az $\alpha \in A$ ellentmondás adódik.
Legyen $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az $A$ halmaz nem zárt, és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárt definíciója alapján $\alpha$ torlódási pontja az $A$ halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

## 1.5. Cauchy-sorozatok

**1.13. Definíció.** Legyen $(M, d)$ metrikus tér. Az $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n \ \wedge N < m) \ \to \ d(a_n, a_m) < \varepsilon\right). \tag{1.55}$$

**1.20. Tétel.** *Minden Cauchy-sorozat korlátos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $a : \mathbb{N} \to M$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, küszöbindex, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ számra $d(a_n, a_m) < 1$ teljesül, vagyis minden $N < n$ természetes szám esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\operatorname{Ran} a$ véges sok korlátos halmaz uniója, ezért korlátos.

**1.21. Tétel.** *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $a:\mathbb{N}\to M$ konvergens sorozat, melynek határértéke $A\in M$ és legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $d(a_n,A)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $N<n,m$ természetes szám esetén

$$d(a_n,a_m)\le d(a_n,A)+d(a_m,A)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{1.56}$$

**1.22. Tétel.** *Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $a:\mathbb{N}\to M$ Cauchy-sorozat, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a\circ\sigma$ konvergens, és legyen továbbá $A=\lim a\circ\sigma$. Ha $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n,m\in\mathbb{N}$, $N_1<n,m$ esetén $d(a_n,a_m)<\dfrac{\varepsilon}{2}$, és létezik olyan $N_2\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N_2<n$ esetén $d(a_{\sigma(n)},A)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Ha $N=\max\{N_1,N_2\}$ és $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ , akkor

$$d(a_n,A)\le d(a_n,a_{\sigma(n)})+d(a_{\sigma(n)},A)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon, \tag{1.57}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n)\ge n$.

**1.14. Definíció.** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A\subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az $A$ halmaz *teljes*, ha minden $a:\mathbb{N}\to A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke az $A$ halmazban van. Azt mondjuk, hogy az $(M,d)$ metrikus tér *teljes*, ha $M$ teljes halmaz.

**1.23. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ teljes metrikus tér és $X\subseteq M$ zárt halmaz. Ekkor az $(X,d|_{X\times X})$ metrikus altér is teljes.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ teljes metrikus tér, $X\subseteq M$ zárt halmaz, és legyen $a:\mathbb{N}\to X$ Cauchy-sorozat. Mivel $M$ teljes, ezért létezik $\lim a$ és mivel $X$ zárt, ezért $\lim a\in X$. Vagyis minden $a:\mathbb{N}\to X$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke eleme az $X$ halmaznak.

## 1.6. Baire-féle kategóriatétel

**1.15. Definíció.** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és legyen $X\subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az $X$ halmaz

- *sehol sem sűrű*, ha $\operatorname{Int}\overline{X}=\emptyset$;
- *első kategóriájú*, ha $X$ előállítható megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként;
- *második kategóriájú*, ha nem első kategóriájú.

**1.24. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér.*

1. *Az $X\subseteq M$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha az $M\setminus\overline{X}$ halmaz sűrű.*
2. *Véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű.*
3. *Az $X\subseteq M$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik az $M$ sehol sem sűrű, zárt részhalmazainak olyan $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendszere, melyre $X\subseteq\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér.

1. Legyen $X\subseteq M$. Mivel $\operatorname{Int}\overline{X}=M\setminus\overline{M\setminus\overline{X}}$, ezért ha $X$ sehol sem sűrű, akkor $M\setminus\overline{M\setminus\overline{X}}=\emptyset$, vagyis $\overline{M\setminus\overline{X}}=M$, azaz $M\setminus\overline{X}$ sűrű. Ha $M\setminus\overline{X}$ sűrű, akkor $\overline{M\setminus\overline{X}}=M$, amiből $M\setminus\overline{M\setminus\overline{X}}=\emptyset$ adódik, vagyis $X$ sehol sem sűrű.

2. Legyen $X, Y \subseteq M$ sehol sem sűrű halmaz. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont, és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $M \setminus \overline{X}$ sűrű, ezért létezik $y \in B_r(x) \cap \big(M \setminus \overline{X}\big) \neq \emptyset$ elem. A $B_r(x) \cap \big(M \setminus \overline{X}\big)$ halmaz nyílt, hiszen két nyílt halmaz metszete, ezért létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(y) \subseteq B_r(x) \cap \big(M \setminus \overline{X}\big)$. Mivel $M \setminus \overline{Y}$ sűrű, ezért létezik $z \in B_\rho(y) \cap \big(M \setminus \overline{Y}\big) \neq \emptyset$ elem. Ekkor

$$z \in B_r(x) \cap \big(M \setminus \overline{X}\big) \cap \big(M \setminus \overline{Y}\big) \subseteq B_r(x) \cap \big(M \setminus \big(\overline{X} \cup \overline{Y}\big)\big) = B_r(x) \cap \big(M \setminus \big(\overline{X \cup Y}\big)\big). \tag{1.58}$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(x) \cap \big(M \setminus \big(\overline{X \cup Y}\big)\big) \neq \emptyset$, ezért a $\big(M \setminus \big(\overline{X \cup Y}\big)\big)$ halmaz sűrű, tehát $X \cup Y$ sehol sem sűrű. Mivel két sehol sem sűrű halmaz uniója is sehol sem sűrű, így teljes indukcióval adódik az állítás véges sok sehol sem sűrű halmazra.
3. Tegyük fel, hogy $X$ első kategóriájú. Ekkor létezik olyan $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq M$, $\operatorname{Int} \overline{F_n} = \emptyset$ és $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ekkor $(\overline{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ az $M$ sehol sem sűrű, zárt részhalmazainak olyan rendszere, melyre $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n}$ teljesül. Fordítva, ha $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az $M$ sehol sem sűrű, zárt részhalmazainak olyan rendszere, melyre $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{F_n}$ teljesül, akkor az $(F_n \cap X)_{n\in\mathbb{N}}$ szintén sehol sem sűrű halmazok rendszere, és $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_n \cap X)$.

**1.25. Tétel.** *(Baire-féle kategóriatétel.) Teljes metrikus tér minden nem üres nyílt részhalmaza második kategóriájú.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ teljes metrikus tér, $U \subseteq M$ nem üres, nyílt halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $Z_n \subseteq M$ sehol sem sűrű zárt halmaz, és tegyük fel, hogy $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ teljesül. Ekkor az alábbi iterációval definiáljunk az $a : \mathbb{N} \to M$ és $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ sorozatot.

- Az $U \setminus Z_0$ halmaz nyílt és nem üres, ugyanis ha üres lenne, akkor $U \subseteq Z_0$ teljesülne, amiből az $\emptyset \neq \operatorname{Int} U \subseteq \operatorname{Int} Z_0 = \emptyset$ ellentmondás következne. Ezért létezik $a_0 \in U \setminus Z_0$ és ehhez létezik olyan $r_0 \in \mathbb{R}^+$, melyre
$$\overline{B_{r_0}(a_0)} \subseteq U \setminus Z_0 \tag{1.59}$$
teljesül.
- Ha $a_n$ és $r_n$ már definiált, akkor tekintsük a
$$B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k \tag{1.60}$$
halmazt. Ez a halmaz nyilván nyílt és nem üres, ugyanis $\bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$ véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója, ezért sehol sem sűrű, vagyis $\operatorname{Int} \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k = \emptyset$. Ha a fenti halmaz üres lenne, akkor $B_{r_n}(a_n) \subset \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$ teljesülne, amiből az $\emptyset \neq \operatorname{Int} B_{r_n}(a_n) \subseteq \operatorname{Int} \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k = \emptyset$ ellentmondás következne. Ezért létezik $a_{n+1} \in B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k$ és ehhez létezik olyan $r_{n+1} \in \left]0, \frac{r_n}{2}\right[$, melyre
$$\overline{B_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \subseteq B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k \tag{1.61}$$

teljesül.

Ekkor a minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülő $r_n \leq \dfrac{r_0}{2^n}$ egyenlőtlenség miatt $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Az $a_{n+1} \in B_{r_n}(a_n)$ tartalmazás miatt $d(a_n, a_{n+1}) < r_n$, vagyis ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, $m > n$, akkor

$$d(a_m, a_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) < \sum_{k=n}^{m-1} r_k \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{r_0}{2^k} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{r_0}{2^k} = \frac{2r_0}{2^n}, \tag{1.62}$$

amiből, következik, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Az $\overline{B_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$ tartalmazás miatt ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, $m > n$, akkor $\overline{B_{r_m}(a_m)} \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$, amiből $a_m \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$ következik. Tehát a $k \mapsto a_{n+k}$ sorozat részsorozata az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, tehát konvergens, és mivel minden eleme a $\overline{B_{r_n}(a_n)}$ zárt halmazban van, ezért $x \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$. Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \overline{B_{r_n}(a_n)}$.

A $\overline{B_{r_0}(a_0)} \subseteq U$ miatt $x \in U$, továbbá a minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülő

$$\overline{B_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \subseteq B_{r_n}(a_n) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} Z_k \tag{1.63}$$

tartalmazás miatt $x \notin \bigcup\limits_{k=0}^{n+1} Z_k$. Tehát az $x \in U \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} Z_k$ ellentmondást kaptuk.

## 1.7. Kompakt halmazok metrikus terekben

**1.16. Definíció.** Legyen $(M, d)$ metrikus tér.

- Az $X \subseteq M$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt fedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az $A_i$ nyílt részhalmaza az $M$ térnek.
- Azt mondjuk, hogy az $(M, d)$ *metrikus tér kompakt*, ha $M$ kompakt halmaz.

**1.26. Tétel.** *Metrikus térben*

1. *minden véges halmaz kompakt;*
2. *véges sok kompakt halmaz uniója kompakt.*

***Bizonyítás.*** A kompaktság definíciójának közvetlen következménye.

**1.27. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $X \subseteq M$ kompakt halmaz.*

1. *Ekkor $X$ korlátos és zárt.*
2. *Az $Y \subseteq X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $X \subseteq M$ kompakt halmaz.

1. Megmutatjuk, hogy $X$ korlátos. Legyen $p \in M$ tetszőleges pont. Mivel $X \subseteq M = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^+} B_n(p)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $X \subseteq \bigcup\limits_{n\in I} B_n(p)$. Ekkor az $r = \max\{I\}$ számra $X \subseteq B_r(p)$ teljesül.

Most igazoljuk, hogy $X$ zárt. Ehhez legyen $p \in M \setminus X$ tetszőleges pont. Minden $x \in X$ pont esetén ha $r(x) = \dfrac{d(x,p)}{2}$, akkor $B_{r(x)}(x) \cap B_{r(x)}(p) = \emptyset$. Mivel

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} B_{r(x)}(x) \tag{1.64}$$

az $X$ kompakt halmaz nyílt fedése, ezért létezik olyan $H \subseteq X$ véges halmaz, melyre

$$X \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{r(x)}(x) \tag{1.65}$$

teljesül. Legyen $r = \min\{r(x)|\ x \in H\}$. Ekkor minden $x \in H$ esetén $B_{r(x)}(x) \cap B_r(p) = \emptyset$, vagyis

$$X \cap B_r(p) \subseteq \left( \bigcup_{x \in H} B_{r(x)}(x) \right) \cap B_r(p) = \bigcup_{x \in H} \big( B_{r(x)}(x) \cap B_r(p) \big) = \emptyset. \tag{1.66}$$

Ez azt mutatja, hogy $B_r(p) \subseteq M \setminus X$. Tehát $M \setminus X$ halmaz minden pontja belső pont, ezért $M \setminus X$ nyílt halmaz, vagyis $X$ zárt.
2. Legyen $Y \subseteq X$ zárt halmaz és legyen $(U_i)_{i \in I}$ az $Y$ halmaz nyílt fedése, és legyen $V = M \setminus Y$. Ekkor $V, (U_i)_{i \in I}$ az $X$ halmaz nyílt fedése ($X \subseteq V \cup \bigcup_{i \in I} U_i$), ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, melyre $X \subseteq V \cup \bigcup_{i \in I'} U_i$. A $V$ halmaz definíciójából adódik, hogy ekkor $Y \subseteq \bigcup_{i \in I'} U_i$ is teljesül, vagyis az $Y$ halmaz kompakt. Ha $Y \subseteq X$ kompakt halmaz, akkor az első pont alapján zárt.

**1.28. Tétel.** *(Cantor-féle közösrész-tétel.) Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $(K_i)_{i \in I}$ az $M$ kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül. Ekkor*

$$\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset. \tag{1.67}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $(K_i)_{i \in I}$ az $M$ kompakt, nem üres halmazainak olyan rendszere, hogy minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$, hogy $K_k \subseteq K_i \cap K_j$ teljesül, valamint rögzítsünk egy $i_0 \in I$ indexet. Minden $i \in I$ esetén legyen $U_i = M \setminus (K_i \cap K_{i_0})$, mely nyílt halmaz. A bizonyítandó állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$. Ekkor

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} M \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = M \setminus \left( \bigcap_{i \in I} (K_i \cap K_{i_0}) \right) = M, \tag{1.68}$$

vagyis $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Mivel $K_{i_0}$ kompakt, ezért létezik olyan $I' \subseteq I$ véges halmaz, hogy $K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I'} U_i$. Ebből

$$K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I'} U_i = \bigcup_{i \in I'} M \setminus (K_i \cap K_{i_0}) = M \setminus \left( \bigcap_{i \in I'} (K_i \cap K_{i_0}) \right) \tag{1.69}$$

adódik. A feltevés miatt véges sok $K_i$ kompakt halmaz metszete sem üres, tehát létezik $j \in I$, melyre $K_j \subseteq \bigcap_{i \in I'} (K_i \cap K_{i_0})$. Erre a halmazra a fenti tartalmazás alapján

$$K_j \subseteq K_{i_0} \subseteq M \setminus \left( \bigcap_{i \in I'} (K_i \cap K_{i_0}) \right) \subseteq M \setminus K_j \tag{1.70}$$

következik, ami a nyilvánvaló $K_j \subseteq M \setminus K_j$ ellentmondásra vezet.

**1.17. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $(M,d)$ metrikus tér *lokálisan kompakt*, ha minden pontjának létezik kompakt környezete.

**1.18. Definíció.** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az $A$ halmaz *relatív kompakt*, ha létezik olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A \subseteq K$ teljesül.

**1.29. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $A$ halmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha $\overline{A}$ kompakt halmaz.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$.
Ha $A$ relatív kompakt, akkor létezik olyan $K \subseteq M$ kompakt halmaz, melyre $A \subseteq K$ teljesül. Mivel ekkor $K$ zárt, ezért $\overline{A} \subseteq K$ is teljesül. Mivel kompakt halmaz zárt részhalmaza is kompakt, ezért $\overline{A}$ kompakt.
Ha $\overline{A}$ kompakt, akkor $A \subseteq \overline{A}$ miatt $A$ relatív kompakt.

## 1.8. Kompakt halmazok jellemzése sorozatokkal

**1.30. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $K \subseteq M$ kompakt halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to K$ sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme a $K$ halmaznak.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $a : \mathbb{N} \to K$ sorozat. Ekkor $K$ korlátos és zárt halmaz. Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $A_n = \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ halmazt. Az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a Cantor-tétel feltételei, ezért létezik $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x \in \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$ teljesül. Ebből a lezárt definíciója alapján következik, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$, melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \ \wedge \ a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x)\right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke $x$. Ekkor $\lim(a \circ \sigma) \in \overline{K}$, vagyis a $K$ halmaz zártsága miatt $\lim(a \circ \sigma) \in K$.

**1.31. Tétel.** *(Lebesgue-lemma.) Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $K$ halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a $K$ halmaznak. Ekkor a $K$ halmaz bármely $(U_i)_{i\in I}$ nyílt befedéséhez létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in K$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x) \subseteq U_i$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $K$ halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a $K$ halmaznak. A bizonyítandó állítás szerint

$$\forall (U_i)_{i\in I} \text{ nyílt befedéséhez: } \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in K \exists i \in I: \ B_r(x) \subseteq U_i. \tag{1.71}$$

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy

$$\exists (U_i)_{i\in I} \text{ nyílt befedés: } \forall r \in \mathbb{R}^+ \exists x \in K \forall i \in I: \ B_r(x) \setminus U_i \neq \emptyset. \tag{1.72}$$

Legyen $(U_i)_{i\in I}$ a fenti tulajdonságokkal bíró nyílt befedése a $K$ halmaznak. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{x \in K \mid \forall i \in I : B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus U_i \neq \emptyset\right\} \neq \emptyset, \tag{1.73}$$

vagyis a kiválasztási axióma miatt

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in K |\ \forall i \in I : B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus U_i \neq \emptyset\right\} \neq \emptyset. \tag{1.74}$$

Legyen $a$ egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak. Ekkor $a$ egy olyan $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall i \in I : \ B_{\frac{1}{n+1}}(a_n) \nsubseteq U_i. \tag{1.75}$$

Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to K$ olyan konvergens részsorozat, melyre $\lim(a \circ \sigma) = x \in K$ teljesül. Mivel $x \in K$ ezért létezik olyan $i_0 \in I$, hogy $x \in U_{i_0}$, valamint az $U_{i_0}$ halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq U_{i_0}$. Ekkor az $\frac{r}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n$ természetes számra $d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2}$. Megmutatjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, melyre $n > N$ és $\frac{1}{n+1} < \frac{r}{2}$ teljesül, akkor a $B_{\frac{1}{\sigma(n)+1}}(a_{\sigma(n)}) \subseteq U_{i_0}$ ellentmodást kapjuk. Legyen ugyanis $z \in B_{\frac{1}{\sigma(n)+1}}(a_{\sigma(n)})$ tetszőleges. Ekkor

$$d(z, a_{\sigma(n)}) < \frac{1}{\sigma(n)+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{r}{2}, \tag{1.76}$$

a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$d(z, x) \leq d(z, a_{\sigma(n)}) + d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r, \tag{1.77}$$

vagyis $z \in B_r(x) \subseteq U_{i_0}$.

**1.32. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a $K$ halmaznak. Ekkor minden $r \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x)$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $K \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata, amelynek a határértéke eleme a $K$ halmaznak. A bizonyítandó állítás szerint

$$\forall r \in \mathbb{R}^+ \exists H \subseteq K : \ |H| < \infty \ \wedge \ K \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x). \tag{1.78}$$

Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, vagyis hogy

$$\exists r \in \mathbb{R}^+ \forall H \subseteq K : \ |H| < \infty \ \to K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x) \neq \emptyset. \tag{1.79}$$

Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ egy olyan szám, melyre igaz, hogy minden $H \subseteq K$ véges részhalmaz esetén

$$K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x) \neq \emptyset. \tag{1.80}$$

Megmutatjuk, hogy létezik olyan $a : \mathbb{N} \to K$ sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ esetén $d(a_n, a_m) \geq r$ teljesül. A $K$ halmaz nem üres, tehát létezik eleme, legyen $a_0 \in K$. Ekkor a $H = \{a_0\}$ halmaz véges, vagyis $K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x) \neq \emptyset$, legyen $a_1 \in K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x)$. Ekkor a $H = \{a_0, a_1\}$ halmaz nem üres, és az előző gondolatmenet alapján tudunk $a_2 \in K \setminus \bigcup_{x\in H} B_r(x)$ elemet választani. Ebből a konstrukcióból a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió segítségével lehet egy $a : \mathbb{N} \to K$ sorozatot konstruálni. Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to K$ olyan konvergens részsorozat, melyre $\lim(a \circ \sigma) = x \in K$ teljesül. Ekkor az $\frac{r}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ $d(a_{\sigma(n)}, x) < \frac{r}{2}$. Vagyis bármely $m, n \in \mathbb{N}$, $N < n, m$, $m \neq n$ esetén az

$$r \leq d(a_{\sigma(m)}, a_{\sigma(n)}) \leq d(a_{\sigma(m)}, x) + d(x, a_{\sigma(n)}) < r \tag{1.81}$$

ellentmondást kapjuk.

**1.33. Tétel.** *(Bolzano–Weierstrass-tétel.) Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $A$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden $A$ halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az $A$ halmaznak.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. A 1.30 tétel alapján ha $A \subseteq M$ kompakt halmaz, akkor minden $A$ halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az $A$ halmaznak.
Most tegyük fel, hogy $A$ olyan halmaz, hogy minden $A$ halmazban haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme az $A$ halmaznak, és legyen $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ az $A$ halmaz egy nyílt fedése. Ekkor a 1.31 Lebesgue-lemma alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in A$ ponthoz van olyan $i \in I$, amelyre $B_r(x) \subseteq U_i$ teljesül. Az előző állítás alapján ehhez az $r$ számhoz létezik olyan $H \subseteq A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x)$ teljesül. Ekkor minden $x \in H \subseteq A$ ponthoz van olyan $i(x) \in I$ index, amelyre $B_r(x) \subseteq U_{i(x)}$ teljesül. Tehát az eddigiek alapján

$$A \subseteq \bigcup_{x\in H} B_r(x) \subseteq \bigcup_{x\in H} U_{i(x)}, \tag{1.82}$$

ami az $A$ halmaz véges nyílt fedése.

**1.34. Tétel.** *Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $a : \mathbb{N} \to K$ Cauchy-sorozat. A Bolzano–Weierstrass-tétel alapján ekkor létezik az $a$ sorozatnak olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme a $K$ halmaznak. Viszont egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata ((1.22) tétel). Tehát az $A$ Cauchy-sorozat konvergens és a határértéke a $K$ halmazban van, vagyis a $K$ halmaz teljes.

## 1.9. Szeparábilis metrikus terek

**1.19. Definíció.** Az $(M, d)$ metrikus teret *szeparábilisnek* nevezzük, ha létezik olyan $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega \subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I \subseteq \mathbb{N}$, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in I} U_n$ teljesül.

**1.35. Tétel.** *Egy metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha létezik benne megszámlálható sűrű halmaz.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ szeparábilis metrikus tér és legyen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $U_n\subseteq M$ nyílt halmaz, valamint minden $\Omega\subseteq M$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $I\subseteq\mathbb{N}$, hogy $\Omega=\bigcup\limits_{n\in I}U_n$ teljesül. Nyilván feltehető, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $U_n\neq\emptyset$. Ekkor $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}U_n\neq\emptyset$, legyen $a\in\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}U_n\neq\emptyset$. Ekkor $a:\mathbb{N}\to M$ olyan sorozat, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ számra $a_n\in U_n$ teljesül. Legyen $D=\operatorname{Ran}a$. A $D$ halmaz nyilván megszámlálható, most igazoljuk, hogy sűrű, azaz $\overline{D}=M$. Legyen $x\in M$ tetszőleges pont és $r\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Igazoljuk, hogy $B_r(x)\cap D\neq\emptyset$. Legyen $I\subseteq\mathbb{N}$ olyan, hogy $B_r(x)=\bigcup\limits_{n\in I}U_n$ teljesül. Ekkor minden $i\in I$ esetén $a_i\in U_i\subseteq B_r(x)$, valamint $a_i\in D$, tehát $a_i\in B_r(x)\cap D$, ezért $B_r(x)\cap D\neq\emptyset$, azaz $x\in\overline{D}$.
Most tegyük fel, hogy $(M,d)$ metrikus tér és $D\subseteq M$ megszámlálható sűrű halmaz. Legyen $\alpha:\mathbb{N}\to D$ szürjekció, valamint $\beta:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}^+$ és $\gamma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ bijekció. Minden $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen

$$U_n=B_{\beta(\gamma(n)_1)}(\alpha(\gamma(n)_2)). \tag{1.83}$$

Az $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer nyilván olyan, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $U_n\subseteq M$ nyílt halmaz. Legyen $\Omega\subseteq M$ tetszőleges nyílt halmaz. Ehhez definiáljuk az $I=\{n\in\mathbb{N}|\ U_n\subseteq\Omega\}$ indexhalmazt. Megmutatjuk, hogy $\Omega=\bigcup\limits_{n\in I}U_n$ teljesül. Mivel $\bigcup\limits_{n\in I}U_n\subseteq\Omega$, ezért csak az $\Omega\subseteq\bigcup\limits_{n\in I}U_n$ tartalmazást kell igazolnunk. Ehhez legyen $x\in\Omega$ tetszőleges pont. Mivel $\Omega$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\rho\in\mathbb{R}^+$, hogy $B_\rho(x)\subseteq\Omega$. Legyen $r\in\left]0,\frac{\rho}{2}\right[\cap\mathbb{Q}^+$. Mivel $D$ sűrű, ezért $B_r(x)\cap D\neq\emptyset$, most legyen $z\in B_r(x)\cap D$ és tekintsük az

$$i=\beta^{-1}(r),\quad j=\min\overset{-1}{\alpha}(z)\quad\text{és}\quad n=\gamma^{-1}(i,j) \tag{1.84}$$

számokat. Ekkor $U_n=B_r(z)$. Tehát ha $y\in U_n$, akkor $y\in B_r(z)$, valamint $d(y,z)<r$ és $d(z,x)<r$ miatt $d(x,y)<2r<\rho$, azaz $y\in B_\rho(x)\subseteq\Omega$. Ez azt jelenti, hogy $U_n\subseteq\Omega$, vagyis $n\in I$. Mivel $x\in B_r(z)=U_n$, ezért $x\in\bigcup\limits_{n\in I}U_n$. Ezzel igazoltuk a $\Omega\subseteq\bigcup\limits_{n\in I}U_n$ tartalmazást.

**1.36. Tétel.** *Legyen $n\in\mathbb{N}^+$ és $p\in[1,\infty[$. Az $(\mathbb{R}^n,d_p)$ és az $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ terek szeparábilisek.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n\in\mathbb{N}^+$ és $D=\mathbb{Q}^n$. Ekkor $D$ nyilván megszámlálható halmaz, ezért ha sűrű lenne, akkor az előző tétel értelmében a tér szeparábilis volna. Megmutatjuk, hogy a $D$ halmaz sűrű. Legyen $p\in[1,\infty[$ és tekintsük az $(\mathbb{R}^n,d_p)$ teret. Legyen $x\in\mathbb{R}^n$ és $r\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén legyen $a_i\in\left]x_i,x_i+\frac{r}{\sqrt[p]{n}}\right[\cap\mathbb{Q}$, és tekintsük az $a=(a_1,\dots,a_n)$ elemet. Ekkor

$$d(a,x)=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n(a_i-x_i)^p}<\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n\frac{r^p}{n}}=\sqrt[p]{r^p}=r, \tag{1.85}$$

vagyis $a\in B_r(x)$, valamint $a\in D$, ezért $B_r(x)\cap D\neq\emptyset$ minden $r\in\mathbb{R}^+$ esetén, ami éppen azt jelenti, hogy $D$ sűrű a $(\mathbb{R}^n,d_p)$ térben.
Az $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ térben legyen $x\in R^n$ és $r\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén legyen $a_i\in\left]x_i,x_i+r\right[\cap\mathbb{Q}$, és tekintsük az $a=(a_1,\dots,a_n)$ elemet. Ekkor

$$d(a,x)=\max\{|a_i-x_i|\mid i\in\{1,\dots,n\}\}\,,<r \tag{1.86}$$

vagyis $a\in B_r(x)$, valamint $a\in D$, ezért $B_r(x)\cap D\neq\emptyset$ minden $r\in\mathbb{R}^+$ esetén, ami éppen azt jelenti, hogy $D$ sűrű a $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ térben.

## 1.10. Teljesen korlátos halmazok

**1.20. Definíció.** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az $A$ halmaz *teljesen korlátos*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \in A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül.
Az $(M,d)$ metrikus teret teljesen korlátosnak nevezzük, ha $M$ teljesen korlátos halmaz.

**1.37. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $A$ halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \in M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$.
A teljesen korlátosság definíciója miatt csak azt kell megmutatni, hogy ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $X \subseteq M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x)$ teljesül, akkor $A$ teljesen korlátos. Ehhez tegyük fel, hogy $A$ olyan nem üres halmaz, melyre teljesül, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists X \in M: \ X \text{ véges és } A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_\varepsilon(x). \tag{1.87}$$

Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az $A$ halmaz tulajdonsága alapján létezik $X \subseteq M$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{x\in X} B_{\frac{r}{2}}(x)$. Legyen

$$X' = \left\{x \in X |\ B_{\frac{r}{2}}(x) \cap A \neq \emptyset\right\}. \tag{1.88}$$

Mivel $X'$ is véges halmaz, ezért valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $X' = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexre legyen $x_i' \in B_{\frac{r}{2}}(x_i) \cap A$ tetszőleges pont és tekintsük az $Y = \{x_1', \ldots, x_n'\} \subseteq A$ halmazt. Ha $a \in A$ tetszőleges pont, akkor létezik olyan $i \in \{1, \ldots, n\}$, hogy $a \in B_{\frac{r}{2}}(x_i)$. Mivel $d(a, x_i) < \frac{r}{2}$ és $d(x_i, x_i') < \frac{r}{2}$, ezért $a \in B_r(x_i')$. Vagyis $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i')$, tehát $A$ teljesen korlátos.

**1.38. Tétel.** *(Teljesen korlátos halmazok alaptulajdonságai.)*

1. *Teljesen korlátos halmaz minden részhalmaza teljesen korlátos.*
2. *Véges sok teljesen korlátos halmaz uniója is teljesen korlátos.*
3. *Metrikus térben minden teljesen korlátos halmaz korlátos.*

***Bizonyítás.*** Az 1. és a 2. pont az előző tétel alapján nyilvánvaló.
3. Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz. Ha $A = \emptyset$, akkor nyilván korlátos. Tegyük fel, hogy $A \neq \emptyset$. Ekkor létezik olyan $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ halmaz, hogy $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_1(x_i)$. Legyen $R = \max\{d(x_1, x_j) |\ 1 < j \leq n\}$. Tetszőleges $a \in A$ ponthoz van olyan $i \in \{1, \ldots, n\}$ index, hogy $a \in B_1(x_i)$. Ekkor $d(a, x_i) < 1$ és $d(x_1, x_i) \leq R$ miatt $d(a, x_1) < R + 1$, azaz $a \in B_{R+1}(x_1)$. Ezek alapján $A \subseteq B_R(x_1)$, vagyis $A$ korlátos.

**1.39. Tétel.** *Minden kompakt halmaz teljesen korlátos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $A \subseteq M$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $A \subseteq \bigcup_{a\in A} B_\varepsilon(a)$, ezért az $A$ halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $X \subseteq A$ véges halmaz, melyre $A \subseteq \bigcup_{a\in X} B_\varepsilon(a)$ teljesül, tehát $A$ teljesen korlátos.

**1.40. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat. Ekkor $A$ teljesen korlátos halmaz.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat. Ha $A = \emptyset$, akkor nyilván teljesen korlátos, ezért feltehető, hogy $A \neq \emptyset$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $A$ nem teljesen korlátos. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $H \subseteq A$ véges halmazra $A \not\subseteq \bigcup_{x \in H} B_r(x)$. Mivel az $A$ halmaz nem üres, tehát létezik eleme, legyen $a_0 \in A$. Ekkor a $H = \{a_0\}$ halmaz véges, vagyis $A \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x) \neq \emptyset$, legyen $a_1 \in A \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x)$. Ekkor a $H = \{a_0, a_1\}$ halmaz véges, és az előző gondolatmenet alapján tudunk egy $a_2 \in A \setminus \bigcup_{x \in H} B_r(x)$ elemet választani. Ebből a konstrukcióból a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió segítségével lehet egy olyan $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatot konstruálni, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B_r(a_k) \tag{1.89}$$

teljesül. Ebből következik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ számra $d(a_n, a_m) \geq r$.
Tegyük fel, hogy $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to A$ olyan részsorozat, mely Cauchy-sorozat. Ekkor az $r$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n < m$ természetes számra $d(a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(m)}) < r$. Ez viszont ellentmondásban van a sorozat $d(a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(m)}) \geq r$ tulajdonságával.

**1.41. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz. Ekkor minden $a : \mathbb{N} \to A$ sorozatnak létezik olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $A \subseteq M$ teljesen korlátos halmaz és $a : \mathbb{N} \to A$ sorozat. Legyen $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre $\lim \alpha = 0$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$ teljesül. (Például $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$.)
Először legyen $A_0 = A$. Mivel $A_0$ teljesen korlátos, ezért létezik olyan $H_0 \subseteq A_0$ véges halmaz, hogy $A_0 \subseteq \bigcup_{x \in H_0} B_{\alpha_0}(x)$. Minden $x \in H_0$ esetén legyen

$$N(x) = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n \in B_{\alpha_0}(x) \cap A_0\}. \tag{1.90}$$

Ekkor van olyan $x_0 \in H_0$, melyre az $N(x_0)$ halmaz végtelen. Legyen $N_0 = N(x_0)$ és

$$\sigma(0) = \min N_0. \tag{1.91}$$

Most legyen $A_1 = A_0 \cap B_{a_0}(x_0)$. Mivel $A_1$ teljesen korlátos, ezért létezik olyan $H_1 \subseteq A_1$ véges halmaz, hogy $A_1 \subseteq \bigcup_{x \in H_1} B_{\alpha_1}(x)$. Minden $x \in H_1$ esetén legyen

$$N(x) = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n \in B_{\alpha_1}(x) \cap A_1\}. \tag{1.92}$$

Ekkor van olyan $x_1 \in H_1$, melyre az $N(x_1)$ halmaz végtelen. Legyen $N_1 = N(x_1)$ és

$$\sigma(1) = \min\left(N_1 \cap [\sigma(0) + 1, \infty[\right). \tag{1.93}$$

Ha valamilyen $i \in \mathbb{N}$ számra már definiáltuk az $A_i$ halmazt, az $x_i$ pontot és a $\sigma(i)$ értéket, akkor legyen $A_{i+1} = A_i \cap B_{\alpha_i}(x_i)$. Mivel $A_{i+1}$ teljesen korlátos, ezért létezik olyan $H_{i+1} \subseteq A_{i+1}$ véges halmaz, hogy $A_{i+1} \subseteq \bigcup_{x \in H_{i+1}} B_{\alpha_{i+1}}(x)$. Minden $x \in H_{i+1}$ esetén legyen

$$N(x) = \left\{ n \in \mathbb{N} |\ a_n \in B_{\alpha_{i+1}}(x) \cap A_{i+1} \right\}. \tag{1.94}$$

Ekkor van olyan $x_{i+1} \in H_{i+1}$, melyre az $N(x_{i+1})$ halmaz végtelen. Legyen $N_{i+1} = N(x_{i+1})$ és

$$\sigma(i+1) = \min\left(N_{i+1} \cap [\sigma(i)+1, \infty[\right). \tag{1.95}$$

Ebből a konstrukcióból a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételével lehet olyan

$$N : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), \qquad x : \mathbb{N} \to M, \qquad \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \tag{1.96}$$

függvények létezését igazolni, melyre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $N_i$ végtelen halmaz és

$$N_{i+1} \subseteq N_i, \quad x_{i+1} \in B_{\alpha_i}(x_i), \quad \sigma(i) < \sigma(i+1), \quad a_{\sigma_{i+1}} \in B_{\alpha_{i+1}}(x_{i+1}). \tag{1.97}$$

Most igazoljuk, hogy $x : \mathbb{N} \to M$ Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a $\sum_n \alpha_n$ sor konvergens és $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n$ számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon \tag{1.98}$$

teljesül. Tegyük fel, hogy $N < n, m$. Ekkor

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=1}^{m-n} d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) < \sum_{k=1}^{m-n} \alpha_{n+k-1} = \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon, \tag{1.99}$$

vagyis $x$ Cauchy-sorozat.
Végül megmutatjuk, hogy $a \circ \sigma$ Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $\lim \alpha = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_1 < n$ esetén $\alpha_n < \frac{\varepsilon}{3}$. Mivel $x$ Cauchy-sorozat az eddigiek alapján, ezért létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_2 < n, m$ esetén $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$, valamint $N < n, m$ tetszőleges természetes szám. Ekkor $n \leq \sigma(n)$ és $m \leq \sigma(m)$ miatt

$$d(a_{\sigma(n)}, a_{\sigma(m)}) \leq d(a_{\sigma(n)}, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, a_{\sigma(m)}) < \alpha_n + \frac{\varepsilon}{3} + \alpha_m < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \tag{1.100}$$

tehát $a \circ \sigma$ Cauchy-sorozat.

**1.42. Tétel.** *(Hausdorff-tétel.) Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor teljesen korlátos, ha minden benne haladó sorozatnak van olyan részsorozata, mely Cauchy-sorozat.*

***Bizonyítás.*** A (1.41) és a (1.40) tétel következménye.

**1.43. Tétel.** *Metrikus térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljesen korlátos és teljes.*

***Bizonyítás.*** Metrikus térben minden kompakt halmaz teljes a (1.34) tétel alapján és teljesen korlátos a (1.39) tétel miatt. Most legyen $(M, d)$ metrikus tér és $K \subseteq M$ teljesen korlátos teljes halmaz. Továbbá legyen $a : \mathbb{N} \to K$ tetszőleges sorozat. Mivel $K$ teljesen korlátos, ezért a (1.41) tétel miatt az $a$ sorozatnak van Cauchy-részsorozata. Mivel a $K$ halmaz teljes, ezért ennek a Cauchy-részsorozatnak van határértéke a $K$ halmazban. Tehát létezik olyan konvergens részsorozata az $a$ sorozatnak, mely határértéke a $K$ halmazban van. Ezért a (1.33) Bolzano–Weierstrass-tétel miatt $K$ kompakt.

## 1.11. Függvények metrikus terek között

**1.21. Definíció.** Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény, és az $a \in M$ pont az $f$ függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *$f$ függvény határértéke az $a$ pontban* $A \in M'$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big( f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A) \Big). \tag{1.101}$$

**1.44. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény, az $a \in M$ pont az $f$ függvény értelmezési tartományának torlódási pontja, és legyen $A, B \in M'$ az $f$ függvény határértéke az $a$ pontban. Ekkor $A = B$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$, $a \in M$ a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in M'$ legyen az $f$ függvény határértéke az $a$ pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}\, f$ esetén

$$0 < d(x, a) < \delta_A \;\rightarrow\; d'(f(x), A) < \frac{d'(A, B)}{2} \tag{1.102}$$

$$0 < d(x, a) < \delta_B \;\rightarrow\; d'(f(x), B) < \frac{d'(A, B)}{2} \tag{1.103}$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\mathrm{Dom}\, f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ elemre a

$$d'(A, B) \leq d'(A, f(x)) + d'(f(x), B) < d'(A, B) \tag{1.104}$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

**1.22. Definíció.** (*A* lim *művelet.*) Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ topologikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény, és az $a \in M$ pont a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik az $f$ függvénynek határértéke az $a$ pontban, akkor azt $\lim\limits_a f$ vagy $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ jelöli.

**1.45. Tétel.** *(Átviteli elv határértékre.) Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény, és a $z \in M$ pont a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaz torlódási pontja. A $\lim\limits_z f$ határérték pontosan akkor létezik, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$ sorozatra, mely a $z$ ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $z \in M$ a $\mathrm{Dom}(f)$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim\limits_z f = F \in M'$ határérték. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$, $z$ ponthoz konvergáló sorozat és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $f$ függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \; 0 < d(x, z) < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x), F) < \varepsilon. \tag{1.105}$$

Ehhez a $\delta$ számhoz az $a$ sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), F) < \varepsilon$, vagyis $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = F$.
Most tegyük fel, hogy $\lim f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$, $z$ ponthoz konvergáló sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$ két olyan tetszőleges sorozat, mely a $z$ ponthoz konvergál, valamint legyen

$$a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\} \qquad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \tag{1.106}$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in M'$ pont, hogy minden $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$, $z$ ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim_z f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim_z f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A). \tag{1.107}$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \mathrm{Dom}\, f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}\,,\ d'(f(x), A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset, \tag{1.108}$$

ezért

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathrm{Dom}\, f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}\,,\ d'(f(x), A) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset. \tag{1.109}$$

Ha $a$ egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}\, f \setminus \{z\}$ olyan sorozat, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(a_n, z) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a = z$. Ekkor $\lim f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), A) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az $a$ sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n), A) \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f) \setminus \{z\}$, $z$ ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = A$.

**1.23. Definíció.** Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $a \in \mathrm{Dom}\, f$.

1. Az $f$ *függvény folytonos az* $a$ *pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \Big( f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \Big). \tag{1.110}$$

2. Az $f$ *függvény folytonos*, ha minden $a \in \mathrm{Dom}\, f$ pontban folytonos.

A $C(M, M')$ szimbólum jelöli az $M \to M'$ folytonos függvények halmazát.

**1.46. Tétel.** *(Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$ és $z \in \mathrm{Dom}\, f$. A $f$ függvény pontosan akkor folytonos a $z$ pontban, ha minden olyan $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}\, f$ sorozatra, mely a $z$ ponthoz konvergál, létezik a $\lim f \circ a$ határérték, és megegyezik az $f(z)$ elemmel.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér, $f : M \twoheadrightarrow M'$, $z \in \mathrm{Dom}(f)$, tegyük fel, hogy az $f$ függvény folytonos a $z$ pontban, és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathrm{Dom}(f)$, $z$ ponthoz konvergáló sorozat. Az $f$ függvény $z$ pontbeli folytonossága miatt tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez, létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \ d(x, z) < \delta \ \Rightarrow \ d'(f(x), f(z)) < \varepsilon. \tag{1.111}$$

Ehhez a $\delta$ számhoz az $a$ sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, z) < \delta$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d'(f(a_n), f(z)) < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(z)$.

Tegyük fel, hogy $f$ nem folytonos a $z$ pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathrm{Dom}\, f \cap B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)). \tag{1.112}$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \mathrm{Dom}\, f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset, \tag{1.113}$$

ezért

$$\prod_{n\in\mathbb{N}}\left\{x\in \operatorname{Dom} f|\ x\in B_{\frac{1}{n+1}}(z),\ d'(f(x),f(z))\geq\varepsilon\right\}\neq\emptyset. \tag{1.114}$$

Ha $a$ egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a:\mathbb{N}\to\operatorname{Dom} f$ olyan sorozat, melynek minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $d(a_n,z)<\dfrac{1}{n+1}$ teljesül az elemeire, vagyis $\lim a=z$. Ekkor $\lim f\circ a=f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\dfrac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $d'(f(a_n),f(z))\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$, ugyanis az $a$ sorozat konstrukciója miatt minden $n\in\mathbb{N}$ számra $d'(f(a_n),f(z))\geq\varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a:\mathbb{N}\to\operatorname{Dom}(f)$, $z$ ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f\circ a=f(z)$.

**1.47. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ és $(M',d')$ metrikus tér, $f:M\twoheadrightarrow M'$, és az $a\in\operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az $f$ függvény pontosan akkor folytonos az $a$ pontban, ha $\lim\limits_a f$ létezik, és $\lim\limits_a f=f(a)$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ és $(M',d')$ metrikus tér, $f:M\twoheadrightarrow M'$, és az $a\in\operatorname{Dom} f$ pont a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja.
Egymás alá írva a $\lim\limits_a f=f(a)$ és az $f$ függvény $a$ pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall x\in\operatorname{Dom} f:\qquad 0<d(x,a)<\delta\quad\to\quad d'f(x),f(a)<\varepsilon \tag{1.115}$$

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall x\in\operatorname{Dom} f:\qquad d(x,a)<\delta\quad\to\quad d'(f(x),f(a))<\varepsilon \tag{1.116}$$

rögtön adódik, hogy az $a\in\operatorname{Dom} f$ esetben a két formula ekvivalens.

**1.48. Tétel.** *Legyen $(M_1,d_1)$, $(M_2,d_2)$ metrikus tér, $\varphi:M_1\to M_2$ folytonos függvény és $x,y\in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a,b:\mathbb{N}\to M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a=x$ és $\lim b=y$ teljesül. Ekkor*

$$d_2(\varphi(x),\varphi(y))=\lim_{n\to\infty}d_2(\varphi(a_n),\varphi(b_n)). \tag{1.117}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1,d_1)$, $(M_2,d_2)$ metrikus tér, $\varphi:M_1\to M_2$ folytonos függvény és $x,y\in M_1$ tetszőleges pont. Legyen $a,b:\mathbb{N}\to M_1$ olyan sorozat, melyre $\lim a=x$ és $\lim b=y$ teljesül. Minden $n\in\mathbb{N}$ számra az

$$d_2(\varphi(x),\varphi(y))\leq d_2(\varphi(x),\varphi(a_n))+d_2(\varphi(a_n),\varphi(b_n))+d_2(\varphi(b_n),\varphi(y)) \tag{1.118}$$

egyenletből

$$d_2(\varphi(x),\varphi(y))-d_2(\varphi(a_n),\varphi(b_n))\leq d_2(\varphi(x),\varphi(a_n))+d_2(\varphi(b_n),\varphi(y)) \tag{1.119}$$

adódik, amiből az $x\leftrightarrow y$ és $a\leftrightarrow b$ szerepcserével

$$|d_2(\varphi(x),\varphi(y))-d_2(\varphi(a_n),\varphi(b_n))|\leq d_2(\varphi(x),\varphi(a_n))+d_2(\varphi(b_n),\varphi(y)) \tag{1.120}$$

következik. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján ezért

$$\lim_{n\to\infty}|d_2(\varphi(x),\varphi(y))-d_2(\varphi(a_n),\varphi(b_n))|=0, \tag{1.121}$$

vagyis

$$d_2(\varphi(x),\varphi(y))=\lim_{n\to\infty}d_2(\varphi(a_n),\varphi(b_n)) \tag{1.122}$$

teljesül.

**1.49. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér, valamint $a, b : \mathbb{N} \to M$ konvergens sorozat. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(\lim a, \lim b) \tag{1.123}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Ehhez elég a (1.48) tételt használni az $(M_1, d_1) = (M_2, d_2) = (M, d)$ és a $\varphi = \mathrm{id}_M$ szereposztással.

**1.50. Tétel.** *(Függvénykompozíció határértéke.) Legyen $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ és $(M_3, d_3)$ metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és $a$ torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a*

1. *$b \notin \mathrm{Dom}\, g$;*
2. *$b \in \mathrm{Dom}\, g$ és $g$ folytonos a $b$ pontban;*

*feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim_a (g \circ f) = c$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ és $(M_3, d_3)$ metrikus tér, $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$, $a \in M_1$, $b \in M_2$ és $c \in M_3$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és $a$ torlódási pontja a $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges.
Először tegyük fel, hogy $b \notin \mathrm{Dom}\, g$. A $\lim_b g = c$ miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) \subseteq B_\varepsilon(c). \tag{1.124}$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_{\delta'}(b). \tag{1.125}$$

Ekkor az előző egyenletek és $g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) = g(B_{\delta'}(b))$ miatt

$$(g \circ f)(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) = g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) \subseteq B_\varepsilon(c) \tag{1.126}$$

teljesül, vagyis $\lim_a (g \circ f) = c$.
Most tegyük fel, hogy $b \in \mathrm{Dom}\, g$ és $g$ folytonos a $b$ pontban. A $g$ függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c). \tag{1.127}$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_{\delta'}(b). \tag{1.128}$$

Ekkor az előző egyenletek alapján

$$(g \circ f)(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c) \tag{1.129}$$

teljesül, vagyis $\lim_a (g \circ f) = c$.

**1.51. Tétel.** *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $(M_1, d_1)$ és $(M_2, d_2)$ metrikus tér, valamint $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az $f$ függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap \mathrm{Dom}\, f$ teljesül.*

3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap \operatorname{Dom} f$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ metrikus tér, $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ és $K = \operatorname{Dom} f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \to M_2$ folytonos függvény és $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in \overset{-1}{f}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az $f$ függvény $z$ pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_\delta(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_{\delta(z)}(z) \subseteq \overset{-1}{f}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup_{z \in \overset{-1}{f}(A)} B_{\delta(z)}(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = \overset{-1}{f}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \to M_2$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_\varepsilon(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq M_2$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(B_\varepsilon(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_\delta(z)$ esetén $f(x) \in B_\varepsilon(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az $f$ függvény $z$ pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.

$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq M_2$ zárt halmaz. Ekkor $M_2 \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(M_2 \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(M_1 \setminus \overset{-1}{f}(M_2 \setminus A)\right) = K \cap (M_1 \setminus (U \cap K)) = K \cap (M_1 \setminus U) \tag{1.130}$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq M_2$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = M_1 \setminus U$ halmaz zárt és $\overset{-1}{f}(A) = Z \cap K$.

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq M_2$ nyílt halmaz. Ekkor $M_2 \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz, hogy $\overset{-1}{f}(M_2 \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$\overset{-1}{f}(A) = K \cap \left(M_1 \setminus \overset{-1}{f}(M_2 \setminus A)\right) = K \cap (M_1 \setminus (Z \cap K)) = K \cap (M_1 \setminus Z) \tag{1.131}$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq M_2$ halmazra $\overset{-1}{f}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = M_1 \setminus Z$ halmaz nyílt és $\overset{-1}{f}(A) = U \cap K$.

**1.52. Tétel.** *(A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $(M_1, d_1)$ és $(M_2, d_2)$ metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az $f$ függvény folytonos.*
2. *Minden $A \subseteq M_2$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ nyílt.*
3. *Minden $A \subseteq M_2$ zárt halmazra $\overset{-1}{f}(A)$ zárt.*

***Bizonyítás.*** Az előző állítás közvetlen következménye.

**1.53. Tétel.** *(Egyenlőség folytatásának az elve.) Legyen $(M_1, d_1)$ és $(M_2, d_2)$ metrikus tér, valamint $f, g : M_1 \to M_2$ folytonos függvény. Ha valamilyen $U \subseteq M_1$ halamzon $f|_U = g|_U$ teljesül, akkor $f|_{\overline{U}} = g|_{\overline{U}}$ is teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ metrikus tér és $f, g : M_1 \to M_2$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy valamilyen $U \subseteq M_1$ halmazon $f|_U = g|_U$ teljesül és legyen $x \in \overline{U} \setminus U$ tetszőleges pont. Ekkor $x$ torlódási pontja az $U$ halmaznak, tehát létezik olyan $x : \mathbb{N} \to U$ sorozat, melyre $\lim x = a$ teljesül. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(x). \tag{1.132}$$

**1.54. Tétel.** *Metrikus terek között ható folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_i, d_i)$ metrikus tér minden $i = 1, 2, 3$ esetén, $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$, $g : M_2 \twoheadrightarrow M_3$ folytonos függvény, és $a \in \operatorname{Dom} f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \operatorname{Dom} g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az $a$ pontban.
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a $g$ függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \operatorname{Dom} g : \quad d_2(y, f(a)) < \delta_g \;\Rightarrow\; d_3(g(y), g(f(a))) < \varepsilon. \tag{1.133}$$

Mivel az $f$ függvény folytonos az $a$ pontban, ezért a $\delta_g$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \operatorname{Dom} f : \quad d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \delta_g. \tag{1.134}$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \operatorname{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_3((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) = d_3(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon. \tag{1.135}$$

**1.24. Definíció.** Legyen $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \to M_2$ függvény *nyílt*, ha minden $U \subseteq M_1$ halmaz esetén $f(U)$ nyílt halmaz.

**1.55. Tétel.** *Legyen $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ bijekció. Az $f$ függvény pontosan akkor nyílt, ha $f^{-1}$ folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ bijekció. A folytonosság topologikus jellemzése alapján az $f^{-1}$ függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $U \subseteq M_1$ nyílt halmaz esetén $\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(U) \subseteq M_2$ nyílt halmaz, azaz $f(U) \subseteq M_2$ nyílt halmaz, vagyis amikor $f$ nyílt.

## 1.12. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények

**1.56. Tétel.** *Legyen $(M_1, d_1)$ és $(M_2, d_2)$ metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1, d_1)$ és $(M_2, d_2)$ metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \to M_2$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \tag{1.136}$$

nyílt fedését. Ekkor a folytonosság topologikus jellemzése ((1.51) tétel) alapján minden $i \in I$ esetén létezik olyan $V_i$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(U_i) = \bigcup_{i\in I} (V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) \cap K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \tag{1.137}$$

a $K$ kompakt halmaz nyílt fedése. A $K$ halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i, \tag{1.138}$$

ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(V_i) = \bigcup_{i \in J} U_i \tag{1.139}$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

**1.57. Tétel.** *(Weierstrass-tétel.) Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$, melyekre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 1.56 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártsága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$ teljesül.

**1.25. Definíció.** Legyen $(M,d)$ és $(M',d')$ metrikus tér. Az $f : M \to M'$ függvény *homeomorfizmus*, ha folytonos bijekció, és az inverze is folytonos. Azt mondjuk, hogy a $(M,d)$ *és* $(M',d')$ *metrikus terek homeomorfak*, ha létezik $f : M \to M'$ homeomorfizmus.

**1.58. Tétel.** *Legyen $(M_1,d_1)$ és $(M_2,d_2)$ metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos injektív függvény. Ekkor az $f^{-1}$ függvény is folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1,d_1)$ és $(M_2,d_2)$ metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \to M_2$ folytonos injektív függvény és legyen $Z \subseteq M_1$ zárt halmaz. Ekkor $Z \cap K$ a $K$ kompakt halmaz zárt részhalmaza, ezért kompakt. Felhasználva, hogy kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt, valamint az

$$\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(Z) = f(Z) = f(Z \cap K) \tag{1.140}$$

egyenlőséget az adódik, hogy minden $Z$ zárt halmazra a $\overset{-1}{\left(f^{-1}\right)}(Z)$ halmaz zárt, tehát a 1.51 tétel alapján $f^{-1}$ folytonos függvény.

**1.59. Tétel.** *Ha $(M_1,d_1)$ kompakt metrikus tér, és $(M_2,d_2)$ metrikus tér, akkor minden $f : M_1 \to M_2$ folytonos bijekció homeomorfizmus.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1,d_1)$ kompakt metrikus tér, $(M_2,d_2)$ metrikus tér, és legyen $f : M_1 \to M_2$ folytonos bijekció. Ekkor a 1.56 tétel alapján $M_2$ kompakt tér, és a 1.58 állítás alapján az $f^{-1}$ függvény is folytonos.

## 1.13. Egyenletesen folytonos függvények

**1.26. Definíció.** Legyen $(M_1,d_1)$ és $(M_2,d_2)$ metrikus tér. Azt mondjuk, hogy az $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ függvény *egyenletesen folytonos az $A$ halmazon*, ha $A \subseteq \operatorname{Dom} f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : \quad \big(d_1(x,y) < \delta \;\to\; d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big) \tag{1.141}$$

teljesül. Az $f$ függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

**1.60. Tétel.** *Metrikus terek között ható egyenletesen folytonos függvény folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1, d_1)$ és $(M_2, d_2)$ metrikus tér, $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény és $x \in \operatorname{Dom} f$. Ekkor az $f$ függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \operatorname{Dom} f : \quad \big(d_1(x, y) < \delta \ \rightarrow\ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\big), \tag{1.142}$$

ami az $f$ függvény $x$ pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az $f$ minden $x \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

**1.61. Tétel.** *(Heine-tétel.) Legyen $(M_1, d_1)$ és $(M_2, d_2)$ metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz és $f : K \to M_2$ folytonos függvény. Ekkor $f$ egyenletesen folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1, d_1)$ és $(M_2, d_2)$ metrikus tér, $K \subseteq M_1$ kompakt halmaz, $f : K \to M_2$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az $f$ függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f\left(B_{\delta(x)}(x)\right) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x)) \tag{1.143}$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x), \tag{1.144}$$

vagyis a $K$ halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x). \tag{1.145}$$

Legyen $\delta = \min\left\{\frac{\delta(x)}{2} \mid x \in H\right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $d_1(x, y) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in K$ olyan, melyre $d_1(x, y) < \delta$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d_1(y, p) \le d_1(y, x) + d_1(x, p) < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \le \delta(p), \tag{1.146}$$

vagyis

$$d_1(x, p) < \delta(p) \qquad \rightarrow \qquad d_2(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.147}$$

$$d_1(y, p) < \delta(p) \qquad \rightarrow \qquad d_2(f(y), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.148}$$

Ezekből viszont a bizonyítandó

$$d_2(f(x), f(y)) \le d_2(f(x), f(p)) + d_2(f(p), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{1.149}$$

egyenlőtlenség következik.

**1.62. Tétel.** *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Legyen $(M_1, d_1)$ metrikus tér, $(M_2, d_2)$ teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : \overline{\operatorname{Dom} f} \to M_2$ függvény, mely az $f$ függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a $g$ függvény is egyenletesen folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1, d_1)$ metrikus tér, $(M_2, d_2)$ teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ egyenletesen folytonos függvény. A jelölések egyszerűsítése végett legyen $X = \operatorname{Dom} f$.
1. Ha $g_1, g_2 : \overline{X} \to M_2$ olyan folytonos függvény, melyre $g_1|_X = g_2|_X$ teljesül, akkor az egyenlőség folytatásának az elve alapján ((1.53) tétel) $g_1|_{\overline{X}} = g_2|_{\overline{X}}$, azaz $g_1 = g_2$.
2. Legyen $x \in \overline{X} \setminus X$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a : \mathbb{N} \to X$ sorozat, melyre $\lim a = x$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor az $f \circ a$ sorozat konvergens. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $f$ egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y_1, y_2 \in X$ pontra $d_1(y_1, y_2) < \delta$ esetén $d_2(f(y_1), f(y_2)) < \varepsilon$ teljesül. Mivel az $a$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat is, tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n, m$ természetes számra $d_1(a_n, a_m) < \delta$. Ekkor viszont minden $N < n, m$ természetes számra $d_2(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$. Mivel az $(M_2, d_2)$ tér teljes, ezért az $f \circ a$ Cauchy-sorozat konvergens.
3. Legyen $x \in \overline{X} \setminus X$ tetszőleges pont és $a, b : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = \lim b = x$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim(f \circ a) = \lim(f \circ b)$. Legyen $\alpha = \lim(f \circ a)$ és $\beta = \lim(f \circ b)$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\alpha \neq \beta$. Legyen $\varepsilon = \dfrac{d(\alpha, \beta)}{3}$. Ekkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ közös küszöbindex, hogy minden $N_1 < n$ természetes számra $d_2(f(a_n), \alpha) < \varepsilon$ és $d_2(f(b_n), \beta) < \varepsilon$. Amiből a

$$d_2(\alpha, \beta) \leq d_2(\alpha, f(a_n)) + d_2(f(a_n), f(b_n)) + d_2(f(b_n), \beta) \tag{1.150}$$

egyenlőtlenség miatt

$$3\varepsilon \leq \varepsilon + d_2(f(a_n), f(b_n)) + \varepsilon, \tag{1.151}$$

következik, vagyis $\varepsilon \leq d_2(f(a_n), f(b_n))$. Mivel $f$ egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y_1, y_2 \in X$ pontra $d_1(y_1, y_2) < \delta$ esetén $d_2(f(y_1), f(y_2)) < \varepsilon$ teljesül. Mivel az $a$ és a $b$ sorozat konvergens, ezért létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ közös küszöbindex, hogy minden $N < n$ természetes számra $d_1(a_n, x) < \dfrac{\delta}{2}$ és $d_1(b_n, x) < \dfrac{\delta}{2}$. Ekkor viszont minden $N_2 < n$ természetes számra

$$d_1(a_n, b_n) \leq d_1(a_n, x) + d_1(x, b_n) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \tag{1.152}$$

Ebből az $f$ függvény egyenletes folytonossága miatt azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ esetén $d_2(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon$. Tehát ha $n \in \mathbb{N}$, $\max\{N_1, N_2\} < n$, akkor az

$$\varepsilon \leq d_2(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon \tag{1.153}$$

ellentmondás adódik.
4. Ezek után definiálhatjuk úgy a $g$ függvényt, hogy minden $x \in \overline{X}$ esetén vegyünk egy olyan $a : \mathbb{N} \to X$ sorozatot, melyre $\lim a = x$ teljesül, és legyen $g(x) = \lim(f \circ a)$. Vagy másképp leírva

$$g = \left\{(x, y) \in \overline{X} \times M_2 |\ \exists a : \mathbb{N} \to X : \ \lim a = x \ \wedge \ y = \lim(f \circ a)\right\}. \tag{1.154}$$

Ekkor nyilván $f \subseteq g$.
5. Végül igazoljuk, hogy $g$ egyenletesen folytonos. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $f$ egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x_1, x_2 \in X$ pontra $d_1(x_1, x_2) < \delta$ esetén $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $x_1, x_2 \in \overline{X}$ olyan, hogy $d_1(x_1, x_2) < \delta$. Most legyen $a, b : \mathbb{N} \to X$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x_1$ és $\lim b = x_2$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ közös küszöbindex, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$d_1(a_n, x_1) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} \quad \text{és} \quad d_1(b_n, x_2) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2}. \tag{1.155}$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén

$$d_1(a_n, b_n) \leq d_1(a_n, x_1) + d_1(x_1, x_2) + d_1(x_2, b_n) < \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} + d_1(x_1, x_2) + \frac{\delta - d_1(x_1, x_2)}{2} = \delta. \tag{1.156}$$

Tehát minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d_2(f(a_n), f(b_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$, amiből az $n \to \infty$ határátmenet után a (1.48) tétel alapján

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{1.157}$$

adódik.

**1.27. Definíció.** Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $X$ halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f : M \twoheadrightarrow X$ függvény *sűrűn értelmezett*, ha $\overline{\operatorname{Dom} f} = M$.

**1.63. Tétel.** *(Egyenletesen folytonos függvény kiterjesztése.) Legyen $(M_1, d_1)$ metrikus tér, $(M_2, d_2)$ teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett, egyenletesen folytonos függvény. Ekkor létezik egyetlen olyan folytonos $g : M_1 \to M_2$ függvény, mely az $f$ függvény kiterjesztése, azaz $f \subseteq g$, valamint a $g$ függvény is egyenletesen folytonos.*

***Bizonyítás.*** A (1.62) tétel alapján nyilvánvaló.

**1.28. Definíció.** Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér. Az $f : M \twoheadrightarrow M'$ függvény *izometria*, ha minden $x, y \in \operatorname{Dom} f$ esetén $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ teljesül. Az $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér *izometrikusan homeomorf*, ha létezik $f : M \to M'$ izometrikus homeomorfizmus.

**1.64. Tétel.** *Minden izometria egyenletesen folytonos.*

***Bizonyítás.*** Az izometria definíciója alapján nyilvánvaló.

**1.65. Tétel.** *(Izometria kiterjesztése.) Legyen $(M_1, d_1)$ metrikus tér, $(M_2, d_2)$ teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. Ekkor az $f$ függvény folytonos $g : M_1 \to M_2$ kiterjesztése is izometria.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1, d_1)$ metrikus tér, $(M_2, d_2)$ teljes metrikus tér és $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria. A (1.63) tétel alapján az $f$ függvénynek létezik $g : M_1 \to M_2$ egyenletesen folytonos kiterjesztése. Legyen $x, y \in M_1$ tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $a, b : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} f$ sorozat, melyre $\lim a = x$ és $\lim b = y$ teljesül. A (1.48) tétel alapján

$$d_2(g(x), g(y)) = \lim_{n\to\infty} d_2(g(a_n), g(b_n)) = \lim_{n\to\infty} d_2(f(a_n), f(b_n)). \tag{1.158}$$

Mivel $f$ izometria, ezért

$$d_2(g(x), g(y)) = \lim_{n\to\infty} d_1(a_n, b_n), \tag{1.159}$$

amiből a (1.49) tétel akapján

$$d(g(x), g(y)) = d(x, y) \tag{1.160}$$

következik.

## 1.14. Kontrakciók

**1.29. Definíció.** Legyen $(M_1, d_1)$ és $(M_2, d_2)$ metrikus tér, valamint $f : M_1 \to M_2$ függvény. Azt mondjuk, hogy az *$f$ függvény kontrakció*, ha

$$\exists C \in [0, 1[ \forall x, y \in \operatorname{Dom} f : \quad \Big(d_2(f(x), f(y)) \leq C d_1(x, y)\Big). \tag{1.161}$$

A $C$ számot gyakran *kontrakciós együtthatónak* nevezik.

**1.66. Tétel.** *Minden kontrakció folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ metrikus tér és $f : M_1 \to M_2$ kontrakció a $C \in [0, 1[$ kontrakciós együtthatóval. Legyen $x \in M_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ha $y \in B_\varepsilon(x)$, akkor

$$d_2(f(x), f(y)) \leq Cd_1(x, y) < d_1(x, y) < \varepsilon, \tag{1.162}$$

vagyis $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, amiből $f(B_\varepsilon(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ következik. Ez viszont éppen az $f$ függvény $x$ pontbeli folytonosságát jelenti.

**1.67. Tétel.** *(Banach-féle fixponttétel.) Legyen $(M, d)$ teljes metrikus tér, és $f : M \to M$ kontrakció. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in M$ pont melyre $f(y) = y$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ teljes metrikus tér, $f : M \to M$ kontrakció a $C \in ]0, 1[$ kontrakciós együtthatóval és $a$ tetszőleges pont. (Feltehető, hogy $C > 0$ teljesül, hiszen ha $C_1$ a kontrakciós együtthatója a függvénynek, akkor bármely $C \in [C_1, 1[$ szám is kontrakciós együtthatója.) Az egyszerű rekurzió tétele alapján létezik olyan $x : \mathbb{N} \to M$ sorozat, melyre $x_0 = a$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_{n+1} = f(x_n)$ teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq Cd(x_{n+1}, x_n) \tag{1.163}$$

teljesül, ezért teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C^n d(x_1, x_0). \tag{1.164}$$

Ennek felhasználásával az adódik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ $m > n$ számra

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} C^i d(x_1, x_0) = C^n \frac{1 - C^{m-n}}{1 - C} d(x_1, x_0) < C^n \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1 - C} \tag{1.165}$$

teljesül. Mivel az $n \mapsto C^n \cdot \dfrac{d(x_1, x_0)}{1 - C}$ sorozat határértéke nulla, ezért $x$ Cauchy-sorozat. Legyen $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ekkor az $f$ folytonossága alapján

$$f(y) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = y, \tag{1.166}$$

vagyis $y$ fixpontja az $f$ függvénynek.
Tegyük fel, hogy $y_1, y_2 \in M$ az $f$ függvény két különböző fixpontja. Ekkor az

$$d(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2)) \leq Cd(y_1, y_2) \tag{1.167}$$

egyenlőtlenségből a $1 \leq C$ ellentmondás adódik.

## 1.15. Halmazok szétválasztása

**1.30. Definíció.** Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $A$ halmaz *átmérője*

$$\operatorname{diam}(A) \triangleq \begin{cases} \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}, & \text{ha} \quad A \neq \emptyset; \\ 0, & \text{ha} \quad A = \emptyset. \end{cases} \tag{1.168}$$

**1.68. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. Az $A$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha* $\mathrm{diam}(A) < \infty$.

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$.
Ha $A$ korlátos, akkor létezik olyan $z \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $A \subseteq B_r(z)$ teljesül. Ekkor minden $x, y \in A$ esetén

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < 2r, \tag{1.169}$$

vagyis

$$\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y) \le 2r < \infty. \tag{1.170}$$

Most tegyük fel, hogy $\mathrm{diam}(A) = R < \infty$ és legyen $z \in A$ tetszőleges pont. Ha $x \in A$, akkor az $d(x,z) \le \mathrm{diam}(A) = R < R+1$ egyenlőtlenség alapján $x \in B_{R+1}(z)$. Ezzel megmutattuk, hogy $A \subseteq B_{R+1}(z)$ teljesül, vagyis az $A$ halmaz korlátos.

**1.31. Definíció.** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$. Ekkor az $A$ *halmaztól való távolság függvénye*

$$\mathrm{dist}_A : M \to \mathbb{R} \qquad z \mapsto \inf_{x \in A} d(z,x). \tag{1.171}$$

**1.69. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz. Ekkor*

1. *minden $x, y \in M$ esetén*

$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \le d(x,y) \tag{1.172}$$

*teljesül;*

2. *a $\mathrm{dist}_X$ függvény folytonos;*
3. $\overline{A} = \{z \in M \mid \mathrm{dist}_A(z) = 0\}$.

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$ nem üres halmaz.
1. Legyen $x, y \in M$ és $z \in A$ tetszőleges elem. Ekkor

$$dist_A(x) \le d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z), \tag{1.173}$$

vagyis

$$\mathrm{dist}_A(x) - d(x,y) \le d(y,z). \tag{1.174}$$

Mivel ez az egyenlőtlenség minden $z \in A$ elemre fennáll, ezért

$$\mathrm{dist}_A(x) - d(x,y) \le \inf_{z \in A} d(y,z) = \mathrm{dist}_A(y), \tag{1.175}$$

amiből átrendezéssel

$$\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y) \le d(x,y) \tag{1.176}$$

adódik. Ebből az $x$ és az $y$ pontok cseréjével

$$\mathrm{dist}_A(y) - \mathrm{dist}_A(x) \le d(x,y) \tag{1.177}$$

adódik, vagyis

$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \le d(x,y). \tag{1.178}$$

2. Legyen $x \in M$ rögzített. Megmutatjuk, hogy a $\mathrm{dist}_A$ függvény folytonos az $x$ pontban. Mivel minden $y \in M$ esetén

$$|\mathrm{dist}_A(x) - \mathrm{dist}_A(y)| \le d(x,y), \tag{1.179}$$

ezért az $y \to x$ határátmenettel

$$\lim_{y\to x} \mathrm{dist}_A(y) = \mathrm{dist}_A(x) \tag{1.180}$$

adódik, ami a 1.47 tétel alapján garantálja a $\mathrm{dist}_A$ függvény $x$ pontbeli folytonosságát.
3. Mivel a $\mathrm{dist}_A$ függvény folytonos, ezért a $B = \{z \in M \mid \mathrm{dist}_A(z) = 0\}$ halmaz zárt, hiszen a zárt $\{0\}$ halmaz folytonos függvény általi őesképe ($B = \overset{-1}{\mathrm{dist}_A}(\{0\})$), továbbá a $\mathrm{dist}_A$ definíciója alapján $A \subseteq B$ nyilván teljesül, ezért $\overline{A} \subseteq B$. Tehát azt kell még megmutatni, hogy $B \subseteq \overline{A}$, vagy ami ezzel ekvivalens $M \setminus \overline{A} \subseteq M \setminus B$. Ennek igazolásához legyen $x \in M \setminus \overline{A}$. Mivel $M \setminus \overline{A}$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq M \setminus \overline{A}$, vagyis $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Tehát minden $z \in A$ esetén $d(x, z) \geq r$, ezért

$$\mathrm{dist}_A(x) = \inf_{z\in A} d(x, z) \geq r, \tag{1.181}$$

vagyis $\mathrm{dist}_A(x) \neq 0$, ebből pedig $x \notin B$ és $x \in M \setminus B$ következik.

A *topologikus terek* elméletében fontos szerepet kap az alábbi tétel, mely azt mutatja meg, hogy minden metrikus tér *normális, Hausdorff-féle topologikus tér.*

**1.70. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $X, Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.*

1. *Létezik olyan $f : M \to [0, 1]$ folytonos függvény, hogy minden $x \in X$ esetén $f(x) = 0$, és minden $y \in Y$ esetén $f(y) = 1$.*
2. *Létezik $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, hogy $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M, d)$ metrikus tér és $X, Y \subseteq M$ olyan zárt halmazok, melyekre $X \cap Y = \emptyset$ teljesül.
1. A $\mathrm{dist}_X + \mathrm{dist}_Y : M \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, továbbá ha valamilyen $z \in M$ pontra

$$(\mathrm{dist}_X + \mathrm{dist}_Y)(z) = 0 \tag{1.182}$$

teljesülne, akkor abból $\mathrm{dist}_X(z) = \mathrm{dist}_Y(z) = 0$ következne, amiből a 1.69 tétel alapján $z \in \overline{X}$ és $z \in \overline{Y}$ adódna; az $X$ és $Y$ halmaz zártsága miatt ez azt jelentené, hogy $z \in X \cap Y$, vagyis az $X \cap Y \neq \emptyset$ ellentmondás adódna. Ezért $\mathrm{dist}_X + \mathrm{dist}_Y : M \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Legyen $f = \dfrac{\mathrm{dist}_X}{\mathrm{dist}_X + \mathrm{dist}_Y}$.
Ekkor egyszerű számolással adódik, hogy az $f$ függvény eleget tesz a feltételeknek.
2. Legyen $f$ olyan függvény melynek létezését bizonyítottuk az 1. pontban, továbbá legyen

$$U = \overset{-1}{f}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right) \quad \text{és} \quad V = \overset{-1}{f}\left(\left]\frac{1}{2}, \infty, \right[\right). \tag{1.183}$$

Az $f$ függvény folytonossága és a folytonosság topologikus jellemzése miatt $U$ és $V$ nyílt halmaz, valami a konstrukció folytán nyilvánvaló, hogy eleget tesz az $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$ és $U \cap V = \emptyset$ követelményeknek.

## 1.16. Metrikus tér teljessé tétele

**1.71. Tétel.** *Legyen $(M, d)$ metrikus tér.*

1. *Létezik olyan $(M', d')$ teljes metrikus tér és $j : M \to M'$ izometria, melyre $\overline{\mathrm{Ran}\, j} = M'$ teljesül.*
2. *Ha $(M_1, d_1)$ és $(M_2, d_2)$ teljes metrikus tér, valamint $j_1 : M \to M_1$ és $j_2 : M \to M_2$ olyan izometria, melyre $\overline{\mathrm{Ran}\, j_1} = M_1$ és $\overline{\mathrm{Ran}\, j_2} = M_2$, akkor létezik egyetlen olyan $\varphi : M_1 \to M_2$ izometrikus homeomorfizus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér.
1. Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathbb{N}\to M$ Cauchy-sorozatok halmaza, azaz

$$\mathcal{M}=\left\{a:\mathbb{N}\to M|\ \forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}\forall n,m\in\mathbb{N}:(N<n,m\ \to\ d(a_n,a_m)<\varepsilon)\right\}. \tag{1.184}$$

Megmutatjuk, hogy minden $a,b\in\mathcal{M}$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}d(a_n,b_n)$ határérték. Válaszunk $a,b\in\mathcal{M}$ tetszőleges elemet és tekintsük az

$$\eta:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\qquad n\mapsto d(a_n,b_n) \tag{1.185}$$

sorozatot, melyről elég megmutatni, hogy Cauchy-sorozat, hiszen a valós számok halmazában minden Cauchy-sorozat konvergens. Legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $m,n\in\mathbb{N}$ természetes számra $N<m,n$ esetén

$$d(a_n,a_m)<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\text{és}\qquad d(b_n,b_m)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.186}$$

Ha $m,n\in\mathbb{N}$ és $N<m,n$, akkor

$$d(a_n,b_n)\le d(a_n,a_m)+d(a_m,b_m)+d(b_m,b_n), \tag{1.187}$$

aminek átrendezéséből

$$d(a_n,b_n)-d(a_m,b_m)\le d(a_n,a_m)+d(b_m,b_n)<\varepsilon, \tag{1.188}$$

adódik, valamint az $m$ és $n$ betűk cseréje után

$$|\eta_n-\eta_m|=|d(a_n,b_n)-d(a_m,b_m)|\le d(a_n,a_m)+d(b_m,b_n)<\varepsilon \tag{1.189}$$

következik, ami igazolja, hogy $\eta$ valóban Cauchy-sorozat.
2. Definiáljuk az $\sim$ relációt az $\mathcal{M}$ halmazon az alábbi módon.

$$\sim=\left\{(a,b)\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}|\lim_{n\to\infty}d(a_n,b_n)=0\right\} \tag{1.190}$$

Vagyis $a,b\in\mathcal{M}$ esetén $a\sim b$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\lim_{n\to\infty}d(a_n,b_n)=0. \tag{1.191}$$

A $\sim$ reláció nyilván reflexív és szimmetrikus, a tranzitivitása pedig a minden $a,b,c\in\mathcal{M}$ elemre és a minden $n\in\mathbb{N}$ számra érvényes

$$0\le d(a_n,c_n)\le d(a_n,b_n)+d(b_n,c_n) \tag{1.192}$$

egyenlőtlenségből következik. Vagyis $\sim$ ekvivalenciareláció.
3. Most megmutatjuk, hogy ha $a,b,c,d\in\mathcal{M}$ olyanok, hogy $a\sim b$ és $c\sim d$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}d(a_n,c_n)=\lim_{n\to\infty}d(b_n,d_n). \tag{1.193}$$

Ehhez legyen $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $a\sim b$ és $c\sim d$, ezért létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ közös küszöbindex, hogy minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ számra $d(a_n,b_n)<\frac{\varepsilon}{2}$ és $d(c_n,d_n)<\frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$, $N<n$ esetén az

$$d(a_n,c_n)\le d(a_n,b_n)+d(b_n,d_n)+d(d_n,b_n) \tag{1.194}$$

egyenlőtlenség átrendezéséből

$$d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n) \leq d(a_n, b_n) + d(d_n, b_n) \tag{1.195}$$

adódik, amiből $a, b$ és $c, d$ felcserélésével

$$|d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n)| \leq d(a_n, b_n) + d(d_n, b_n) < \varepsilon \tag{1.196}$$

következik. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} |d(a_n, c_n) - d(b_n, d_n)| = 0$, amiből már adódik az (1.193) egyenlet.

4. Legyen $M' = \mathcal{M}/\sim$. A 3. pont alapján értelmezhető a $d' : M' \times M' \to \mathbb{R}_0^+$ függvény úgy, hogy minden $a', b' \in M'$ esetén válasszunk $a \in a'$, $b \in b'$ elemet, és legyen $d'(a', b') = \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$. Vagy másképp

$$d' : M' \times M' \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (a', b') \mapsto \sup\left\{\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) | a \in a', b \in b'\right\}, \tag{1.197}$$

ahol a sup műveletre azért van szükség, hogy az egyetlen számot tartalmazó halmazból számot képezzen. A $d'$ függvényről egyszerűen megmutatható, hogy metrika, tehát $(M', d')$ metrikus tér.

5. Minden $x \in M$ esetén jelölje $\tilde{x}$ a konstans $x$ sorozatot (mely nyilván Cauchy-sorozat), és legyen $x' = \tilde{x}/\sim$, valamint

$$j : M \to M' \qquad x \mapsto x'. \tag{1.198}$$

Minden $x, y \in M$ esetén $\tilde{x} \in x'$ és $\tilde{y} \in y'$, ezért

$$d'(x', y') = \lim_{n\to\infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y), \tag{1.199}$$

vagyis $j$ izometria.

6. Legyen $x \in M'$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $a \in x$ tetszőleges Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ számra $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $y$ a konstans $a_{N+1}$ sorozat ekvivalenciaosztálya, azaz $y = \widetilde{a_{N+1}}/\sim$. Ekkor nyilván $y \in \operatorname{Ran} j$. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $d(a_n, a_{N+1}) < \frac{\varepsilon}{2}$, ezért

$$d'(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{N+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{1.200}$$

Ez azt jelenti, hogy $B_\varepsilon(x) \cap \operatorname{Ran} j \neq \emptyset$, tehát $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$.

7. Most igazoljuk, hogy az $(M', d')$ metrikus tér teljes. Legyen $x : \mathbb{N} \to M'$ tetszőleges Cauchy-sorozat. Az előző pont alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\operatorname{Ran} j) \cap B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n) \neq \emptyset$, ezért $\overset{-1}{j}\left(B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n)\right) \neq \emptyset$, amiből

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{j}\left(B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n)\right) \neq \emptyset \tag{1.201}$$

következik. Legyen $a \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{j}\left(B^{d'}_{\frac{1}{n+1}}(x_n)\right)$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $a_n \in M$ olyan elem, melyre $d'(j(a_n), x_n) < \dfrac{1}{n+1}$ teljesül. Megmutatjuk, hogy $a$ Cauchy-sorozat. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $N_1 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_1 < n$ esetén $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{3}$, valamint $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N_2 < n, m$ esetén $d'(x_n, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Képezzük az $N = \max\{N_1, N_2\}$ számot. Ekkor minden $n, m \in \mathbb{N}$, $N < n, m$ esetén

$$d(a_n, a_m) = d'(j(a_n), j(a_m)) \leq d'(j(a_n), x_n) + d'(x_n, x_m) + d'(x_m, j(a_m)) < \tag{1.202}$$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m+1} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \tag{1.203}$$

vagyis $a$ Cauchy-sorozat. Legyen $z = a/\sim$, vagyis $z$ az $a$ elem által meghatározott ekvivalenciaosztály, tehát $z \in M'$.
Megmutatjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ teljesül. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $a$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_1 < n, m$ természetes számra $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N_2 < n$ számra $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tekintsük az $N = \max\{N_1, N_2\}$ számot. Ha $n \in \mathbb{N}$, $N < n$, akkor

$$d'(x_n, z) \leq d'(x_n, j(a_n)) + d'(j(a_n), z) < \frac{1}{n+1} + \lim_{m\to\infty} d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{1.204}$$

vagyis $\lim_{n\to\infty} d'(x_n, z) = 0$.
8. Most legyen $(M_1, d_1)$, $(M_2, d_2)$ olyan teljes metrikus tér, melyekhez létezik olyan $j_1 : M \to M_1$, $j_2 : M \to M_2$ izometria, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j_1} = M_1$ és $\overline{\operatorname{Ran} j_2} = M_2$. Legyen $f : \operatorname{Ran} j_1 \to M_2$, $f = j_2 \circ j_1^{-1}$. Ekkor $f : M_1 \twoheadrightarrow M_2$ sűrűn értelmezett izometria, ezért a (1.65) tétel alapján létezik egyetlen folytonos $\varphi : M_1 \to M_2$ kiterjesztése, mely szintén izometria. Mivel $f \circ j_1 = j_2$, ezért $\varphi \circ j_1 = j_2$. Megcserélve az $(M_1, j_1)$ és $(M_2, j_2)$ szerepét az adódik, hogy létezik olyan folytonos $\varphi' : M_2 \to M_1$ izometria, mely az $f' : \operatorname{Ran} j_2 \to M_1$, $f' = j_1 \circ j_2^{-1}$ kiterjesztése és melyre $\varphi' \circ j_2 = j_1$ teljesül. Ekkor

$$\varphi \circ j_1 \circ j_2^{-1} = j_2 \circ j_2^{-1} = \mathrm{id}_{\operatorname{Ran} j_2} \tag{1.205}$$
$$(\varphi \circ \varphi')|_{\operatorname{Ran} j_2} = \mathrm{id}_{M_2}|_{\operatorname{Ran} j_2} \tag{1.206}$$

miatt az egyenlőség folytatásának az elve ((1.53) tétel) alapján $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{M_2}$. Szerepcserével pedig $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{M_1}$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $\varphi$ bijekció, valamint $\varphi^{-1} = \varphi'$ miatt $\varphi^{-1}$ is folytonos. Tehát olyan $\varphi$ izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = \varphi \circ j_1$ teljesül.
9. Az előbbi jelölések mellett tegyük fel, hogy $\varphi_1, \varphi_2 : M_1 \to M_2$ olyan izometrikus homeomorfizmus, melyre $j_2 = \varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_1$ teljesül. Ekkor $\varphi_1|_{\operatorname{Ran} j_1} = \varphi_2|_{\operatorname{Ran} j_1}$, amiből az egyenlőség folytatásának az elve alapján $\varphi_1 = \varphi_2$ következik.

**1.32. Definíció.** Legyen $(M, d)$ metrikus tér. Minden $(M', d')$ teljes metrikus teret és $j : M \to M'$ izometriát, melyre $\overline{\operatorname{Ran} j} = M'$ teljesül, az $(M, d)$ *metrikus tér teljes burkának* nevezzük.

**1.72. Tétel.** *Minden metrikus térnek létezik teljes burka, és bármely két teljes burok izometrikusan homeomorf.*

***Bizonyítás.*** A (1.71) tétel alapján nyilvánvaló.

## 1.17. Metrikus terek szorzata

**1.73. Tétel.** *Ha $I$ véges halmaz és minden $i \in I$ esetén $(M_i, d_i)$ metrikus tér, akkor $M = \prod_{i\in I} M_i$ esetén*

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \max\{d_i(x_i, y_i) | i \in I\} \tag{1.207}$$

*metrika.*

***Bizonyítás.*** A metrika tulajdonságai egyszerűen igazolhatók.

**1.33. Definíció.** Legyen $I$ véges halmaz és minden $i \in I$ esetén $(M_i, d_i)$ metrikus tér. Az $M = \prod_{i \in I} M_i$ halmazból és a

$$d : M \times M \to \mathbb{R} \qquad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \max\{d_i(x_i, y_i) | i \in I\} \tag{1.208}$$

metrikából álló $(M, d)$ párt nevezzük az $(M_i, d_i)_{i\in I}$ *metrikus terek szorzatának.*

**Megjegyzés.** Legyen $n \in \mathbb{N}$ és minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $(M_k, d_k)$ metrikus tér. Jelölje $(M, d)$ az $(M_k, d_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ metrikus terek rendszerének a szorzatát. A $d$ definíciója alapján ekkor minden $x = (x_1, \ldots, x_n) \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r^d(x) = B_r^{d_1}(x_1) \times \cdots \times B_r^{d_n}(x_n) \tag{1.209}$$

teljesül.

$\lozenge$

**1.74. Tétel.** *Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere és $(M, d)$ ezek szorzata. Ekkor minden $j \in I$ esetén a*

$$\mathrm{pr}_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j \qquad (x_i)_{i\in I} \mapsto x_j \tag{1.210}$$

*projekció folytonos és nyílt.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere és $(M, d)$ ezek szorzata, valamint $j \in \{1, \ldots, n\}$ tetszőleges index.
Legyen $U \subseteq M_j$ tetszőleges nyílt halmaz és $\Omega = \overset{-1}{\mathrm{pr}_j}(U)$. A projekció értelmezése alapján

$$\Omega = M_1 \times \cdots \times M_{j-1} \times U \times M_{j+1} \cdots \times M_n, \tag{1.211}$$

amiről megmutatjuk, hogy nyílt halmaz. Ha $x \in \Omega$, akkor $x_j \in U$, tehát van olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy $B_r(x_j) \in U$, ekkor viszont

$$B_r^d(x) = B_r^{d_1}(x_1) \times \cdots \times B_r^{d_n}(x_n) \tag{1.212}$$

miatt $B_r^d(x) \subseteq \Omega$. Tehát minden nyílt halmaz képe nyílt, ezért a folytonosság topologikus jellemzése alapján $\mathrm{pr}_j$ folytonos.
Most legyen $\Omega \subseteq M$ tetszőleges nyílt halmaz és $x \in \mathrm{pr}_j(\Omega)$. Az $\Omega \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}_j}(x) \neq \emptyset$ miatt válszthatunk $t \in \Omega \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}_j}(x)$ elemet. Ekkor $t \in \Omega$ és $\mathrm{pr}_j(t) = x$, vagy másképp $t_j = x$. Mivel $\Omega$ nyílt, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(t) \subseteq \Omega$. Ekkor $\mathrm{pr}_j(B_r(t)) \subseteq \mathrm{pr}_j(\Omega)$ és a (1.212) képlet alapján

$$B_r(x) = B_r(t_j) = \mathrm{pr}_j(B_r(t)) \subseteq \mathrm{pr}_j(\Omega), \tag{1.213}$$

tehát $\mathrm{pr}_j(\Omega)$ nyílt halmaz, vagyis $\mathrm{pr}_j$ nyílt.

**1.75. Tétel.** *Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere, $(M, d)$ ezek szorzata és $a : \mathbb{N} \to M$ sorozat. Az $a$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens, és ekkor minden $i \in I$ indexre*

$$\mathrm{pr}_i(\lim a) = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a) \tag{1.214}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere, $(M, d)$ ezek szorzata, valamint $a : \mathbb{N} \to M$ tetszőleges sorozat.
Ha az $a$ sorozat konvergens, akkor legyen $x = \lim a$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ tetszőleges index, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $a$ konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra $d(a_n, x) < \varepsilon$. A szorzatmetrika értelmezése alapján ezért $d_i(\mathrm{pr}_i(a_n), \mathrm{pr}_i(x))\varepsilon$, vagyis $\lim(\mathrm{pr}_i \circ a) = \mathrm{pr}_i(\lim a)$.
Most tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a$ sorozat konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = (\lim(\mathrm{pr}_1 \circ a), \ldots, \lim(\mathrm{pr}_n \circ a)) \in M$. Minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén létezik olyan $N_i \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_i < n$ természetes számra $d_i(\mathrm{pr}_i\, a_n, x_i) < \varepsilon$. Legyen $N = \max\{N_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Ekkor a szorzatmetrika értelmezése alapján minden $N < n$ természetes számra $d(a_n, x) < \varepsilon$ teljesül, tehát $\lim a = x$, vagyis az $a$ sorozat konvergens.

**1.76. Tétel.** *Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere, $(M, d)$ ezek szorzata, $(M', d')$ metrikus tér és $f : M' \to M$ függvény.*

1. *Az $f$ függvény pontosan akkor folytonos az $a \in \mathrm{Dom}\, f$ pontban, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f : M' \to M_i$ függvény folytonos az $a$ pontban.*
2. *Az $f$ függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_i, d_i)_{i\in I}$ metrikus terek véges rendszere, $(M, d)$ ezek szorzata, $(M', d')$ metrikus tér és $f : M' \to M$ függvény.
Legyen $a \in \mathrm{Dom}\, f$ tetszőleges pont. Tegyük fel, hogy $f$ folytonos az $a$ pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és $i \in I$ tetszőleges index. Ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}\, f$ pontra $d'(x, a) < \delta$ esetén $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ teljesül. A szorzatmetrika értelmezése alapján ekkor

$$\forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \; d'(x, a) < \delta \; \to d((\mathrm{pr}_i \circ f)(x), (\mathrm{pr}_i \circ f)(a)) < \varepsilon \tag{1.215}$$

teljesül, vagyis a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos az $a$ pontban.
Legyen $a \in \mathrm{Dom}\, f$ tetszőleges pont. Tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ f$ függvény folytonos az $a$ pontban. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén létezik olyan $\delta_i \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathrm{Dom}\, a$ pontra

$$d'(a, x) < \delta_i \quad \to \quad d_i((\mathrm{pr}_i \circ f)(x), \mathrm{pr}_i(f(a))) < \varepsilon. \tag{1.216}$$

Legyen $\delta = \min\{\delta_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Ekkor a szorzatmetrika értelmezése alapján $x \in \mathrm{Dom}\, a$ pontra $d'(a, x) < \delta$ esetén $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, tehát az $f$ függvény folytonos az $a$ pontban.
A 2. pont egyszerűen adódik az 1. pont minden $a \in \mathrm{Dom}\, f$ elemre való alkalmazásából.

**1.77. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere és $(M, d)$ ezek szorzata. Minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz és legyen $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$. Ekkor a $K$ halmaz kompakt az $M$ metrikus térben.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ metrikus terek véges rendszere és $(M, d)$ ezek szorzata. Minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén legyen $K_i \subseteq M_i$ kompakt halmaz és legyen $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$.
Az $n = 1$ esetben nyilvánvaló az állítás.
A teljes indukció módszerét használva tegyük fel, hogy az $(n-1) \in \mathbb{N}^+$ számra igaz az állítás. Ehhez legyen $(E, d_E)$ az $(M_i, d_i)_{i\in\{1,\ldots,n-1\}}$ terek szorzata és $K_E = \prod_{i=1}^{n-1} K_i$. Ekkor $K = K_E \times K_n$.
Legyen $c : \mathbb{N} \to K$ tetszőleges sorozat. Ekkor $\mathrm{pr}_1 \circ c : \mathbb{N} \to K_E$ sorozat az $(E, d_E)$ metrikus térben,

vagyis a teljes indukciós feltevés miatt $\mathrm{pr}_1 \circ c$ kompakt halmazban haladó sorozat, ezért a 1.33 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján létezik konvergens részsorozata, melynek a határértéke benne van a $K_E$ halmazban; vagyis létezik olyan $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, hogy $(\mathrm{pr}_1 \circ c) \circ \sigma_1$ konvergens és határértéke eleme a $K_E$ halmaznak. A $\mathrm{pr}_2 \circ (c \circ \sigma_1) : \mathbb{N} \to K_n$ sorozat is kompakt halmazban halad, ezért ennek is létezik konvergens részsorozata, vagyis létezik olyan $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, hogy $(\mathrm{pr}_2 \circ (c \circ \sigma_1)) \circ \sigma_2$ konvergens és $\lim(\mathrm{pr}_2 \circ (c \circ \sigma_1) \circ \sigma_2) \in K_n$. Ekkor a $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ indexsorozat olyan, hogy a $c \circ \sigma$ sorozat első és második komponense is konvergens, ami a $d$ metrika értelmezése alapján azt jelenti, hogy a $c \circ \sigma : \mathbb{N} \to K$ sorozat konvergens, és a határértéke nyilvánvaló módon benne van a $K$ halmazban.
Tehát a $K$ halmaz rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden benne haladó sorozatnak létezik olyan konvergens részsorozata, melynek a határértéke eleme a $K$ halmaznak, ezért a 1.33 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján a $K$ halmaz kompakt.

## 1.18. Véges dimenziós terek kompakt részhalmazai

**1.78. Tétel.** *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[$ és $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$. Az $(\mathbb{R}^k, d_p)$ vagy $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$ térben pontosan akkor konvergens az a sorozat, ha minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén a $\mathrm{pr}_i \circ a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens. Ekkor a $c_i = \lim(\mathrm{pr}_i \circ a)$ számokból képzett $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ elemre $\lim a = c$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, \infty[$ és tekintsük az $(\mathbb{R}^k, d_p)$ és az $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$ metrikus tereket. Mivel a 1.15 állítás miatt a $d_p$ és $d_\infty$ metrikák ekvivalensek, ezért elég az állítást a $d_\infty$ metrikára megmutatni. A (1.65) tétel alapján viszont nyilvánvaló az állítás a $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$ metrikus térre.

**1.79. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint legyen minden $i = 1, \dots n$ esetén $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $a_i \le b_i$. Ekkor a $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ halmaz kompakt az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ metrikus térben.*

***Bizonyítás.*** A valós számokra vonatkozó Borel–Lebesgue-tétel alapján minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ számra $[a, b]$ kompakt halmaz a valós számok halmazában.
Innentől viszont a (1.77) tétel miatt igaz az állítás.

**1.80. Tétel.** *(Heine–Borel-tétel.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$.*

1. *A $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ metrikus tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*
2. *A $(\mathbb{R}^n, d_p)$ metrikus tér egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ metrikus tér egy kompakt részhalmaza, akkor $K$ a (1.27) tétel alapján korlátos és zárt.
Most tegyük fel, hogy $K \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz. A $K$ halmaz korlátossága miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, hogy $K \subseteq B_R(0)$ teljesül. Ekkor a $d_\infty$ definíciója alapján $K \subseteq \prod_{i=1}^{n} [-R, R]$. Az (1.79) tétel alapján $\prod_{i=1}^{n} [-R, R]$ kompakt halmaz és $K$ ennek zárt részhalmaza, tehát az (1.27) tétel alapján $K$ kompakt.
Mivel a $d_p$ és a $d_\infty$ metrikák ekvivalensek az (1.15) tétel alapján, ezért ezekben a terekben ugyanazok a kompakt halmazok.

**1.81. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. Az $(\mathbb{R}^n, d_p)$ és az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ terek lokálisan kompaktak.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. Minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\overline{B_1(x)}$ korlátos és zárt környezete az $x$ pontnak, vagyis a 1.80 Heine–Borel-tétel alapján kompakt környezete az $(\mathbb{R}^n, d_p)$ és az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ metrikus térben.

## 1.19. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok

**1.34. Definíció.** Legyen $(M,d)$ metrikus tér, és $A \subseteq M$.
- Az *$A$ halmaz összefüggő*, ha nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül.
- Az *$M$ metrikus tér összefüggő*, ha az $M$ halmaz összefüggő.
- Az *$A$ halmaz ívszerűen összefüggő*, ha minden $x, y \in A$ esetén létezik olyan $\gamma : [0,1] \to A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
- Az *$M$ metrikus tér ívszerűen összefüggő*, ha az $M$ halmaz ívszerűen összefüggő.

**1.82. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$.*
1. *Az $A$ halmaz pontosan akkor összefüggő, ha az $(A, d|_{A\times A})$ altér összefüggő.*
2. *Az $A$ halmaz pontosan akkor ívszerűen összefüggő, ha az $(A, d|_{A\times A})$ altér ívszerűen összefüggő.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$.
1. Legyen $d' = d|_{A\times A}$ és minden $B \subseteq A$ esetén jelölje $\overline{B}$ a $B$ halmaz lezártját az $(M,d)$ metrikus térben, és $\widetilde{B}$ a $B$ halmaz lezártját az $(A,d')$ metrikus térben.
Legyen az $A$ halmaz összefüggő az $(M,d)$ térben, és indirekt módon tegyük fel, hogy az $(A,d')$ tér nem összefüggő. Ekkor létezik olyan $U, V \subseteq A$ halmaz, melyekre

$$U \neq \emptyset \quad V \neq \emptyset \quad \widetilde{U} \cap V = U \cap \widetilde{V} = \emptyset \quad U \cup V = A \tag{1.217}$$

teljesül. Ekkor a 1.14 tétel alapján $\widetilde{U} = \overline{U} \cap A$ és $\widetilde{V} = \overline{V} \cap A$, továbbá $U \subseteq A$, $V \subseteq A$ miatt $U \cap A = U$, $A \cap V = V$, vagyis

$$\overline{U} \cap V = \overline{U} \cap (A \cap V) = (\overline{U} \cap A) \cap V = \widetilde{U} \cap V = \emptyset \tag{1.218}$$
$$U \cap \overline{V} = (U \cap A) \cap \overline{V} = U \cap (A \cap \overline{V}) = U \cap \widetilde{V} = \emptyset. \tag{1.219}$$

Ebből azt az ellentmondást kaptuk, hogy az $A$ halmaz nem összefüggő az $(M,d)$ térben, vagyis az $(A,d')$ tér összefüggő.
Legyen az $(A,d')$ tér összefüggő és tegyük fel, hogy az $A$ halmaz nem összefüggő az $(M,d)$ térben. Ekkor létezik olyan $U, V \subseteq M$ halmaz, melyekre

$$U \neq \emptyset \quad V \neq \emptyset \quad \overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset \quad U \cup V = A \tag{1.220}$$

teljesül. Ekkor ismét a 1.14 tétel alapján $\widetilde{U} = \overline{U} \cap A$ és $\widetilde{V} = \overline{V} \cap A$, $\widetilde{U} \subseteq \overline{U}$ és $\widetilde{V} \subseteq \overline{V}$ vagyis

$$\widetilde{U} \cap V \subseteq \overline{U} \cap V = \emptyset \tag{1.221}$$
$$U \cap \widetilde{V} \subseteq U \cap \overline{V} = \emptyset. \tag{1.222}$$

Ebből azt az ellentmondást kaptuk, hogy az $(A,d')$ tér nem összefüggő, vagyis az $A$ halmaz összefüggő az $(M,d)$ térben.
2. Legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont és legyen $\gamma : [0,1] \to A$ olyan függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül. Csak azt kell meggondolni, hogy $\gamma$ pontosan akkor folytonos az $(M,d)$ téren, ha folytonos az $(A,d')$ téren. Ez azonban a folytonosság definíciójából és a $\operatorname{Ran}\gamma \subseteq A \subseteq M$ tartalmazásból rögtön adódik.

**1.83. Tétel.** *Minden ívszerűen összefüggő halmaz összefüggő.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér és $A \subseteq M$ ívszerűen összefüggő halmaz. Ha $A = \emptyset$, akkor $A$ összefüggő, ezért feltehetjük, hogy $A \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $A$ nem összefüggő és legyen $U, V \subseteq M$

olyan, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ és $A = U \cup V$ teljesül. Legyen $x \in U$ és $y \in V$ tetszőleges, és legyen $\gamma : [0,1] \to A$ egy olyan folytonos függvény, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül. Legyen

$$t_0 = \sup \{t \in [0,1] \mid \forall x \in [0,t[ : \gamma(x) \in U\}, \tag{1.223}$$

valamint legyen $z = \gamma(t_0)$. Mivel $z \in A$, ezért $z \in U$ vagy $z \in V$ teljesül.
Tegyük fel, hogy $z \in V$. Ekkor $z \notin \overline{U}$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap U = \emptyset$. A $\gamma$ függvény $t_0$ pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(t_0)$ esetén $\gamma(t) \in B_r(z)$ teljesül, azaz $\gamma(t) \notin U$. Ez viszont ellentmondásban van $t_0$ definíciójával, hiszen minden $x \in \left[0, t_0 - \frac{\delta}{2}\right[$ számra a $\gamma(x) \in U$ tartalmazásnak kellenne teljesülnie, ez viszont az $x = t_0 - \frac{3\delta}{4}$ számra biztosan nem teljesül.
Most tegyük fel, hogy $z \in U$. Ekkor $z \notin \overline{V}$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap V = \emptyset$. A $\gamma$ függvény $t_0$ pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(t_0)$ esetén $\gamma(t) \in B_r(z)$ teljesül, azaz $\gamma(t) \notin V$. Ez viszont ellentmondásban van a $t_0$ definíciójával, hiszen minden $x \in \left[0, t_0 + \frac{\delta}{2}\right[$ számra is $\gamma(x) \in U$ teljesül.

**1.84. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ metrikus tér. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az $M$ halmaz összefüggő.*
2. *Nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$.*
3. *Nem létezik olyan $X, Y \subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$ és $M = X \cup Y$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér.
1⇒2 Legyen $M$ összefüggő és tegyük fel, hogy létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $\overline{U} \cap V = \emptyset$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{U} \cap V$ elem. Ekkor a $V$ halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq V$ teljesül. Mivel $U \cap V = \emptyset$, ezért $B_r(x) \cap U = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $x \in \overline{U}$. Hasonlóan igazolható, hogy $U \cap \overline{V} = \emptyset$. Vagyis azt az ellentmondást kaptuk, hogy $M$ nem összefüggő. Tehát nem létezik olyan $U, V \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ és $M = U \cup V$ teljesül.
2⇒1 Ezt úgy mutatjuk meg, hogy igazoljuk a $\neg 1 \Rightarrow \neg 2$ következtetést. Tehát legyen $M$ nem összefüggő halmaz. Ekkor létezik olyan $A, B \subseteq M$ halmaz, hogy $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ és $A \cup B = M$ teljesül.
Legyen $U = M \setminus \overline{A}$ és $V = M \setminus \overline{B}$. Nyilván $U$ és $V$ nyílt halmaz. Megmutatjuk, hogy $U \cup V = M$. Ha nem így lenne, akkor létezne olyan $x \in M$ elem, melyre $x \notin U$ és $x \notin V$ teljesülne. Az $U$ és $V$ definíciója alapján ebből $x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B}$ következik.
Mivel $x \in M = A \cup B$, ezért $x \in A$ vagy $x \in B$.
Ha $x \in A$, akkor $x \in \overline{B}$ miatt az $x \in A \cap \overline{B} = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Ha $x \in B$, akkor $x \in \overline{A}$ miatt az $x \in \overline{A} \cap B = \emptyset$ ellentmondás adódik.
Tehát $U \cup V = M$ teljesül.
A $U$ és $V$ halmaz metszetére vonatkozó követelmény is teljesül az alábbiak szerint.

$$U \cap V = (M \setminus \overline{A}) \cap (M \setminus \overline{A}) = M \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) \subseteq M \setminus (A \cup B) = M \setminus M = \emptyset \tag{1.224}$$

Már csak azt kell igazolni, hogy $U \neq \emptyset$ és $V \neq \emptyset$. Ha $U = \emptyset$, akkor $\overline{A} = M$, amiből az

$$\emptyset = \overline{A} \cap B = M \cap B = B = \emptyset \tag{1.225}$$

ellentmondás adódik, tehát $U \neq \emptyset$. Hasonlóan megmutatható, hogy $V \neq \emptyset$.
2⇔3 Az alábbi ekvivalens lépések igazolják az állítást.

$$\exists U, V \subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre} \qquad U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset,\ M = U \cup V \ \Leftrightarrow \tag{1.226}$$

$$\Leftrightarrow \ \exists U,V\subseteq M \text{ nyílt halmaz, melyre } \left\{ \begin{array}{c} (M\setminus U)\neq\emptyset,\ (M\setminus V)\neq\emptyset, \\ (M\setminus U)\cap(M\setminus V)=\emptyset,\ M=(M\setminus U)\cup(M\setminus V) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \tag{1.227}$$

$$\Leftrightarrow \ \exists X,Y\subseteq M \text{ zárt halmaz, melyre } \quad X\neq\emptyset,\ Y\neq\emptyset,\ X\cap Y=\emptyset,\ M=X\cup Y \tag{1.228}$$

**1.85. Tétel.** *(Metrikus altér összefüggősége.) Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $A\subseteq M$ és $d'=d|_{A\times A}$. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az $A$ halmaz összefüggő az $(M,d)$ térben.*
2. *Az $(A,d')$ metrikus altér összefüggő.*
3. *Nem létezik olyan $U,V\subseteq M$ nyílt halmaz, melyre $U\cap A\neq\emptyset$, $V\cap A\neq\emptyset$, $U\cap V\cap A=\emptyset$ és $A\subseteq U\cup V$.*
4. *Nem létezik olyan $X,Y\subseteq M$ zárt halmaz, melyre $X\cap A\neq\emptyset$, $Y\cap A\neq\emptyset$, $X\cap Y\cap A=\emptyset$ és $A\subseteq X\cup Y$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ metrikus tér, $A\subseteq M$ és $d'=d|_{A\times A}$.
1.⇔2. A 1.82 tétel épp ezt az ekvivalenciát mondja ki.
2.⇒3. Igazoljuk a ¬3. ⇒ ¬2. következtetést. Legyen $U,V\subseteq M$ olyan nyílt halmaz, melyre $U\cap A\neq\emptyset$, $V\cap A\neq\emptyset$, $U\cap V\cap A=\emptyset$ és $A\subseteq U\cup V$ teljesül. Ekkor a 1.13 tétel alapján az $U'=U\cap A$ és $V'=V\cap A$ halmazok nyíltak az $(A,d')$ metrikus térben, és ezen nyílt halmazokra $U'\neq\emptyset$, $V'\neq\emptyset$, $U'\cap V'=\emptyset$ és $A=U'\cup V'$ teljesül. A 1.84 tétel alapján ezért az $(A,d')$ tér nem összefüggő.
3.⇒2. Igazoljuk a ¬2. ⇒ ¬3. következtetést. Ha $(A,d')$ nem összefüggő, akkor a 1.84 tétel alapján létezik olyan $U',V'\subseteq A$ nyílt halmaz az $(A,d')$ metrikus térben, melyre $U'\neq\emptyset$, $V'\neq\emptyset$, $U'\cap V'=\emptyset$ és $A=U'\cup V'$ teljesül. A 1.13 tétel alapján ekkor létezik olyan $U,V\subseteq M$ nyílt halmaz az $(M,d)$ metrikus térben, melyre $U'=U\cap A$ és $V'=V\cap A$. Ekkor $U\cap A\neq\emptyset$, $V\cap A\neq\emptyset$, $U\cap V\cap A=\emptyset$ és $A\subseteq U\cup V$.
3.⇔4. A 2.⇒3. illetve a 3.⇒2. bizonyításában a *nyílt* szót kicserélve a *zárt* szóra kapjuk a bizonyítást.

**1.86. Tétel.** *Legyen $(M,d)$ összefüggő metrikus tér és $A\subseteq M$ olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Ekkor $A=\emptyset$ vagy $A=M$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M,d)$ összefüggő metrikus tér és $A\subseteq M$ olyan halmaz, mely nyílt és zárt. Tegyük fel, hogy $A\neq\emptyset$ és $A\neq M$. Legyen $U=A$ és $V=M\setminus A$. Ebből azt az ellentmondást kapjuk, hogy az $M$ tér nem összefüggő. Ugyanis ekkor $U\neq\emptyset$, $V\neq\emptyset$, valamint $\overline{U}=U$ és $\overline{V}=V$ miatt $\overline{U}\cap V=U\cap\overline{V}=\emptyset$ teljesül, valamint $U\cup V=M$.

**1.87. Tétel.** *Legyen $(M_1,d_1)$ és $(M_2,d_2)$ metrikus tér, valamint legyen $A\subseteq M_1$ és $f:A\to M_2$ folytonos függvény.*

1. *Ha $A$ összefüggő, akkor $f(A)$ is összefüggő.*
2. *Ha $A$ ívszerűen összefüggő, akkor $f(A)$ is ívszerűen összefüggő.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(M_1,d_1)$ és $(M_2,d_2)$ metrikus tér, valamint legyen $A\subseteq M_1$ és $f:A\to M_2$ folytonos függvény.
1. Tegyük fel, hogy $A$ összefüggő és $B=f(A)$ nem összefüggő. Ekkor a 1.85 tétel alapján létezik olyan $U',V'\subseteq M_2$ nyílt halmaz, melyre $U'\cap B\neq\emptyset$, $V'\cap B\neq\emptyset$, $U'\cap V'\cap B=\emptyset$ és $B\subseteq U'\cup V'$ teljesül. A folytonosság topologikus jellemzéséről szóló 1.51 tétel alapján ekkor létezik olyan $U,V\subseteq M_1$ nyílt halmaz, melyre $\overset{-1}{f}(U')=U\cap A$ és $\overset{-1}{f}(V')=V\cap A$. Ekkor $U\cap A\neq\emptyset$, $V\cap A\neq\emptyset$, $U\cap V\cap A=\emptyset$ és $A\subseteq U\cup V$ teljesül, vagyis a 1.85 tétel alapján azt az ellentmondást kaptuk, hogy $A$ nem összefüggő.
2. Tegyük fel, hogy $A$ ívszerűen összefüggő és legyen $x',y'\in f(A)$ két tetszőleges pont. Ekkor létezik olyan $x,y\in A$, melyre $f(x)=x'$ és $f(y)=y'$. Mivel $A$ ívszerűen összefüggő, ezért létezik olyan $\gamma:[0,1]\to A$ folytonos függvény, melyre $\gamma(0)=x$ és $\gamma(1)=y$. Legyen $\gamma'=f\circ\gamma$. Ekkor $\gamma':[0,1]\to f(A)$ olyan folytonos függvény, melyre melyre $\gamma'(0)=x'$ és $\gamma'(1)=y'$ teljesül.

# 2 Normált terek

## 2.1. Normált terek topológiája

**2.1. Definíció.** A $V$ valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|x\| \tag{2.1}$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.
- $\forall x \in V: \ \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in V: \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Az $(V, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük, ha $V$ valós vagy komplex vektortér, és $\|\cdot\|$ norma a $V$ vektortéren.

Az állítások teljesen precíz kimondását néha megnehezíti az egyetlen nullvektorból álló $V = \{0\}$ normált tér speciális esete. Ezért a továbbiakban hallgatólagosan mindig feltesszük, hogy nem az egyetlen pontból álló normált térrel foglalkozunk.

**2.1. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x, y \in V$ esetén*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \tag{2.2}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in V$ tetszőleges. A norma tulajdonsága alapján

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \to \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \,, \tag{2.3}$$

az $x$ és $y$ szerepét felcserélve, és kihasználva, hogy $\|x - y\| = \|y - x\|$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \tag{2.4}$$

adódik. Vagyis

$$\pm \left(\|x\| - \|y\|\right) \leq \|x - y\| \,, \tag{2.5}$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

**2.2. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a*

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \|x - y\| \tag{2.6}$$

*leképezés metrika, így $(V, d_{\|\cdot\|})$ metrikus tér.*

***Bizonyítás.*** A norma definíciójából rögtön adódnak a metrikára megkövetelt tulajdonságok.

Tehát minden normált tér egyben metrikus tér is, így értelmezhető rajta minden olyan fogalom melyet metrikus téren értelmeztünk. Most a metrikus tereken bevezetett fogalmak jellemzését adjuk meg a norma segítségével.

**2.3. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Legyen $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Az $x$ középpontú $r$ sugarú nyílt gömb*

$$B_r(x) = \{y \in V | \ \|x - y\| < r\} \,. \tag{2.7}$$

*2. Az $X \subseteq V$ halmaz nyílt, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.*
*3. Az $X \subseteq V$ halmaz zárt, ha $V \setminus X$ nyílt.*
*4. Az $X \subseteq V$ halmaz korlátos, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in V$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** A normált téren bevezetett metrika definíciója alapján nyilvánvaló.

**2.4. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. A $\mathbb{K}^n$ téren a*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.8}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\} \tag{2.9}$$

*leképezések normák (melyet p-normának illetve* sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

***Bizonyítás.*** Egyedül a normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség nem adódik rögtön a definícióból. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges. Adott $p \in [1, \infty[$ esetén

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{2.10}$$

a Minkowski-egyenlőtlenség következménye. Mivel az $x, y$ vektor minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ komponensére $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ teljesül, ezért

$$\|x + y\|_\infty = \max\{|x_k + y_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\} \leq \max\{|x_k| + |y_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\} \leq \tag{2.11}$$

$$\leq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\} + \max\{|y_k| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty . \tag{2.12}$$

## 2.2. Sorok és sorozatok normált terekben

**2.5. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \to V$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat.*
*1. Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.*
*2. A $ca$ sorozat konvergens és $\lim(ca) = c(\lim a)$.*
*3. A $\lambda a$ sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.*
*4. Az $\|a\|$ sorozat konvergens és $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b : \mathbb{N} \to V$ és $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ konvergens sorozat az $A = \lim a$, a $B = \lim b$ és a $\Lambda = \lim \lambda$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.
1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$ és minden $n > N_b$ számra $\|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\|(a_n + b_n) - (A + B)\| \leq \|a_n - A\| + \|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.13}$$

2. A $c = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az $a$ sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Ekkor minden $n > N_a$ számra

$$\|ca_n - cA\| = |c| \cdot \|a_n - A\| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon. \tag{2.14}$$

3. Mivel a $\lambda$ sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|\lambda_n| < K$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2K}$ és legyen $N_\lambda \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_\lambda$ esetén $|\lambda_n - \Lambda| < \frac{\varepsilon}{2\|A\|}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\|\lambda_n a_n - \Lambda A\| = \|\lambda_n a_n - \lambda_n A + \lambda_n A - \Lambda A\| \leq |\lambda_n| \cdot \|a_n - A\| + \|A\| \cdot |\lambda_n - \Lambda| < \tag{2.15}$$

$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|A\|} = \varepsilon. \tag{2.16}$$

Ha $A = 0$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $\|a_n\| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ekkor

$$\|\lambda_n a_n - 0\| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon. \tag{2.17}$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \varepsilon$, akkor minden $n > N_a$ számra

$$|\|a_n\| - \|A\|| \leq \|a_n - A\| < \varepsilon. \tag{2.18}$$

**2.2. Definíció.** A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

**2.3. Definíció.** (*Sorok.*) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges sorozat.

– Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to V$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük, és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
– Azt mondjuk, hogy az $a$ sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{\triangle}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \lim \sum a$ jelölést használjuk.
– Azt mondjuk, hogy az $a$ sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
– Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

**2.6. Tétel.** *(A konvergencia szükséges feltétele.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor* $\lim a = 0$ *teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Ekkor az $n \mapsto \alpha_n$ és az $n \mapsto \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensek, és határértékük $A$. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n, \tag{2.19}$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0. \tag{2.20}$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

**2.7. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens.*

1. *Ha $V$ Banach-tér, akkor a $\sum a$ sor konvergens.*
2. *Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor*

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \,. \tag{2.21}$$

***Bizonyítás.*** 1. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \to V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Mivel a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon$. Ekkor minden $m, n > N$ természetes számra $m > n$ mellett

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon. \tag{2.22}$$

Vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért létezik $A = \lim \alpha$, vagyis létezik a $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ határérték.
2. Tegyük fel, hogy a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k\right\| \le \sum_{k=0}^{n} \|a_k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \,, \tag{2.23}$$

amiből az $n \to \infty$ határátmenettel adódik a bizonyítandó állítás.

**2.8. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. A $(V, \|\cdot\|)$ pár pontosan akkor Banach-tér, ha minden benne haladó abszolút konvergens sor konvergens.*

***Bizonyítás.*** A 2.7 tétel alapján minden abszolút konvergens sor konvergens Banach-térben. Ezért csak azt kell igazolnunk, hogy ha a $(V, \|\cdot\|)$ normált térben minden abszolút konvergens sor konvergens, akkor $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér.
Ehhez legyen $(V, \|\cdot\|)$ olyan normált tér, melyben minden abszolút konvergens sor konvergens. Legyen $a : \mathbb{N} \to V$ tetszőleges Cauchy-sorozat és $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre $\lim \alpha = 0$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$ teljesül. (Például az $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ sorozat ilyen.)
Az $n = 0$ esetben létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_0 < i, j$ természetes számra $\|a_i - a_j\| < \alpha_0$ teljesül. Ekkor legyen $\sigma_0 = N_0 + 1$.
Az $n = 1$ esetben létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N_1 < i, j$ természetes számra $\|a_i - a_j\| < \alpha_1$ teljesül. Ekkor legyen $\sigma(1) = \max\{\sigma_0, N_1\} + 1$.
Ha már valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $\sigma_n$ definiált, akkor vegyük azt az $N_{n+1} \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, melyre minden $N_{n+1} < i, j$ természetes számra $\|a_i - a_j\| < \alpha_{n+1}$ teljesül, és legyen

$$\sigma(n+1) = \max\{\sigma_n, N_{n+1}\} + 1. \tag{2.24}$$

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele alapján így előállíthatunk egy $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sorozatot, mely a konstrukció folytán indexsorozat.
Tekintsük a

$$b : \mathbb{N} \to V \qquad n \mapsto (a \circ \sigma)(n) - (a \circ \sigma)(n+1) \tag{2.25}$$

sorozatot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $N_n < \sigma_n, \sigma_{n+1}$, ezért

$$\|b_n\| = \|(a \circ \sigma)(n) - (a \circ \sigma)(n+1)\| < \alpha_n, \tag{2.26}$$

továbbá

$$\sum_{k=0}^{n} \|b_k\| < \sum_{k=0}^{n} \alpha_k < \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k. \tag{2.27}$$

Tehát a $b$ sorozatból képzett sor abszolút konvergens, ezért konvergens is. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} ((a \circ \sigma)(n) - (a \circ \sigma)(n+1)) = \lim_{n\to\infty} \left(a_{\sigma_0} - a_{\sigma_{n+1}}\right) = a_{\sigma_0} - \lim_{n\to\infty} a_{\sigma_n} \tag{2.28}$$

egyenlőség alapján az $a$ Cauchy-sorozatnak létezik konvergens részsorozata, ezért a 1.22 tétel alapján konvergens.

## 2.3. Normák ekvivalenciája

**2.9. Tétel.** *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $V$ vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq V$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.*
2. *Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.*
3. *Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \le K\|x\|'$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $V$ vektortéren.
$1 \Rightarrow 2$ Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint, ezért a $\|\cdot\|'$ norma szerint is nyílt. Mivel $x$ belső pontja a $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint, ezért létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$ teljesül.
$2 \Rightarrow 3$ Az $x = 0$ vektorhoz és az $r = 1$ számhoz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|}(0)$. Vagyis minden $y \in V$ vektor esetén ha $\|y\|' < R$, akkor $\|y\| < 1$. Legyen $z \in V$ tetszőleges vektor. Ha $z \neq 0$, akkor $Z = \dfrac{R}{2\|z\|'} \cdot z$ olyan vektor, melyre $\|Z\|' = \dfrac{R}{2} < R$, vagyis $\|Z\| = \dfrac{R}{2\|z\|'} \cdot \|z\| < 1$, amiből $\|z\| \le \dfrac{2}{R} \cdot \|z\|'$ adódik. Ha $z = 0$, akkor is teljesül a $\|z\| \le \dfrac{2}{R} \cdot \|z\|'$ egyenlőtlenség. Vagyis a $K = \dfrac{2}{R}$ jelöléssel az adódik, hogy minden $x \in V$ esetén $\|x\| \le K\|x\|'$.
$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \le K\|x\|'$ teljesül, és legyen $X \subseteq V$ a $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz. Ha $z \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^{\|\cdot\|}(z) \subseteq X$. Megmutatjuk, hogy $R = \dfrac{r}{K}$ esetén $B_R^{\|\cdot\|'}(z) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(z)$ teljesül, vagyis $z$ belső pontja az $X$ halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint is. Ha $y \in B_R^{\|\cdot\|'}(z)$, akkor nyilván $\|y - z\|' < R$, és azt kell igazolni, hogy $\|y - z\| < r$ teljesül. Ez rögtön adódik a

$$\|y - z\| \le K \cdot \|y - z\|' < K \cdot R = K \cdot \frac{r}{K} = r \tag{2.29}$$

egyenlőtlenségből.

**2.10. Tétel.** *Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a $V$ vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \le K_1\|x\|'$ és $\|x\|' \le K_2\|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\alpha\|x\| \le \|x\|' \le \beta\|x\|$.*

***Bizonyítás.*** Az előző állítás közvetlen következménye.

**2.11. Tétel.** *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$ esetén a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek a $\mathbb{K}^n$ téren.*

***Bizonyítás.*** Egyszerűen igazolható, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ vektor esetén

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n} \cdot \|x\|_\infty \tag{2.30}$$

teljesül, ezért az előző állítás alapján a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek.

Ennél többet is tudunk igazolni, nevezetesen a következő állítás azt mutatja, hogy véges dimenziós vektortereken létezik egy kitüntetett nyílt halmaz fogalom, melyet a normák indukálnak a téren.

**2.12. Tétel.** *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathbb{K}^n$ vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

***Bizonyítás.*** Első lépésben megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $\mathbb{K}^n$ téren az egyes norma ekvivalens bármely más normával. Legyen $\|\cdot\|$ tetszőleges norma. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ a $\mathbb{K}^n$ tér kanonikus bázisa, azaz minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $e_i$ legyen az a vektor, melynek az $i$-edik komponense 1, minden más komponense 0. Definiáljuk még a $K_1 = \max\{\|e_i\| \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ számot. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot K_1 = K_1 \cdot \|x\|_1 . \tag{2.31}$$

Most megmutatjuk, hogy a $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ térben. Ehhez igazolni kell, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ elemekhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y \in V$ vektorra

$$\|x - y\|_1 < \delta \quad \Rightarrow \quad |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon \tag{2.32}$$

teljesül. A $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K_1}$ választás jó lesz, ugyanis ebben az esetben ha $\|x - y\|_1 < \delta$, akkor

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq K_1 \|x - y\|_1 < \varepsilon. \tag{2.33}$$

Most tekintsük az $S = \{x \in \mathbb{K}^n | \|x\|_1 = 1\}$ halmazt. Mivel a $\|\cdot\|_1$ függvény nyilván folytonos a $\|\cdot\|_1$ norma szerint és $S = \overset{-1}{\|\cdot\|_1}(\{1\})$, ezért $S$ egy zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe, tehát zárt. Továbbá $S$ nyilván korlátos, ezért a 1.80 tétel alapján $S$ kompakt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ térben. Mivel $\|\cdot\|$ folytonos függvény, ezért a Weierstrass-tétel miatt léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $x \in S$ vektorra

$$\alpha \leq \|x\| \leq \beta \tag{2.34}$$

teljesül. Ha $x \in V \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor, akkor $\dfrac{x}{\|x\|_1} \in S$, ezért $\alpha \leq \left\| \dfrac{x}{\|x\|_1} \right\| = \dfrac{\|x\|}{\|x\|_1}$. Vagyis $K_2 = \dfrac{1}{\alpha}$ olyan szám, hogy minden $x \in V$ esetén $\|x\|_1 \leq K_2 \cdot \|x\|$.
Mivel a normák ekvivalenciája tranzitív, ezért megmutattuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ téren bármely két norma ekvivalens.

Most áttérünk a $\mathbb{K}^n$ térről véges dimenziós normált terekre, és megmutatjuk, hogy ott is hasonló tételek maradnak érvényben. Ezt lineáris homeomorfizmusok segítségével tudjuk megtenni, ehhez azonban kicsit meg kell ismerkednünk a folytonos lineáris leképezések alapjaival.

**2.13. Tétel.** *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az $A$ leképezés folytonos.*
2. *Az $A$ leképezés folytonos a 0 pontban.*
3. $\sup\limits_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2 < \infty$

***Bizonyítás.*** Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés.
$1 \Rightarrow 2$ Ha $A$ folytonos, akkor minden pontban folytonos.
$2 \Rightarrow 3$ Ha $A$ folytonos a 0 pontban, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x - 0\|_1 < \delta$ esetén $\|Ax - A0\|_2 < 1$. Mivel $A$ lineáris, ezért $A0 = 0$. Ha $x \in V_1$ olyan vektor, melyre $\|x\|_1 \le 1$ teljesül, akkor $\left\|\frac{\delta}{2} \cdot x\right\|_1 < \delta$, ezért $\left\|A\left(\frac{\delta}{2} \cdot x\right)\right\|_2 < 1$, vagyis $\|Ax\|_2 < \frac{2}{\delta}$. Tehát minden $x \in V_1$, $\|x\|_1 \le 1$ esetén $\|Ax\|_2 < \frac{2}{\delta}$, ezért

$$\sup_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2 \le \frac{2}{\delta} < \infty. \tag{2.35}$$

$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K = \sup\limits_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_2$, valamint legyen $z \in V_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméterek. Megmutatjuk, hogy ha $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ és a $z \in V$ vektorra $\|y - z\|_1 < \delta$ teljesül, akkor $\|Ay - Az\|_2 < \varepsilon$. Ez az alábbiakból következik $y \neq z$ esetén.

$$\|Ay - Az\|_2 = \|A(y - z)\|_2 = \|y - z\|_1 \cdot \left\|A\left(\frac{y - z}{\|y - z\|_1}\right)\right\| \le \|y - z\|_1 \cdot K < \delta \cdot K = \varepsilon \tag{2.36}$$

Ezek alapján $A(B_\delta(z)) \subseteq B_\varepsilon(Az)$, vagyis az $A$ leképezés folytonos a $z$ pontban.

Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. A $V_1 \to V_2$ folytonos lineáris leképezések halmazára a továbbiakban a $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ jelölést fogjuk használni.

**2.4. Definíció.** Adott $(V, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a folytonos lineáris $V \to \mathbb{K}$ leképezéseket *folytonos lineáris funkcionáloknak*, vagy röviden csak *funkcionáloknak* nevezzük. Bevezetjük még a $V' \triangleq \mathscr{L}(V, \mathbb{K})$ jelölést a funkcionálok halmazára.

**2.14. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált rér, és legyen $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ ennek egy bázisa. Tekintsük a*

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \tag{2.37}$$

*leképezést.*

1. *A $\varphi$ lineáris homeomorfizmus a $(V, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ terek között.*
2. *Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt.*
3. *Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált rér, és legyen $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ ennek egy bázisa. Ekkor a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \tag{2.38}$$

leképezés nyilvánvalóan lineáris bijekció, és az inverze is lineáris.
1. Mivel

$$\|\cdot\|' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|\varphi(x)\| \tag{2.39}$$

norma a $\mathbb{K}^n$ téren, ahol a 2.12 tétel alapján bármely két norma ekvivalens, tehát léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x\|' = \|\varphi(x)\| \leq \alpha \|x\|_\infty \quad \text{és} \quad \|x\|_\infty \leq \beta \|x\|' = \beta \|\varphi(x)\| . \tag{2.40}$$

Az első egyenlőtlenségből

$$\sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|\varphi(x)\| \leq \alpha < \infty \tag{2.41}$$

adódik, vagyis $\varphi$ folytonos. A második egyenletbe minden $y \in V$ esetén az $x = \varphi^{-1}(y)$ elemet írva

$$\left\|\varphi^{-1}(y)\right\|_\infty \leq \beta \|y\| \tag{2.42}$$

adódik, vagyis

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \left\|\varphi^{-1}(y)\right\|_\infty \leq \beta < \infty \tag{2.43}$$

teljesül, tehát $\varphi^{-1}$ is folytonos.
2. Legyen $U \subseteq V$. Ha $U$ nyílt, akkor a $\varphi$ leképezés folytonossága miatt a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz is nyílt. Ha az $U' \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt, akkor a $\varphi^{-1}$ leképezés folytonossága miatt a $\left(\varphi^{-1}\right)^{-1}(U') = \varphi(U') \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz is nyílt. Ezt alkalmazva az $U' = \varphi^{-1}(U)$ halmazra azt kapjuk, hogy ha $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt, akkor $U \subseteq V$ is nyílt.
3. Ha $U \subseteq V$ korlátos halmaz, akkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $U \subseteq B_r(0)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi^{-1}(U) \subseteq B_R(0)$. Ha $x \in \varphi^{-1}(U)$, akkor $\|\varphi(x)\| < r$, és a 2.40 egyenlet alapján

$$\|x\|_\infty \leq \beta \|\varphi(x)\| < \beta r, \tag{2.44}$$

vagyis az $R = \beta r$ jelöléssel élve $x \in B_R(0)$.
Ha az $U \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos, akkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $U \subseteq B_r(0)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi(U) \subseteq B_R(0)$. Ha $x \in \varphi(U)$, akkor $\left\|\varphi^{-1}(x)\right\|_\infty < r$ és a 2.40 egyenlet alapján

$$\|x\| = \left\|\varphi(\varphi^{-1}(x))\right\| \leq \alpha \left\|\varphi^{-1}(x)\right\|_\infty < \alpha r, \tag{2.45}$$

vagyis az $R = \alpha r$ jelöléssel élve $x \in B_R(0)$.

**2.15. Tétel.** *Minden $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén az*

$$M_c : V \to V \qquad x \mapsto cx, \tag{2.46}$$
$$L_z : V \to V \qquad x \mapsto z + x \tag{2.47}$$

*leképezés homeomorfizmus.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált rér, $z \in V$ és $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az $M_c : V \to V$, $M_c(x) = cx$ leképezés lineáris bijekció, melyre

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|M_c x\| \leq |c| \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| = |c| \tag{2.48}$$

és hasonlóan

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|M_{c^{-1}} x\| \leq |c|^{-1} \tag{2.49}$$

teljesül, ezért a 2.13 tétel alapján $M_c$ és $M_c^{-1}$ is folytonos.
Tekintsük az $L_z : V \to V$, $L_z(x) = z + x$ leképezést, mely nyilván bijekció. Elég megmutatni, hogy minden $z \in V$ esetén $L_z$ folytonos, ugyanis minden $z \in V$ elemre $L_z^{-1} = L_{-z}$ teljesül. Az $L_z$ leképezés folytonos bármely $x_0 \in V$ pontban, hiszen

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall x \in V : \qquad \|x - x_0\| < \varepsilon \quad \to \quad \|L_z(x) - L_z(x_0)\| = \|x - x_0\| < \varepsilon \tag{2.50}$$

teljesül.

**2.16. Tétel.** *Minden $V$ véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ véges dimenziós vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ norma a $V$ vektortéren. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a $V$ egy bázisa, és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \tag{2.51}$$

leképezést, mely a 2.14 tétel értelmében homeomorfizmus, a $V$ téren értelmezett normától függetlenül. Tegyük fel, hogy $U \subseteq V$ nyílt halmaz a $\|\cdot\|$ norma szerint. Mivel $\varphi$ homeomorfizmus a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(V, \|\cdot\|)$ terek között, ezért $\varphi^{-1}(U)$ nyílt a $\mathbb{K}^n$ térben. Továbbá $\varphi$ homeomorfizmus a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(V, \|\cdot\|')$ terek között is, ezért $\varphi\left(\varphi^{-1}(U)\right) = U$ nyílt a $(V, \|\cdot\|')$ térben.
Teljesen hasonlóan igazolható, hogy ha egy halmaz nyílt a $(V, \|\cdot\|')$ térben, akkor az nyílt a $(V, \|\cdot\|)$ térben is.

Ezek után minden véges dimenziós $V$ vektorteret olyan normált térnek tekintünk, ahol a nyílt halmazokat a normák indukálják.

**2.17. Tétel.** *Legyen $V$ véges dimenziós vektortér, és legyen $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ tetszőleges norma. Ekkor*

1. *a $V$ tér teljes;*
2. *a $V$ egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ véges dimenziós vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ norma a $V$ vektortéren. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a $V$ egy bázisa, és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to V \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \tag{2.52}$$

leképezést, mely a 2.14 tétel értelmében homeomorfizmus.
1. A

$$\|\cdot\|' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|\varphi(x)\| \tag{2.53}$$

leképezés norma a $\mathbb{K}^n$ téren. A véges dimenziós $\mathbb{K}^n$ téren $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalens normák, ezért a 2.10 tétel alapján létezik olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\alpha \|x\|' \leq \|x\|_\infty \leq \beta \|x\|' . \tag{2.54}$$

teljesül. Tehát minden $z \in V$ esetén a fenti egyenlőtlenséget alkalmazva az $x = \varphi^{-1}(z)$ vektorra

$$\alpha \|z\| \leq \left\|\varphi^{-1}(z)\right\|_\infty \leq \beta \|z\| \tag{2.55}$$

adódik. Legyen $a : \mathbb{N} \to V$ Cauchy-sorozat. Mivel minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\|\varphi^{-1}(a_n) - \varphi^{-1}(a_m)\right\|_\infty = \left\|\varphi^{-1}(a_n - a_m)\right\|_\infty \leq \beta \|a_n - a_m\| , \tag{2.56}$$

ezért az $n \mapsto b_n = \varphi^{-1}(a_n)$ sorozat Cauchy-sorozat a teljes $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben, tehát a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. Legyen $A' = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ és $A = \varphi(A')$. A minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülő

$$\|a_n - A\| \leq \frac{1}{\alpha} \left\|\varphi^{-1}(a_n - A)\right\|_\infty = \frac{1}{\alpha} \|b_n - A'\|_\infty \tag{2.57}$$

egyenlőtlenség alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.
2. Legyen $K \subseteq V$ korlátos és zárt halmaz. Ekkor a 2.14 tétel alapján a $\varphi^{-1}(K)$ halmaz korlátos és zárt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben, vagyis az 1.80 tétel alapján $\varphi^{-1}(K)$ kompakt. Azonban a $\varphi^{-1}(K)$ kompakt halmaznak az $f$ folytonos függvény általi képe kompakt, ezért $\varphi(\varphi^{-1}(K)) = K$ kompakt halmaz.
Ha $K \subseteq V$ kompakt halmaz, akkor a 1.27 tétel alapján korlátos, és zárt.

**2.18. Tétel.** *Minden normált tér minden véges dimenziós altere zárt.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, és legyen $L \subseteq V$ ennek véges dimenziós altere. Ekkor $(L, \|\cdot\| \,|_L)$ véges dimenziós normált tér, tehát az előző 2.17 tétel alapján teljes.

**2.19. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *A $V$ vektortér véges dimenziós.*
2. *A $V$ valamely nem nulla sugarú zárt gömbje kompakt.*
3. *A $V$ lokálisan kompakt tér.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
$1 \Rightarrow 2$ A 2.17 tétel alapján a minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén a $\overline{B_r(x)}$ halmaz kompakt, hiszen korlátos és zárt.
$2 \Rightarrow 3$ Legyen $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, melyre az $\overline{B_r(x)}$ gömb kompakt és legyen $z \in V$ tetszőleges. Mivel a 2.15 tétel alapján a

$$L_{z-x} : V \to V \qquad y \mapsto z - x + y \tag{2.58}$$

leképezés homeomorfizmus, és

$$L_{z-x}\left(\overline{B_r(x)}\right) = \overline{B_r(z)} \tag{2.59}$$

teljesül, ezért a $\overline{B_r(z)}$ halmaz is kompakt. Tehát a $z$ pontnak létezik kompakt környezete.
$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \subseteq V$ a nullának egy kompakt környezete, ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(0) \subseteq K$ teljesül. Tekintsük a

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{r}{2}}(x) \tag{2.60}$$

nyílt befedést. Mivel $K$ kompakt, ezért létezik olyan véges $H \subseteq K$, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{r}{2}}(x) \tag{2.61}$$

is teljesül. Legyen $W = \operatorname{Span}\{x \in H\}$, vagyis $W$ jelöli a $H$ halmazban lévő vektorok lineáris burkát, mely véges dimenziós altér a $V$ vektortérben, ezért a 2.18 tétel miatt $W$ zárt lineáris altere a $V$ normált térnek.
A 2.61 tartalmazást a

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} x + \frac{1}{2}B_r(0) \subseteq W + \frac{1}{2}B_r(0) \tag{2.62}$$

alakban is felírhatjuk, amiből a $G = B_r(0)$ jelöléssel

$$G \subseteq W + \frac{1}{2}G \tag{2.63}$$

adódik. Ebből teljes indukcióval minden $n \in \mathbb{N}$ számra $G \subseteq W + \frac{1}{2^n}G$ következik, hiszen az $n = 0$ esetben nyilvánvaló, az $n = 1$ esetben pedig az imént bizonyítottuk, és ha az $n$ számra igaz az állítás, akkor

$$G \subseteq W + \frac{1}{2^n}G \subseteq W + \frac{1}{2^n}\left(W + \frac{1}{2}G\right) = W + \frac{1}{2^{n+1}}G, \tag{2.64}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\frac{1}{2}W = W$ és $W + W = W$.
Igazoljuk, hogy $G \subseteq W$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in G \setminus W$ elem. Ekkor a $W$ halmaz zártsága és $x \notin \overline{W}$ miatt létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, $R < \|x\|$, hogy $B_R(x) \cap W = \emptyset$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x \in G \subseteq W + \frac{1}{2^n}G \quad \to \quad x \in \frac{1}{2^n}G, \tag{2.65}$$

amiből az $x = 0$ ellentmondás következik.
Mivel $W$ lineáris altér, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számra $nW = W$, valamint

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} nG \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} W = W \tag{2.66}$$

miatt $V \subseteq W$. A $W \subseteq V$ tartalmazás pedig nyilvánvaló. Tehát $V = W$, azaz $V$ véges dimenziós.

**2.5. Definíció.** Minden $p \in [1, \infty[$ paraméter mellett az

$$l^p_{\mathbb{K}} \triangleq \left\{ s : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p < \infty \right\} \tag{2.67}$$

halmazt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén *valós-* illetve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén *komplex* $l^p$ (ejtsd: *elpé*) *térnek* nevezzük.

**2.20. Tétel.** *Minden $p \in [1, \infty[$ esetén $l^p_{\mathbb{K}}$ vektortér, a*

$$\|\cdot\|_p : l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R} \qquad s \mapsto \left( \sum_{n=0}^{\infty} |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.68}$$

*leképezés pedig norma az $l^p_{\mathbb{K}}$ téren. Tehát minden $p \in [1, \infty[$ valós számra $(l^p_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_p)$ normált tér.*

***Bizonyítás.*** Legyen $p \in [1, \infty[$, $x, y \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $c \in \mathbb{K}$. Megmutatjuk, hogy $x + y \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. A Minkowski-egyenlőtlenség alapján minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |y_n|^p}, \tag{2.69}$$

ezért

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^p \leq \left( \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{N} |y_n|^p} \right)^p \leq \left( \|x\|_p + \|y\|_p \right)^p < \infty. \tag{2.70}$$

Tehát a $\sum\limits_{n} |x_n + y_n|^p$ sor konvergens, amiből $x + y \in l^p_{\mathbb{K}}$ következik, továbbá $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ is teljesül. Minden $c \in \mathbb{K}$ és $x \in l^p_{\mathbb{K}}$ esetén $\|cx\|_p = |c| \cdot \|x\|_p$ nyilvánvalóan teljesül, ezért $cx \in l^p_{\mathbb{K}}$, tehát $l^p_{\mathbb{K}}$ vektortér. A normára vonatkozó

$$\|x\|_p = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad x = 0 \tag{2.71}$$

követelmény szintén a definíció közvetlen következménye.

## 2.4. Skaláris szorzással ellátott terek

**2.6. Definíció.** Legyen $V$ vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K} \qquad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \tag{2.72}$$

leképezés *skaláris szorzás*, ha

– $\forall x \in V : \ \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+_0$;

– $\forall x \in V: \ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$;
– $\forall x, y, z \in V: \ \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
– $\forall x, y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K}: \ \langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle$;
– $\forall x, y \in V: \ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

**2.21. Tétel.** *(Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Legyen $V$ skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \tag{2.73}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ skalárszorzatos vektortér $\mathbb{K}$ felett és legyen $x, y \in V$. Ha $x = y = 0$, akkor nyilván teljesül az egyenlőtlenség, ezért tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Tekintsük minden $t \in \mathbb{K}$ esetén a $z = x - ty$ vektort. Ekkor a skaláris szorzás alaptulajdonsága miatt

$$0 \leq \langle z, z\rangle = \langle x - ty, x - ty\rangle = \langle x, x\rangle - \overline{t} \langle y, x\rangle - t \langle x, y\rangle + |t|^2 \langle y, y\rangle . \tag{2.74}$$

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe a $t = \dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$ értéket

$$0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \langle x, y\rangle + \frac{\langle y, x\rangle \langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle \langle y, y\rangle} \langle y, y\rangle = \tag{2.75}$$

$$= \frac{1}{\langle y, y\rangle} \left( \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle - |\langle x, y\rangle|^2 \right) \tag{2.76}$$

adódik.

**2.22. Tétel.** *Legyen $V$ vektortér, és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás a $V$ vektortéren. Ekkor*

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{2.77}$$

*norma.*

***Bizonyítás.*** A skaláris szorzás definíciója alapján minden $x \in V$ vektorra és $c \in \mathbb{K}$ számra

$$\|cx\| = \sqrt{\langle cx, cx\rangle} = \sqrt{\overline{c} \langle x, cx\rangle} = \sqrt{\overline{c} \left( \overline{\langle cx, x\rangle} \right)} = \sqrt{\overline{c} \left( \overline{\overline{c} \langle x, x\rangle} \right)} = \sqrt{\overline{c} c \langle x, x\rangle} = |c| \cdot \|x\| \tag{2.78}$$

teljesül.
Ha $x = 0$, akkor $\|x\| = \sqrt{0} = 0$. Ha valamilyen $x \in V$ vektorra $\|x\| = 0$, akkor $\langle x, x\rangle = 0$, vagyis $x = 0$.
Legyen $x, y \in V$ tetszőleges. Azt kell igazolni, hogy

$$\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle} \tag{2.79}$$

teljesül. Mivel a bizonyítandó egyenlőtlenség minden tagja pozitív, ezért elég az egyenlőtlenség négyzetét igazolni, vagyis, hogy

$$\langle x + y, x + y\rangle \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \tag{2.80}$$

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \tag{2.81}$$

$$\operatorname{Re} \langle x, y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{2.82}$$

teljesül. Ez viszont rögtön adódik a Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből és a komplex számokra vonatkozó $\operatorname{Re} \langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle|$ egyenlőtlenségből.

**2.7. Definíció.** Legyen $V$ vektortér és $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzás a $V$ téren.
- Ekkor a $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ párt *prehilbert-térnek* nevezzük.
- A $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ párt *Hilbert-térnek* nevezzük, ha a skaláris szorzásból származtatott normára nézve teljes normált tér.

A (pre-) Hilbert-tereket a továbbiakban csak az alaphalmaz szimbólumával jelöljük, és a térhez tartozó skaláris szorzást csak akkor írjuk ki, ha annak elhagyása félrevezető lenne. Továbbá adott $H$ Hilbert-tér esetén a $\mathscr{L}(H,H)$ térre a $\mathfrak{B}(H)$ jelölést fogjuk használni.

**2.8. Definíció.** Legyen $H$ Hilbert-tér, $I$ nem üres halmaz és minden $i\in I$ esetén legyen $0\neq e_i\in H$. Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i\in I}$ vektorrendszer
- *ortogonális rendszer*, ha minden $i,j\in I$ elemre, ha $i\neq j$, akkor $\langle e_i,e_j\rangle=0$ teljesül;
- *normált rendszer*, ha minden $i\in I$ elemre $\langle e_i,e_i\rangle=1$ teljesül;
- *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
- *teljes rendszer*, ha
$$\forall x\in H\Big((\forall i\in I:\langle e_i,x\rangle=0)\to x=0\Big) \tag{2.83}$$
teljesül;
- *Schauder-bázis*, ha teljes lineárisan független vektorrendszer.

**2.23. Tétel.** *Legyen $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér és $z\in H$ tetszőleges vektor. Ekkor a*
$$\langle\cdot,z\rangle:H\to\mathbb{K}\qquad x\mapsto\langle x,z\rangle \tag{2.84}$$
$$\langle z,\cdot\rangle:H\to\mathbb{K}\qquad x\mapsto\langle z,x\rangle \tag{2.85}$$
*leképezések folytonosak.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert-tér és $z\in H$ tetszőleges vektor. Mivel a $\langle z,\cdot\rangle$ leképezés a skaláris szorzás definíciója alapján lineáris, és a Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján
$$\|\langle z,\cdot\rangle\|=\sup_{\|x\|\leq 1}|\langle z,x\rangle|\leq\sup_{\|x\|\leq 1}\|x\|\cdot\|z\|\leq\|z\|<\infty, \tag{2.86}$$
ezért a lineáris leképezések folytonosságára vonatkozó 2.13 tétel alapján $\langle z,\cdot\rangle$ folytonos lineáris leképezés.
Mivel a konjugálás művelete folytonos és $\langle\cdot,z\rangle=\overline{\langle z,\cdot\rangle}$, ezért $\langle\cdot,z\rangle$ két folytonos leképezés kompozíciója, így folytonos.

**2.24. Tétel.** *Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $H$ Hilbert-térben. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *(Bessel-egyenlőtlenség.) Minden $x\in H$ vektorra és $J\subseteq\mathbb{N}$ halmazra*
$$\sum_{n\in J}|\langle e_n,x\rangle|^2\leq\|x\|^2. \tag{2.87}$$
2. *Minden $x\in H$ vektorra*
$$x=\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle e_n,x\rangle\, e_n. \tag{2.88}$$
3. *(Parseval-egyenlőség.) Minden $x\in H$ vektorra*
$$\|x\|^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle e_n,x\rangle|^2. \tag{2.89}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $H$ Hilbert-térben, és legyen $x \in H$ tetszőleges vektor.
1. Mivel minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 \leq \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{i=0}^{N} \langle e_i, x\rangle\, e_i, x - \sum_{j=0}^{N} \langle e_j, x\rangle\, e_j \right\rangle = \tag{2.90}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=0}^{N} \overline{\langle e_i, x\rangle}\, \langle e_i, x\rangle - \sum_{j=0}^{N} \langle e_j, x\rangle\, \langle x, e_j\rangle + \sum_{i,j=0}^{N} \overline{\langle e_i, x\rangle}\, \langle e_j, x\rangle\, \langle e_i, e_j\rangle = \tag{2.91}$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{i=0}^{N} |\langle e_i, x\rangle|^2 + \sum_{i=0}^{N} \langle e_i, x\rangle\, \langle e_i, x\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=0}^{N} |\langle e_i, x\rangle|^2 \tag{2.92}$$

teljesül, ezért minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=0}^{N} |\langle e_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{2.93}$$

Tehát

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \tag{2.94}$$

is teljesül, valamint ha az összegzés csak egy $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra végezzük el, azzal csak csökkenteni tudjuk a bal oldalon álló kifejezés értékét, vagyis minden $J \subseteq \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n\in J} |\langle e_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{2.95}$$

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle\, e_k$. Minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ számra

$$\|\alpha_m - \alpha_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \langle e_k, x\rangle\, e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=n+1}^{m} \langle e_i, x\rangle\, e_i, \sum_{j=n+1}^{m} \langle e_j, x\rangle\, e_j \right\rangle = \tag{2.96}$$

$$= \sum_{i,j=n+1}^{m} \overline{\langle e_i, x\rangle}\, \langle e_j, x\rangle\, \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=n+1}^{m} |\langle e_i, x\rangle|^2 . \tag{2.97}$$

Az 1. pont alapján $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2 < \infty$, tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2 < \varepsilon^2 \tag{2.98}$$

teljesül, vagyis a 2.96 egyenlőtlenség alapján minden $n, m \in \mathbb{N}$ számra $N < n, m$ esetén

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| < \varepsilon \tag{2.99}$$

teljesül, vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért konvergens is, vagyis létezik a Hilbert-térben a $z = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle\, e_n$ vektor.

Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. A skaláris szorzás folytonossága miatt

$$\left\langle e_k, x - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\rangle = \langle e_k, x\rangle - \left\langle e_k, \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\rangle = \tag{2.100}$$

$$= \langle e_k, x\rangle - \lim_{N\to\infty} \left\langle e_k, \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\rangle = \langle e_k, x\rangle - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle \langle e_k, e_n\rangle = \tag{2.101}$$

$$= \langle e_k, x\rangle - \langle e_k, x\rangle = 0 \tag{2.102}$$

teljesül. Mivel az $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorrendszer teljes, ezért

$$x - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle\, e_n = 0. \tag{2.103}$$

3. A 2. pontban bizonyított egyenlőséget skalárisan szorozva az $x$ vektorral

$$\langle x, x\rangle = \left\langle x, \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle\, e_n \right\rangle \tag{2.104}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle \langle x, e_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2 \tag{2.105}$$

adódik.

**Kiegészítés.** Az alábbi tétel segítségével könnyen eldönthető, hogy egy normált tér normája skaláris szorzásból származik-e vagy sem.

**2.25. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Pontosan akkor létezik a $V$ vektortéren olyan skaláris szorzás mely $V$ normáját generálja, ha minden $x, y \in V$ vektorra*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{2.106}$$

*teljesül.*

◊

## 2.5. Konvex zárt elnyelő halmazok Banach-terekben

A következő fogalmak és állítás segítségével lehet majd a későbbiekben a funkcionálanalízis alaptételei közül többet egyszerűen igazolni.

**2.9. Definíció.** Legyen $V$ vektortér és $K \subseteq V$. Azt mondjuk, hogy a $K$ halmaz

- *elnyelő*, ha minden $x \in V$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra $|\lambda| > r$ esetén $x \in \lambda K$;
- *konvex*, ha minden $x, y \in K$ és $c \in [0, 1]$ elemre $cx + (1-c)y \in K$ teljesül;
- *szimmetrikus*, ha $K = -K$ teljesül.

**2.26. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és legyen $Z \subseteq V$ zárt, konvex és elnyelő halmaz. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ melyre $B_r(0) \subseteq Z$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és legyen $Z \subseteq V$ zárt, konvex és elnyelő halmaz.
1. Megmutatjuk, hogy $K = Z \cap (-Z)$ zárt, konvex, elnyelő és szimmetrikus halmaz. A $K$ halmaz nyilván zárt, hiszen két zárt halmaz metszete; konvex is, hiszen két konvex halmaz metszete, és

nyilván szimmetrikus is. Megutatjuk, hogy $K$ elnyelő. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Mivel $Z$ elnyelő, ezért létezik olyan $c_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in c_1 Z$, valamint létezik olyan $c_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy $-x \in c_2 Z$. Ekkor bármely $c \in \mathbb{R}^+$, $c > \max\{c_1, c_2\}$ számra $x, -x \in cK$, vagyis $x \in (cK) \cap (-cK) = cZ$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} (nK)$ teljesül. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Mivel $K$ elnyelő, létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, melyre $x \in cK$. Mivel $K$ konvex és elnyelő, ezért ha $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq c$, akkor $x \in nK$, tehát $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} (nK)$.
3. A Baire-féle kategóriatétel alapján létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\operatorname{Int} \overline{nK} \neq \emptyset$. Mivel a

$$\varphi : V \to V \qquad x \mapsto nx \tag{2.107}$$

leképezés a 2.15 tétel alapján homeomorfizmus, ezért $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$. Legyen $z \in \operatorname{Int} K$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(z) \subseteq \operatorname{Int} K$.
4. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(0) \subseteq K$. Legyen $x \in B_r(0)$. A $K$ halmaz szimmetrikussága miatt $B_r(-z) \subseteq K$. Tehát az $x-z \in B_r(-z) \subseteq K$ és az $x+z \in B_r(z) \subseteq K$ tartalmazás miatt $x-z, x+z \in K$, amiből $K$ konvexitása miatt

$$x = \frac{1}{2}(x-z) + \frac{1}{2}(x+z) \in K \tag{2.108}$$

adódik. Mivel $B_r(0) \subseteq K = Z \cap (-Z)$ teljesül, ezért $B_r(0) \subseteq Z$.

## 2.6. Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok normált terekben

**2.27. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Ha $x_0, x_1 \in V$, akkor a*

$$\gamma_{x_0,x_1} : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0) \tag{2.109}$$

*függvény folytonos.*

2. *Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \dots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$, akkor a*

$$\gamma : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\} \left(x_{[nt]+1} - x_{[nt]}\right) \tag{2.110}$$

*függvény folytonos, továbbá minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén minden $t \in [0,1]$ számra*

$$\gamma_{x_k,x_{k+1}}(t) = \gamma\left(\frac{k+t}{n}\right) \tag{2.111}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. Legyen $x_0, x_1 \in V$ olyan, hogy $x_0 \neq x_1$, és legyen

$$\gamma_{x_0,x_1} : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_0 + t(x_1 - x_0). \tag{2.112}$$

Legyen $t_0 \in [0,1]$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ehhez definiáljuk a $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|}$ paramétert. Ha $t \in [0,1]$ olyan, melyre $|t - t_0| < \delta$ teljesül, akkor

$$\|\gamma_{x_0,x_1}(t) - \gamma_{x_0,x_1}(t_0)\| = \|(t-t_0)(x_1-x_0)\| = |t-t_0| \cdot \|x_1 - x_0\| < \frac{\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|} \cdot \|x_1 - x_0\| = \varepsilon. \tag{2.113}$$

Vagyis $\gamma$ folytonos a $t_0$ pontban, és így minden pontban is folytonos. Ha $x_0 = x_1$, akkor a $\gamma$ függvény nyilván folytonos.
2. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_0, \ldots, x_n \in V$ olyan, hogy minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $x_k \neq x_{k+1}$, és tekintsük a

$$\gamma : [0,1] \to V \qquad t \mapsto x_{[nt]} + \{nt\}\left(x_{[nt]+1} - x_{[nt]}\right) \tag{2.114}$$

függvényt. Legyen $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ és $t \in [0,1[$ tetszőleges. Ekkor

$$\gamma\left(\frac{k+t}{n}\right) = x_{[k+t]} + \{k+t\}\left(x_{[k+t]+1} - x_{[k+t]}\right) = x_k + t(x_{k+1} - x_k) = \gamma_{x_k, x_{k+1}}(t). \tag{2.115}$$

Ha $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ és $t = 1$, akkor

$$\gamma\left(\frac{k+t}{n}\right) = x_{[k+1]} + \{k+1\}\left(x_{[k+1]+1} - x_{[k+1]}\right) = x_{k+1} = \gamma_{x_k, x_{k+1}}(1). \tag{2.116}$$

Tehát minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ és $t \in [0,1]$ számra

$$\gamma_{x_k, x_{k+1}}(t) = \gamma\left(\frac{k+t}{n}\right) \tag{2.117}$$

teljesül.
Megmutatjuk, hogy a $\gamma$ függvény folytonos. Legyen $t_0 \in [0,1]$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és ehhez definiáljuk a

$$\delta_1 = \frac{1}{n} \cdot \min\left\{ \frac{\varepsilon}{\|x_{k+1} - x_k\|} \;\middle|\; k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\} \tag{2.118}$$

számot.
Ha $nt_0 \notin \mathbb{N}$, akkor legyen

$$\delta_2 = \min\left\{ \left| t_0 - \frac{k}{n} \right| \;\middle|\; k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\} \tag{2.119}$$

és legyen $\delta = \dfrac{1}{2} \cdot \min\{\delta_1, \delta_2\}$, valamint $k_1 = [nt_0]$ és $k_2 = k_1 + 1$. Ekkor nyilván $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, n\}$ Ha $t \in [0,1]$ olyan, hogy $|t - t_0| < \delta$, akkor az

$$\frac{k_1}{n} = t_0 - \left| t_0 - \frac{k_1}{n} \right| \leq t_0 - \frac{\delta_2}{2} < t < t_0 + \frac{\delta_2}{2} \leq t_0 + \left| t_0 - \frac{k_2}{n} \right| = \frac{k_2}{n} \tag{2.120}$$

egyenlőtlenség alapján

$$k_1 < nt < k_2, \tag{2.121}$$

vagyis $[nt] = [nt_0] = k_1$, továbbá az

$$nt = [nt] + \{nt\} \tag{2.122}$$
$$nt_0 = [nt_0] + \{nt_0\} \tag{2.123}$$

egyenlőségekből

$$\{nt\} - \{nt_0\} = n(t - t_0) \tag{2.124}$$

adódik. Ezért

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = \left\| x_{[nt]} + \{nt\}\left(x_{[nt]+1} - x_{[nt]}\right) - x_{[nt_0]} - \{nt_0\}\left(x_{[nt_0]+1} - x_{[nt_0]}\right) \right\| = \tag{2.125}$$
$$= \left\| \{nt\}\left(x_{k_2} - x_{k_1}\right) - \{nt_0\}\left(x_{k_2} - x_{k_1}\right) \right\| = \tag{2.126}$$

$$= |\{nt\} - \{nt_0\}| \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| = \tag{2.127}$$
$$= |n(t-t_0)| \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| = n \cdot |t-t_0| \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| < \tag{2.128}$$
$$< n \cdot \delta_1 \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| \leq n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\|x_{k_2} - x_{k_1}\|} \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| = \varepsilon, \tag{2.129}$$

ami mutatja a $\gamma$ függvény $t_0$ pontbeli folytonosságát.
Ha $nt_0 \in \mathbb{N}$, akkor legyen $\delta_2 = \frac{1}{n}$ és $\delta = \frac{1}{2} \cdot \min\{\delta_1, \delta_2\}$, valamint $k_1 = nt_0$, $k_2 = k_1 + 1$ és $k_0 = k_1 - 1$.
Ha $t \in ]t_0, t_0 + \delta[ \cap [0,1]$, akkor

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = \left\|x_{[nt]} + \{nt\}\left(x_{[nt]+1} - x_{[nt]}\right) - x_{[nt_0]} - \{nt_0\}\left(x_{[nt_0]+1} - x_{[nt_0]}\right)\right\| = \tag{2.130}$$
$$= \|x_{k_1} + \{nt\}\left(x_{k_2} - x_{k_1}\right) - x_{k_1}\| = \tag{2.131}$$
$$= |\{nt\}| \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| = \tag{2.132}$$
$$= |n(t-t_0)| \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| < \tag{2.133}$$
$$< n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\|x_{k_2} - x_{k_1}\|} \cdot \|x_{k_2} - x_{k_1}\| = \varepsilon. \tag{2.134}$$

Ha $t \in ]t_0 - \delta, t_0[ \cap [0,1]$, akkor az $nt = [nt] + \{nt\} = k_1 - 1 + \{nt\}$ egyenletből

$$1 - \{nt\} = k_1 - nt = nt_0 - nt \tag{2.135}$$

adódik, amit alapján

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| = \left\|x_{[nt]} + \{nt\}\left(x_{[nt]+1} - x_{[nt]}\right) - x_{[nt_0]} - \{nt_0\}\left(x_{[nt_0]+1} - x_{[nt_0]}\right)\right\| = \tag{2.136}$$
$$= \|x_{k_0} + \{nt\}\left(x_{k_1} - x_{k_0}\right) - x_{k_1}\| = \tag{2.137}$$
$$= |1 - \{nt\}| \cdot \|x_{k_0} - x_{k_1}\| = \tag{2.138}$$
$$= |n(t-t_0)| \cdot \|x_{k_0} - x_{k_1}\| < \tag{2.139}$$
$$< n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{\|x_{k_0} - x_{k_1}\|} \cdot \|x_{k_0} - x_{k_1}\| = \varepsilon. \tag{2.140}$$

Tehát minden $t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \cap [0,1]$ esetén

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \varepsilon \tag{2.141}$$

teljesül, vagyis a $\gamma$ függvény folytonos a $t_0$ pontban.

**2.28. Tétel.** *Normált térben minden konvex halmaz ívszerűen összefüggő.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $A \subseteq V$ konvex halmaz, és legyen $x, y \in A$ tetszőleges két pont. Ha $x = y$, akkor a $\gamma : [0,1] \to V$, $\gamma(t) = x$ függvény nyilván folytonos. Ha $x \neq y$, akkor az előző 2.27 tétel alapján a

$$\gamma : [0,1] \to A \qquad t \mapsto x + t(y-x) \tag{2.142}$$

függvény folytonos, és nyilvánvaló módon teljesül rá $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$, vagyis $\gamma$ összeköti az $x$ és az $y$ pontot.

**2.29. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. *A $V$ halmaz ívszerűen összefüggő.*
2. *A $V$ halmaz összefüggő.*
3. *Ha $A \subseteq V$ olyan halmaz mely nyílt és zárt, akkor $A = \emptyset$ vagy $A = V$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. Mivel $V$ konvex halmaz, ezért a 2.28 tétel alapján ívszerűen összefüggő.
2. Mivel $V$ ívszerűen összefüggő, ezért a 1.83 tétel alapján összefüggő.
3. A 1.86 tétel következménye.

**2.30. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Ha $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül, akkor $B = A$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ összefüggő nyílt halmaz. Legyen $B \subseteq A$ olyan nyílt halmaz, melyre $B \neq \emptyset$ és $\overline{B} \cap A = B$ teljesül. Tegyük fel, hogy $A \setminus B \neq \emptyset$. Definiáljuk az $U = B$ és $V = A \setminus B$ halmazokat. Ekkor $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cup V = A$ és

$$\overline{U} \cap V = \overline{B} \cap (A \setminus B) = \overline{B} \cap (A \setminus (\overline{B} \cap A)) = \overline{B} \cap (A \setminus \overline{B}) = \emptyset \tag{2.143}$$

teljesül. Tegyük fel, hogy $U \cap \overline{V} \neq \emptyset$, legyen $z \in U \cap \overline{V}$. Ekkor $z \in U = B$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \subseteq B$. Továbbá $z \in \overline{V} = \overline{A \setminus B}$ miatt létezik olyan $x \in A \setminus B$, melyre $\|x - z\| < r$ teljesül. Ebben az esetben $x \in A$, $x \notin B$, azonban $x \in B_r(z)$ miatt $x \in B$. Tehát téves volt az $U \cap \overline{V} \neq \emptyset$ feltételezés, vagyis $U \cap \overline{V} = \emptyset$.
Ebből az az ellentmondás adódik, hogy az $A$ halmaz nem összefüggő, vagyis az $A \setminus B \neq \emptyset$ feltételezés nem tartható, így $A \setminus B = \emptyset$, amiből $B \subseteq A$ miatt $B = A$ adódik.

**2.31. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz. Ekkor az alábbi kijelentések ekvivalensek.*

1. *Az $A$ halmaz összefüggő.*
2. *Minden $x, y \in A$ ponthoz létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \ldots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$.*
3. *Az $A$ halmaz ívszerűen összefüggő.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subseteq V$ nyílt halmaz.
1⇒2 Legyen $c \in A$ egy rögzített pont. Legyen

$$A_c = \left\{ y \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{N}^+, \exists z_0, \ldots, z_n \in A: \; z_0 = c, \; z_n = y, \\ \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A \end{array} \right\}. \tag{2.144}$$

Megmutatjuk, hogy az $A_c$ halmaz nyílt. Ha $x \in A_c$, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\exists z_0, \ldots, z_n \in A: \; z_0 = c, \; z_n = x, \; \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A. \tag{2.145}$$

Továbbá $x \in A$, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq A$. Ha $y \in B_r(x) \setminus \{x\}$, akkor $[x, y] \subseteq B_r(x) \subseteq A$, vagyis ha $z_{n+1} = y$, akkor

$$z_0 = c, \; z_{n+1} = y, \; \forall k \in \{0, \ldots, n\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A \tag{2.146}$$

teljesül, vagyis $y \in A_c$. Tehát $B_r(x) \subseteq A_c$ is teljesül, vagyis $A_c$ nyílt halmaz.
Most igazoljuk, hogy $\overline{A_c} \cap A = A_c$. Mivel $A_c \subseteq \overline{A_c} \cap A$ nyilvánvalóan teljesül, ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{A_c} \cap A \subseteq A_c$. Legyen $x \in \overline{A_c} \cap A$. Ekkor $x \in A$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq A$ teljesül. Mivel $x \in \overline{A_c}$, ezért létezik olyan $y \in A_c$, melyre $\|x - y\| < \frac{r}{2}$ teljesül. Ekkor $y \in B_r(x)$, vagyis $[y, x] \subseteq B_r(x) \subseteq A$, valamint $y \in A_c$, miatt létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\exists z_0, \ldots, z_n \in A: \; z_0 = c, \; z_n = y, \; \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A. \tag{2.147}$$

Ha $z_{n+1} = x$, akkor

$$z_0 = c, \; z_{n+1} = x, \; \forall k \in \{0, \ldots, n\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A \tag{2.148}$$

teljesül, vagyis $x \in A_c$.
Ezek alapján $A_c \subseteq A$ olyan nyílt részhalmaza az $A$ összefüggő halmaznak, melyre $\overline{A_c} \cap A = A_c$ teljesül, vagyis az előző 2.30 tétel alapján $A_c = A$.
Most legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont. Ekkor $x, y \in A_c$, vagyis

$$\exists n \in \mathbb{N}^+ \exists z_0, \dots, z_n \in A: \; z_0 = c, \; z_n = x, \; \forall k \in \{0, \dots, n-1\}: \; z_k \neq z_{k+1}, \; [z_k, z_{k+1}] \in A \tag{2.149}$$

$$\exists m \in \mathbb{N}^+ \exists v_0, \dots, v_m \in A: \; v_0 = c, \; v_m = y, \; \forall k \in \{0, \dots, m-1\}: \; v_k \neq v_{k+1}, \; [v_k, v_{k+1}] \in A. \tag{2.150}$$

Legyen $l = n + m$, és minden $k \in \{0, \dots, l\}$ esetén legyen

$$u_k = \begin{cases} z_{n-k}, & \text{ha} \quad k \leq n; \\ v_{k-n}, & \text{ha} \quad k > n. \end{cases} \tag{2.151}$$

Ekkor

$$u_0 = x, \; u_l = y, \; \forall k \in \{0, \dots, l-1\}: \; u_k \neq u_{k+1}, \; [u_k, u_{k+1}] \in A. \tag{2.152}$$

2⇒3 Legyen $x, y \in A$ két tetszőleges pont. Ehhez létezik $n \in \mathbb{N}^+$ és olyan $z_0, \dots, z_n \in A$, hogy $z_0 = x$, $z_n = y$ és minden $k \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $z_k \neq z_{k+1}$ és $[z_k, z_{k+1}] \subseteq A$. A 2.27 tétel alapján ekkor létezik olyan folytonos $\gamma : [0, 1] \to A$ görbe, melyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$ teljesül.
3⇒1 Ha $A$ ívszerűen összefüggő, akkor a 1.83 tétel alapján összefüggő.

## 2.7. Normált terek szorzata

**2.32. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér, és legyen $p \in [1, \infty[$. A $V = \prod_{k=1}^{n} V_k$ halmazon értelmezzük a*

$$\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max \{ \|x_k\|_k \mid k \in \{1, \dots, n\} \} \tag{2.153}$$

$$\|\cdot\|_p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.154}$$

*függvényeket. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*
- *A $\|\cdot\|_\infty$ függvény norma.*
- *Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ függvény norma.*
- *Minden $p \in [1, \infty[$ elemre a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek egymással.*

***Bizonyítás.*** A bizonyítása teljesen analóg a 2.20 tétel bizonyításával.

**2.10. Definíció.** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(V_k, \|\cdot\|_k)$ normált tér és legyen

$$\|\cdot\| : \prod_{k=1}^{n} V_k \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max \{ \|x_k\|_k \mid k \in \{1, \dots, n\} \}. \tag{2.155}$$

A $\left( \prod_{k=1}^{n} V_k, \|\cdot\| \right)$ normált teret nevezzük a $(V_k, \|\cdot\|_k)_{k=1,\dots,n}$ *normált terek szorzatának.*

## 2.8. Folytonos lineáris leképezések

A következő állításokban összefoglaljuk az $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ tér főbb jellemzőit.

**2.33. Tétel.** *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. Az $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ tér vektortér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}(V_1, V_2) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 \tag{2.156}$$

*leképezés norma.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A, B \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Mivel $A$ és $B$ folytonos, ezért a 2.13 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|(A + B)x\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax + Bx\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} (\|Ax\|_2 + \|Bx\|_2) \leq \tag{2.157}$$

$$\leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 + \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Bx\|_2 = \|A\| + \|B\|; \tag{2.158}$$

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\lambda Ax\|_2 = |\lambda| \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 = |\lambda| \cdot \|A\| \tag{2.159}$$

teljesül, vagyis $\|A + B\|, \|\lambda A\| < \infty$, ezért a 2.13 tétel alapján $A + B, \lambda A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$, vagyis $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ vektortér. Továbbá a fenti egyenletek igazolják az $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ és a $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ egyenleteket.
Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in V_1$ vektorra $\|x\|_1 \leq 1$ esetén $\|Ax\|_2 = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in V_1 \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|_1}$ vektorra $\|x'\|_1 \leq 1$, ezért $Ax' = \dfrac{1}{\|x\|_1} Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

Későbbi számolások és bizonyítások során számtalanszor fogjuk használni hivatkozás nélkül az alábbi tételben foglalt egyenlőtlenséget.

**2.34. Tétel.** *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $x \in V_1$. Ekkor*

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 . \tag{2.160}$$

***Bizonyítás.*** Mivel minden $x \in V_1 \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|_1}$ vektorra $\|x'\|_1 \leq 1$, ezért $\|Ax'\|_2 \leq \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

**2.35. Tétel.** *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathscr{L}(V_2, V_3)$. Ekkor $BA \in \mathscr{L}(V_1, V_3)$, továbbá*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \tag{2.161}$$

*teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathscr{L}(V_2, V_3)$. Mivel minden $x \in V_1$ vektor esetén

$$\|BAx\|_3 \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_2 \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1 , \tag{2.162}$$

ezért

$$\|BA\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|BAx\|_3 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} (\|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1) = \|B\| \cdot \|A\| . \tag{2.163}$$

Mivel $\|BA\| < \infty$, ezért $BA$ folytonos lineáris leképezés.

**2.36. Tétel.** *Ha* $(V_1, \|\cdot\|_1)$ *normált tér és* $(V_2, \|\cdot\|_2)$ *Banach-tér, akkor* $(\mathscr{L}(V_1, V_2), \|\cdot\|)$ *is Banach-tér.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér és $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(V_1, V_2)$ Cauchy-sorozat. Legyen $x \in V_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $a$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$, vagyis az

$$\|a_n(x) - a_m(x)\| \leq \|x\| \cdot \|a_n - a_m\| < \|x\| \cdot \varepsilon \tag{2.164}$$

egyenlőtlenség alapján $n \mapsto a_n(x)$ Cauchy-sorozat a $V_2$ teljes térben, ezért létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$ határérték minden $x \in V_1$ esetén. Ennek a segítségével definiáljuk a

$$A : V_1 \to V_2 \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n(x) \tag{2.165}$$

függvényt.
Megmutatjuk, hogy $A$ lineáris leképezés. Legyen $x, y \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges. Ekkor az

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} a_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (a_n(x) + a_n(y)) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) + \lim_{n\to\infty} a_n(y) = Ax + Ay \tag{2.166}$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} a_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} (\lambda a_n(x)) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lambda \cdot Ax \tag{2.167}$$

egyenlőségek igazolják $A$ linearitását.
Megmutatjuk, hogy $A$ folytonos lineáris leképezés. Mivel $a$ Cauchy-sorozat, ezért korlátos is, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|a_n\| < K$. Ekkor minden $x \in V_1$, $\|x\|_1 \leq 1$ vektorra

$$\|a_n x\|_2 \leq \|a_n\|_1 \cdot \|x\| < K \tag{2.168}$$

egyenlőtlenség teljesül, amiből

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \left\| \lim_{n\to\infty} a_n(x) \right\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \lim_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_2 \leq \tag{2.169}$$

$$\leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \, \|x\|_1 \leq \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \leq K \tag{2.170}$$

következik, ami a 2.13 tétel alapján azt jelenti, hogy $A$ folytonos lineáris leképezés. Vagyis $A \in \mathscr{L}(V_1, V_2)$.
Azt kell még igazolni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül a $\mathscr{L}(V_1, V_2)$ normált térben. Ennek igazolásához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $a$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|a_n x - a_m x\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|a_n - a_m\| \cdot \|x\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.171}$$

egyenlőtlenségen végrehajtva az $n \to \infty$ határátmenetet

$$\|A - a_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.172}$$

adódik. Így minden $m > N$ számra $\|A - a_m\| < \varepsilon$ teljesül, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

**2.37. Tétel.** *Legyen* $(V_1, \|\cdot\|_1)$ *és* $(V_2, \|\cdot\|_2)$ *normált tér és legyen* $A : V_1 \to V_2$ *lineáris leképezés. Ha* $\dim V_1 < \infty$*, akkor* $A$ *folytonos. Azaz minden véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris leképezés folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint tegyük fel, hogy $V_1$ véges dimenziós. Legyen $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ egy bázisa a $V_1$ vektortérnek, és a $V_1$ téren tekintsük a

$$\|\cdot\|_1' : V_1 \to \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \mapsto \left\|\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right\|_1' = \sum_{i=1}^n |x_i| \tag{2.173}$$

normát. Legyen továbbá $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és $A : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. Definiáljuk a $K = \max\{\|Ae_i\|_2 \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ számot. Ekkor minden $x \in V_1$ esetén

$$\|Ax\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right\|_2 \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|Ae_i\|_2 \le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot K = K \cdot \|x\|_1', \tag{2.174}$$

vagyis

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1' \le 1} \|Ax\|_2 \le \sup_{\|x\|_1' \le 1} \left(K \cdot \|x\|_1'\right) = K < \infty, \tag{2.175}$$

ezért $A$ folytonos a $(V_1, \|\cdot\|_1')$ téren. Mivel $V_1$ véges dimenziós, ezért a 2.16 tétel alapján a $\|\cdot\|_1$ és a $\|\cdot\|_1'$ normák ekvivalensek egymással ezért $A$ a $(V_1, \|\cdot\|_1)$ téren is folytonos.

**2.38. Tétel.** *(Carl–Neumann-féle sor.) Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathscr{L}(V, V)$. Ha $\|A\| < 1$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, az $1 - A$ elem invertálható, inverze folytonos lineáris leképezés és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1} \tag{2.176}$$

*teljesül, ahol 1 jelöli a $V \to V$ identitás függvényt.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, és legyen $A \in \mathscr{L}(V, V)$ olyan, hogy $\|A\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^n\| \le \|A\|^n$. Ebből $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ adódik, melynek következménye, hogy $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$. Továbbá a $\sum_n A^n$ sor abszolút konvergens, mert $\sum_n \|A^n\| \le \sum_n \|A\|^n < \infty$, hiszen $\|A\| < 1$. A minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén érvényes

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^n A^k = \left(\sum_{k=0}^n A^k\right) \cdot (1 - A) = 1 - A^{n+1} \tag{2.177}$$

képletnél az $n \to \infty$ határátmenetet véve az eddigi megállapítások alapján

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right) \cdot (1 - A) = 1 \tag{2.178}$$

adódik, vagyis $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ az $1 - A$ elem inverze.

**2.39. Tétel.** *Legyen $U$ és $V$ Banach-tér és legyen*

$$G(\mathscr{L}(U, V)) \triangleq \{a \in \mathscr{L}(U, V) \mid \exists a' \in \mathscr{L}(V, U) : \ aa' = \mathrm{id}_V, \ a'a = \mathrm{id}_V\}. \tag{2.179}$$

*(Vagyis $G(\mathscr{L}(U, V))$ jelöli a azon invertálható lineáris leképezések halmazát, melyek inverze is folytonos.) Ekkor*

1. *minden $a \in G(\mathscr{L}(U,V))$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq G(\mathscr{L}(U,V))$;*
2. *a $G(\mathscr{L}(V,V))$ halmaz nyílt;*
3. *az $i : G(\mathscr{L}(U,V)) \to G(\mathscr{L}(V,U))$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $U$ és $V$ Banach-tér és legyen

$$G(\mathscr{L}(U,V)) \triangleq \{a \in \mathscr{L}(U,V) |\ \exists a' \in \mathscr{L}(V,U) :\ aa' = \mathrm{id}_V,\ a'a = \mathrm{id}_U\}. \tag{2.180}$$

1. Legyen $a \in G(\mathscr{L}(U,V))$ és legyen $b \in B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)$ tetszőleges elem. Ekkor $\|a-b\| < \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$, vagyis $\|a-b\| \cdot \left\|a^{-1}\right\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt

$$\left\|\mathrm{id}_V - ba^{-1}\right\| = \left\|(a-b)a^{-1}\right\| \le \|a-b\| \cdot \left\|a^{-1}\right\| < 1, \tag{2.181}$$

ami a Carl–Neumann-féle sorfejtés miatt azt jelenti, hogy az $\mathrm{id}_V - (\mathrm{id}_V - ba^{-1})$ elem invertálható és az inverze is folytonos lineáris leképezés, vagyis $ba^{-1} \in G(\mathscr{L}(V,V))$. Legyen $b' = a^{-1}(ba^{-1})^{-1}$. Ekkor $bb' = 1$ nyilván teljesül, valamint ha a

$$(ba^{-1})^{-1}(ba^{-1}) = 1 \tag{2.182}$$

egyenletet megszorozzuk jobbról az $a$, balról az $a^{-1}$ mennyiségekkel, akkor $b'b = 1$ adódik. Tehát $b'$ a $b$ inverze, vagyis $b \in G(\mathscr{L}(V,U))$.
2. Mivel a $G(\mathscr{L}(U,V))$ halmaz minden pontja belső pont, ezért nyílt halmaz.
3. Legyen $a \in G(\mathscr{L}(U,V))$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathscr{L}(U,V)$ elemre

$$\|a-x\| < \delta \quad \to \quad x \in G(\mathscr{L}(U,V)) \ \wedge\ \left\|a^{-1} - x^{-1}\right\| < \varepsilon \tag{2.183}$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy az $i$ leképezés folytonos az $a$ pontban. Legyen $\delta_1 = \dfrac{1}{2\left\|a^{-1}\right\|}$ és $x \in B_{\delta_1}(a)$. Ekkor az 1. pont alapján $x \in G(\mathscr{L}(U,V))$. Tekintsük a következő átalakításokat.

$$\left((x^{-1} - a^{-1}) + a^{-1}\right) \cdot ((x-a) + a) = \mathrm{id}_U \tag{2.184}$$
$$(x^{-1} - a^{-1})(x-a) + (x^{-1} - a^{-1})a + a^{-1}(x-a) = 0 \tag{2.185}$$
$$(x^{-1} - a^{-1})a = -a^{-1}(x-a) - (x^{-1} - a^{-1})(x-a) \tag{2.186}$$
$$x^{-1} - a^{-1} = -a^{-1}(x-a)a^{-1} - (x^{-1} - a^{-1})(x-a)a^{-1} \tag{2.187}$$
$$\left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| \le \left\|a^{-1}\right\|^2 \cdot \|x-a\| + \left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| \cdot \|x-a\| \cdot \left\|a^{-1}\right\| \tag{2.188}$$
$$\left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| \left(1 - \|x-a\| \cdot \left\|a^{-1}\right\|\right) \le \left\|a^{-1}\right\|^2 \cdot \|x-a\| \tag{2.189}$$
$$\left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| \le \frac{\left\|a^{-1}\right\|^2}{1 - \|x-a\| \cdot \left\|a^{-1}\right\|} \cdot \|x-a\| < \frac{\left\|a^{-1}\right\|^2}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \|x-a\| \tag{2.190}$$

Itt az utolsó lépésben felhasználtuk az

$$\|x-a\| < \delta_1 \quad \to \quad \|x-a\| \cdot \left\|a^{-1}\right\| < \frac{1}{2} \tag{2.191}$$

egyenlőtlenséget. Vagyis ha $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{2\left\|a^{-1}\right\|^2}$ és $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor minden $x \in B_\delta(a)$ elemre

$$\left\|x^{-1} - a^{-1}\right\| < \varepsilon \tag{2.192}$$

teljesül.

**Kiegészítés.** A fenti tételek és bizonyításuk sokkal általánosabb keretek között is érvényben maradnak.

**2.40. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér. Ekkor az $\mathscr{L}(V, V)$ tér az operátornormával egységelemes Banach-algebra.*

***Bizonyítás.*** A $\mathscr{L}(V, V)$ tér a 2.36 tétel miatt Banach-tér, melyen a norma a 2.35 tétel miatt szubmultiplikatív.

**2.41. Tétel.** *(Carl–Neumann-féle sor.) Legyen $A$ egységelemes Banach-algebra, melynek jelölje $1$ az egységelemét, és legyen $a \in A$. Ekkor*

- *a $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ sor pontosan akkor konvergens, ha $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ és létezik $(1-a)^{-1} \in A$;*
- *ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ sor konvergens, akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = (1-a)^{-1}. \tag{2.193}$$

***Bizonyítás.*** A 2.38 Carl–Neumann-tételnél leírt bizonyítás, változtatás nélkül, ilyen keretek között is érvényes.

**2.42. Tétel.** *Legyen $A$ egységelemes Banach-algebra, és legyen $a \in A$. Ha $\|a\| < 1$, akkor az $1 - a$ elem invertálható.*

***Bizonyítás.*** Az előző tétel közvetlen következménye.

**2.43. Tétel.** *Legyen $A$ egységelemes Banach-algebra, és jelölje $G(A)$ az $A$ invertálható elemeinek a halmazát. Ekkor*

- *minden $a \in G(A)$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq (A)$;*
- *a $G(A)$ nyílt halmaz;*
- *az $i : G(A) \to G(A)$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.*

***Bizonyítás.*** A 2.39 tételnél leírt bizonyítás ebben az esetben is érvényes változtatás nélkül. $\diamondsuit$

## 2.9. Folytonos multilineáris leképezések

**2.11. Definíció.** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $(V_i)_{i=1,\dots,n}$ vektorterek rendszere, valamint legyen $W$ is vektortér. Az

$$A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto A(x_1, \dots, x_n) \tag{2.194}$$

leképezésről azt mondjuk, hogy *multilineáris* vagy, hogy *$n$-lineáris*, ha mindegyik változójában lineáris, azaz, ha minden $j \in \{1, \dots, n\}$ indexre, minden $(x_i)_{i=1,\dots,n}, (y_i)_{i=1,\dots,n} \in \prod_{i=1}^{n} V_i$ vektorrendszere és minden $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ paraméterre

$$A(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda A(x_1, \dots, x_n) + \mu A(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \tag{2.195}$$

teljesül. A $: \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ $n$-lineáris leképezések halmazára a $\mathrm{Lin}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ jelölést használjuk.

**2.12. Definíció.** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint legyen $V$ és $W$ vektortér. Azt mondjuk, hogy az $A : V^n \to W$ függvény *szimmetrikus multilineáris leképezés*, ha minden $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ permutációra és minden $x_1, \dots, x_n \in V$ elemre

$$A(x_1, \dots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \tag{2.196}$$

teljesül. A $V^n \to W$ szimmetrikus multilineáris leképezések halmazát $\mathrm{Lin_s}^n(V^n, W)$ jelöli a továbbiakban.

**2.44. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ multilineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

1. *Az $A$ leképezés folytonos.*
2. *Az $A$ leképezés folytonos a $0$ pontban.*
3. *A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i | \ \|x_i\|_i \leq 1\}$ jelölés mellett $\sup_{x \in B} \|A(x)\|_W < \infty$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ a $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek szorzata.
$1 \Rightarrow 2$ Ha $A$ folytonos akkor minden pontban folytonos.
$2 \Rightarrow 3$ Ha $A$ folytonos a $0$ pontban, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x - 0\|_V < \delta$ esetén $\|Ax - A0\|_W < 1$. Mivel $A$ lineáris, ezért $A0 = 0$. Ha $x \in V$ olyan vektor, melyre $\|x\|_V \leq 1$ teljesül, akkor $\left\|\frac{\delta}{2} \cdot x\right\|_V < \delta$, ezért

$$\left\|A\left(\frac{\delta}{2} \cdot x\right)\right\|_W = \left(\frac{\delta}{2}\right)^n \cdot \|Ax\|_W < 1, \tag{2.197}$$

vagyis $\|Ax\|_W < \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$. Tehát minden $x \in V$, $\|x\|_V \leq 1$ esetén $\|Ax\|_W < \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$, ezért

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_W \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^n < \infty. \tag{2.198}$$

$3 \Rightarrow 2$ A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i | \ \|x_i\|_i \leq 1\}$ jelölés mellett a szorzat téren értelmezett norma definíciója alapján $B = \{x \in V | \ \|x\|_V \leq 1\}$ teljesül. Vezessük be a $K = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W$ jelölést. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, valamint $\delta = \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{K}}$. Ekkor minden $x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $\|x\|_V < \delta$ esetén

$$\|Ax - A0\|_W = \|A(x_1, \dots, x_n)\|_W = \|x\|_V^n \cdot \left\|A\left\{\frac{x_1}{\|x\|_V}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|_V}\right\}\right\|_W \leq \|x\|_V^n \cdot K < \varepsilon \tag{2.199}$$

teljesül, vagyis $A$ folytonos a $0$ pontban.
$3 \Rightarrow 1$ A $B = \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i | \ \|x_i\|_i \leq 1\}$ jelölés mellett vezessük be a $K = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W$ jelölést. Legyen $a = (a_1, \dots, a_n) \in V \setminus \{0\}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, valamint $\delta' \in ]0, 1[$ olyan paraméter, melyre $\delta' < \|a\|$ teljesül. Legyen $x \in V$ olyan, melyre $\|a - x\|_V < \delta'$. Definiáljuk a

$z_1, \ldots, z_n \in V$ vektorokat a komponensenként: a $z_i$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$) vektor $j$-edik ($j \in \{1, \ldots, n\}$) komponense legyen

$$(z_i)_j = \begin{cases} a_j, & \text{ha} \quad j < i; \\ x_j - a_j, & \text{ha} \quad j = i; \\ x_j, & \text{ha} \quad j > i. \end{cases} \tag{2.200}$$

(Vagyis például $n = 3$ esetén $z_1 = (x_1 - a_1, x_2, x_3)$, $z_2 = (a_1, x_2 - a_2, x_3)$, $z_3 = (a_1, a_2, x_3 - a_3)$.) Ekkor teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy

$$A(x) = A(a) + \sum_{k=1}^{n} A(z_k), \tag{2.201}$$

vagyis

$$\|Ax - Aa\|_W \le \sum_{k=1}^{n} \|Az_k\|_W . \tag{2.202}$$

Mivel $\|x\|_V \le \|x - a\|_V + \|a\| < 1 + \|a\|$, ezért minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\|Az_k\|_W = \|A(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k - a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\|_W = \tag{2.203}$$

$$= \|a\|_V^{k-1} \cdot \|x\|_V^{n-k} \cdot \left\| A\left( \frac{a_1}{\|a\|_V}, \ldots, \frac{a_{k-1}}{\|a\|_V}, x_k - a_k, \frac{x_{k+1}}{\|x\|_V}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|_V} \right) \right\|_W \le \tag{2.204}$$

$$\le \|a\|_V^{k-1} \cdot \|x\|_V^{n-k} \, \delta' K < \delta' K \, \|a\|_V^{k-1} \, (1 + \|a\|)^{n-k} , \tag{2.205}$$

amiből pedig

$$\|Ax - Aa\|_W \le \delta' \cdot K \sum_{k=1}^{n} \|a\|_V^{k-1} \, (1 + \|a\|)^{n-k} \tag{2.206}$$

következik. Tehát a

$$\delta = \min \left\{ 1, \|a\| , \frac{\varepsilon}{K \sum_{k=1}^{n} \|a\|_V^{k-1} \, (1 + \|a\|)^{n-k}} \right\} \tag{2.207}$$

olyan paraméter, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|a - x\|_V < \delta$ esetén $\|Ax - Aa\|_W < \varepsilon$ teljesül.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$,$(V_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, $W$ normált tér. A továbbiakban jelölje $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ az $\prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ folytonos multilineáris leképezések halmazát, és $\mathscr{L}_s{}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ a folytonos szimmetrikus leképezések halmazát.

**2.45. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Az $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ tér vektorér, melyen a*

$$\|\cdot\| : \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right) \to \mathbb{R}_0^+ \qquad A \mapsto \sup \left\{ \|Ax\|_W \in \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; x \in \prod_{i=1}^{n} \{x_i \in V_i | \ \|x_i\|_i \le 1\} \right\} \tag{2.208}$$

*leképezés norma.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és jelölje $(V, \|\cdot\|_V)$ a $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek szorzatát.

Legyen $A, B \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Mivel $A$ és $B$ folytonos, ezért a 2.44 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|_V \le 1} \|(A+B)x\|_W = \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Ax + Bx\|_W \le \sup_{\|x\|_V \le 1} (\|Ax\|_W + \|Bx\|_W) \le \tag{2.209}$$

$$\le \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Ax\|_W + \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Bx\|_W = \|A\| + \|B\|; \tag{2.210}$$

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|_V \le 1} \|\lambda Ax\|_W = |\lambda| \sup_{\|x\|_V \le 1} \|Ax\|_W = |\lambda| \cdot \|A\| \tag{2.211}$$

teljesül, vagyis $\|A+B\|, \|\lambda A\| < \infty$, ezért a 2.44 tétel alapján $A+B, \lambda A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$, vagyis $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ vektortér.

Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathscr{L}^n(V, W)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in V$ vektorra $\|x\|_V \le 1$ esetén $\|Ax\|_W = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in V \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \dfrac{x}{\|x\|_V}$ vektorra $\|x'\|_V \le 1$, ezért $Ax' = \left(\dfrac{1}{\|x\|_V}\right)^n Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

**2.46. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ és $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} V_i$. Ekkor*

$$\|Ax\|_W \le \|A\| \cdot \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_i . \tag{2.212}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, jelölje $(V, \|\cdot\|_V)$ ezen normált terek szorzatát, legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$.

Legyen $v = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ tetszőleges vektor. Ha valamelyik $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $x_i = 0$, akkor az $A$ leképezés multilinearitása miatt $Av = 0$, tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség teljesül.

Tegyük fel, hogy a $v$ vektor egyetlen komponense sem a nullvektor. A

$$v' = \left(\frac{x_1}{\|x_1\|_1}, \ldots, \frac{x_n}{\|x_n\|_n}\right) \tag{2.213}$$

vektorra $\|v'\|_V \le 1$ teljesül, tehát $\|Av'\|_W \le \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

**2.47. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere és $(W, \|\cdot\|_W)$ Banach-tér. Ekkor $\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right), \|\cdot\|\right)$ is Banach-tér.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, jelölje $(V, \|\cdot\|_V)$ ezen normált terek szorzatát és legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ Banach-tér, valamint $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ Cauchy-sorozat. Legyen $x \in V$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $a$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$, vagyis az

$$\|a_n(x) - a_m(x)\|_W \leq \|x\|_V \cdot \|a_n - a_m\| < \|x\|_V \cdot \varepsilon \tag{2.214}$$

egyenlőtlenség alapján $n \mapsto a_n(x)$ Cauchy-sorozat a $W$ teljes térben, ezért létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)$ határérték minden $x \in V$ esetén. Ennek a segítségével definiáljuk a

$$A : V \to W \qquad x \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n(x) \tag{2.215}$$

függvényt.
Megmutatjuk, hogy $A$ multilineáris leképezés. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ és $k \in \{1, \ldots, n\}$ tetszőleges. Ekkor az

$$A(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \tag{2.216}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (a_n(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) + a_n(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)) = \tag{2.217}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) + \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \tag{2.218}$$

$$= A(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) + A(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \tag{2.219}$$

$$A(x_1, \ldots, x_{k-1}, \lambda x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \ldots, x_{k-1}, \lambda x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \tag{2.220}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\lambda a_n(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)) = \tag{2.221}$$

$$= \lambda \lim_{n\to\infty} a_n(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \lambda \cdot A(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \tag{2.222}$$

egyenlőségek igazolják $A$ linearitását a $k$-adik változóban. Tehát $A$ $n$-lineáris.
Megmutatjuk, hogy $A$ folytonos lineáris leképezés. Mivel $a$ Cauchy-sorozat, ezért korlátos is, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|a_n\| < K$. Ekkor minden $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ vektorra $\|x\|_V \leq 1$ esetén a 2.46 tétel alapján

$$\|a_n x\|_W \leq \|a_n\| \cdot \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_i \leq \|a_n\| \cdot \prod_{i=1}^{n} 1 < K \tag{2.223}$$

egyenlőtlenség teljesül, amiből

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|Ax\|_W = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \left\| \lim_{n\to\infty} a_n(x) \right\|_W = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \lim_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_W \leq \tag{2.224}$$

$$\leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n(x)\|_W \leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \, \|x\|_V \leq \limsup_{n\to\infty} \|a_n\| \leq K \tag{2.225}$$

következik, ami a 2.44 tétel alapján azt jelenti, hogy $A$ folytonos multilineáris leképezés, vagyis $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$.

Azt kell még igazolni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ teljesül a $\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right), \|\cdot\|\right)$ normált térben. Ennek igazolásához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $a$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a 2.46 tétel alapján

$$\sup_{\|x\|_V \le 1} \|a_n x - a_m x\|_W \le \sup_{\|x\|_V \le 1} \|a_n - a_m\| \cdot \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_i \le \sup_{\|x\|_V \le 1} \|a_n - a_m\| \cdot \prod_{i=1}^{n} 1 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.226}$$

adódik. Ebből az $n \to \infty$ határátmenettel

$$\|A - a_m\| \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.227}$$

adódik. Így minden $m > N$ számra $\|A - a_m\| < \varepsilon$ teljesül, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

**2.48. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ véges dimenziós normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ $n$-lineáris leképezés. Ekkor $A \in \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ véges dimenziós normált terek rendszere, $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér és $A : \prod_{i=1}^{n} V_i \to W$ $n$-lineáris leképezés. Minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $(e_{k,i})_{i=1,\dots,m_k}$ a $V_k$ normált tér egy bázisa.
Minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$\|\cdot\|'_k : V_k \to \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{m_k} a_i e_{k,i} \mapsto \sum_{i=1}^{m_k} |a_i| \tag{2.228}$$

norma a $V_k$ véges dimenziós téren. A véges dimneziós vektortéren bár mely két norma ekvivalens egymással a 2.16 tétel szerint, ezért létezik olyan $C_k \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in V_k$ vektorra $\|x\|'_k \le C_k \|x\|_k$ teljesül. Legyen $C = \max\{C_k |\ k \in \{1, \dots, n\}\}$ és

$$K = \max\left\{\|A(e_{1,i_1}, e_{2,i_2}, \dots, e_{n,i_n})\|_W \mid \forall k \in \{1, \dots, n\} : i_k \in \{1, \dots, m_k\}\right\}. \tag{2.229}$$

Legyen minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_k \in V_k$ tetszőleges vektor, melyet írjunk fel a $V_k$ tér bázisában

$$x_k = \sum_{i_k=1}^{m_k} a_{k,i_k} e_{k,i_k}. \tag{2.230}$$

Az $A$ multilinearitásának a felhasználásával az

$$\|A(x_1, \dots, x_n)\|_W = \left\| A\left( \sum_{i_1=1}^{m_1} a_{1,i_1} e_{1,i_1}, \sum_{i_2=1}^{m_2} a_{2,i_2} e_{2,i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{m_n} a_{n,i_n} e_{n,i_n} \right) \right\|_W \le \tag{2.231}$$

$$\le \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} |a_{1,i_1}|\,|a_{2,i_2}| \dots |a_{n,i_n}|\, \|A(e_{1,i_1}, e_{2,i_2}, \dots, e_{n,i_n})\|_W \le \tag{2.232}$$

$$\le K \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} |a_{1,i_1}|\,|a_{2,i_2}| \dots |a_{n,i_n}| = \tag{2.233}$$

$$= K \left( \sum_{i_1=1}^{m_1} |a_{1,i_1}| \right) \left( \sum_{i_2=1}^{m_2} |a_{2,i_2}| \right) \cdot \ldots \cdot \left( \sum_{i_n=1}^{m_n} |a_{n,i_n}| \right) = \tag{2.234}$$

$$= K \|x_1\|_1' \|x_2\|_2' \cdot \ldots \cdot \|x_n\|_n' \leq \tag{2.235}$$
$$\leq KC_1C_2 \cdot \ldots \cdot C_n \|x_1\|_1 \|x_2\|_2 \cdot \ldots \cdot \|x_n\|_n \leq \tag{2.236}$$
$$\leq KC^n \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|_k \tag{2.237}$$

egyenlőtlenség adódik. A $B = \prod_{k=1}^{n} \{x_k \in V_k | \ \|x_k\|_k \leq 1\}$ jelöléssel élve a fenti egyenlőtlenség szerint

$$\sup_{x \in B} \|A(x)\|_W \leq KC^n < \infty. \tag{2.238}$$

Ez pedig a 2.44 tétel alapján garantálja $A$ folytonosságát.

**2.49. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Ekkor ${\mathscr{L}_s}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W)\right)$ zárt lineáris altere a $\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W)\right)$ térnek.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. Vezessük be a

$$\mathrm{Perm}(n) = \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \sigma \text{ bijekció}\} \tag{2.239}$$

jelölést. Minden $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} V_i$ vektorra és $\sigma \in \mathrm{Perm}(n)$ permutációra legyen

$$J_{x,\sigma} : \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right) \to W \qquad A \mapsto A(x_1, \ldots, x_n) - A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}). \tag{2.240}$$

A $J_{x,\sigma}$ leképezés nyilván lineáris, és a 2.46 tétel segítségével származtatott

$$\|J_{x,\sigma}A\|_W \leq 2\|A\| \cdot \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_i \tag{2.241}$$

egyenlőtlenség alapján folytonos is, ezért a $\overset{-1}{J}_{x,\sigma}(0)$ halmaz zárt. Mivel zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt és

$$\mathscr{L}_s\left(\mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W)\right)\right) = \bigcap_{x \in \prod_{i=1}^{n} V_i} \ \bigcap_{\sigma \in \mathrm{Perm}(n)} \overset{-1}{J}_{x,\sigma}(0), \tag{2.242}$$

ezért a $\mathscr{L}_s\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$ halmaz zárt.

**2.50. Tétel.** *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\ldots,n}$ normált terek rendszere, valamint legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér. A*

$$\rho : \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^{n} V_i, W)\right)\right) \to \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^{n} V_i, W\right) \qquad A \mapsto \Big((x_1, x_2) \mapsto (A(x_1))(x_2)\Big) \tag{2.243}$$

*leképezés izometrikus bijekció, azaz $\rho$ bijekció és minden $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)\right)$ elemre*

$$\|\rho(A)\| = \|A\| \tag{2.244}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(V_i, \|\cdot\|_i)_{i=1,\dots,n}$ normált terek rendszere, jelölje $(V', \|\cdot\|')$ a $\prod_{i=1}^n V_i$ a normált terek szorzatát, valamint legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ és $(W, \|\cdot\|_W)$ normált tér, és tekintsük a

$$\rho : \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W\right)\right) \to \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right) \qquad A \mapsto \Big((x_1, x_2) \mapsto (A(x_1))(x_2)\Big) \tag{2.245}$$

$$\eta : \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right) \to \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_{i=1}^n V_i, W)\right)\right) \qquad B \mapsto \Big(x_1 \mapsto (x_2 \mapsto B(x_1, x_2))\Big) \tag{2.246}$$

leképezéseket. Ha $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$, akkor a 2.44 tétel alapján $\|A\| < \infty$ továbbá

$$\|\rho(A)\| = \sup_{\substack{y \in V',\ \|y\|' \le 1 \\ x \in V,\ \|x\| \le 1}} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \le 1}} \sup_{\substack{y \in V' \\ \|y\|' \le 1}} \|A(x)(y)\| = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \le 1}} \|A(x)\| = \|A\| \tag{2.247}$$

teljesül, vagyis $\|\rho(A)\| < \infty$, amiből a 2.44 tétel alapján $\rho(A) \in \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W\right)$ következik, továbbá $\|\rho(A)\| = \|A\|$ miatt $\rho$ izometria.

Megmutatjuk, hogy $\rho$ lineáris. Ehhez legyen $A, B \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor minden $x \in V$ és $y \in V'$ esetén

$$\begin{aligned}
\rho(A+B)(x,y) &= ((A+B)(x))(y) = (A(x)+B(x))(y) = (A(x))(y) + (B(x))(y) = &(2.248)\\
&= \rho(A)(x,y) + \rho(B)(x,y) &(2.249)\\
\rho(\lambda A)(x,y) &= ((\lambda A)(x))(y) = (\lambda \cdot A(x))(y) = &(2.250)\\
&= \lambda \cdot (A(x))(y) = \lambda \cdot \rho(A)(x,y) &(2.251)
\end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$ és $\rho(\lambda A) = \lambda\rho(A)$, tehát $\rho$ lineáris.

Most igazoljuk, hogy $\rho$ injektív. Tegyük fel, hogy $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$ olyan, hogy $\rho(A) = 0$. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Ekkor minden $y \in V'$ esetén

$$0 = \rho(A)(x,y) = (A(x))(y), \tag{2.252}$$

vagyis $A(x) = 0$. Mivel minden $x \in V$ elemre $A(x) = 0$, ezért $A = 0$.

Ha $A \in \mathscr{L}\left(V, \mathscr{L}^n\left(\prod_i^n V_i, W)\right)\right)$, akkor minden $x \in V$ és $y \in V'$ esetén

$$((\eta(\rho(A)))(x))(y) = \rho(A)(x,y) = (A(x))(y), \tag{2.253}$$

vagyis $\eta \circ \rho = \mathrm{id}_{\mathscr{L}(V,\mathscr{L}^n(\prod_i^n V_i,W)))}$.
Ha $A \in \mathscr{L}^{n+1}\left(V \times \prod_{i=1}^{n} V_i, W\right)$, akkor minden $x \in V$ és $y \in V'$ esetén

$$(\rho(\eta(A)))(x,y) = (\eta(A)x)(y) = A(x,y), \tag{2.254}$$

vagyis $\rho \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathscr{L}^{n+1}(V \times \prod_{i=1}^n V_i, W)}$.
Tehát $\rho$ és $\eta$ egymás inverzei, ezért $\rho$ és $\eta$ bijekció. Továbbá $\eta$ lineáris leképezés inverze, ezért lineáris, továbbá $\rho$ izometrikussága miatt $\eta$ is izometria.

**2.13. Definíció.** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.

- Az $A$ *multilineáris leképezés pozitív*, ha $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \ldots, x) \geq 0$.
- Az $A$ *multilineáris leképezés negatív*, ha $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \ldots, x) \leq 0$.
- Az $A$ *multilineáris leképezés pozitív definit*, ha $\forall x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) > 0$.
- Az $A$ *multilineáris leképezés negatív definit*, ha $\forall x \in V \setminus \{0\}$ vektorra $A(x, \ldots, x) < 0$.
- Az $A$ *multilineáris leképezés szigorúan pozitív definit*, ha $\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \ldots, x) \geq K \|x\|^n$.
- Az $A$ *multilineáris leképezés szigorúan negatív definit*, ha $\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall x \in V$ vektorra $A(x, \ldots, x) \leq -K \|x\|^n$.
- Az $A$ *multilineáris leképezés indefinit*, ha $\exists x, y \in V$ melyre $A(x, \ldots, x) > 0$ és $A(y, \ldots, y) < 0$.

A következő tétel előtt emlékeztetünk arra, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és tetszőleges $X$ halmaz esetén $a \in X$, akkor $a^{[n]}$ jelöli azt az $X^n$ halmazbeli elemet, melynek minden komponense $a$, vagyis

$$a^{[n]} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{n\text{-szer}}). \tag{2.255}$$

**2.51. Tétel.** *(Polarizációs formula.) Legyen $V$ és $W$ vektortér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $A \in \mathrm{Lin}^n(V^n, W)$ szimmetrikus $n$-lineáris leképezés. Minden $x_1, \ldots, x_n \in V$ vektorra*

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{t_1,\ldots,t_n \in \{-1,1\}} t_1 \ldots t_n \cdot A\,(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n)^{[n]} \tag{2.256}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ és $W$ vektortér, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ és $A \in \mathrm{Lin}^n(V^n, W)$ szimmetrikus $n$-lineáris leképezés. Minden $z \in V$ vektor esetén definiáljuk az

$$A_z : V^{n-1} \to W \qquad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto A(z, x_1, \ldots, x_{n-1}) \tag{2.257}$$

$(n-1)$-lineáris leképezést, és legyen $x_0, x_1, \ldots, x_n \in V$ tetszőleges vektor.
Az $n = 1$ esetben

$$\frac{1}{2} \sum_{t_1 \in \{-1,1\}} t_1 A(t_1 x_1) = \frac{1}{2}\left(-A(-x_1) + A(x_1)\right) = A(x_1), \tag{2.258}$$

és az $n = 2$ esetben

$$\frac{1}{8} \sum_{t_1, t_2 \in \{0,1\}} t_1 t_2 A\,(t_1 x_1 + t_2 x_2, t_1 x_1 + t_2 x_2) = \tag{2.259}$$

$$= \frac{1}{8}\Big(A(x_1+x_2,x_1+x_2) - A(x_1-x_2,x_1-x_2) - \tag{2.260}$$

$$- A(-x_1+x_2,-x_1+x_2) + A(-x_1-x_2,-x_1-x_2)\Big) = \tag{2.261}$$

$$= \frac{1}{8}\left(4A(x_1,x_2) + 4A(-x_1,-x_2)\right) = A(x_1,x_2) \tag{2.262}$$

teljesül, tehát az $n = 1, 2$ számokra igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra igaz az állítás. Ekkor

$$A(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{t_2,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_2 \dots t_n \cdot A\left(x_1 + t_2x_2 \dots + t_nx_n\right)^{[n]} - \tag{2.263}$$

$$- t_2 \dots t_n \cdot A\left(-x_1 + t_2x_2 \dots + t_nx_n\right)^{[n]}. \tag{2.264}$$

Megmutatjuk, hogy az $n+1$ számra is igaz az állítás. Jelölje $\alpha$ az $n+1$ esetben a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát, vagyis

$$2^{n+1}(n+1)!\alpha = \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0t_1\dots t_n A\left(t_0x_0 + t_1x_1 + \dots + t_nx_n\right)^{[n+1]} = \tag{2.265}$$

$$= \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0t_1\dots t_n A_{t_0x_0+t_1x_1+\dots+t_nx_n}\left(t_0x_0 + t_1x_1 + \dots + t_nx_n\right)^{[n]} = \tag{2.266}$$

$$= \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0t_1\dots t_n \sum_{i=0}^{n} A_{t_ix_i}(t_0x_0 + \dots + t_nx_n)^{[n]} = \tag{2.267}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0t_1\dots t_n A_{t_ix_i}(t_0x_0 + \dots + t_nx_n)^{[n]}. \tag{2.268}$$

Legyen minden $i \in \{0,\dots,n\}$ esetén

$$\beta_i = \sum_{t_0,t_1,\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_0t_1\dots t_n A_{t_ix_i}(t_0x_0 + \dots + t_nx_n)^{[n]}. \tag{2.269}$$

Ha $i \in \{1,\dots,n\}$, akkor a $t_0$ és a $t_i$ indexre történő összegzést fejtsük ki.

$$\beta_i = \sum_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_1\dots t_{i-1}t_{i+1}\dots t_n \cdot \tag{2.270}$$

$$\cdot \Big(A_{x_i}(x_0 + x_i + t_1x_1 + \dots + t_{i-1}x_{i-1} + t_{i+1}x_{i+1} + \dots + t_nx_n)^{[n]} - \tag{2.271}$$

$$- A_{x_i}(-x_0 + x_i + t_1x_1 + \dots + t_{i-1}x_{i-1} + t_{i+1}x_{i+1} + \dots + t_nx_n)^{[n]} - \tag{2.272}$$

$$- A_{-x_i}(x_0 - x_i + t_1x_1 + \dots + t_{i-1}x_{i-1} + t_{i+1}x_{i+1} + \dots + t_nx_n)^{[n]} + \tag{2.273}$$

$$+ A_{-x_i}(-x_0 - x_i + t_1x_1 + \dots + t_{i-1}x_{i-1} + t_{i+1}x_{i+1} + \dots + t_nx_n)^{[n]}\Big). \tag{2.274}$$

$$\tag{2.275}$$

Ha az első és a negyedik összeadandót nézzük, akkor az $A_{-z} = -A_z$ formula és a 2.263 képlet felhasználásával

$$\sum_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_1\dots t_{i-1}t_{i+1}\dots t_n \cdot \tag{2.276}$$

$$\cdot \Big( A_{x_i}(x_0 + x_i + t_1x_1 + \dots + t_{i-1}x_{i-1} + t_{i+1}x_{i+1} + \dots + t_nx_n)^{[n]} - \tag{2.277}$$

$$- A_{x_i}(-x_0 - x_i + t_1x_1 + \dots + t_{i-1}x_{i-1} + t_{i+1}x_{i+1} + \dots + t_nx_n)^{[n]} \Big) = \tag{2.278}$$

$$= 2^n n! A_{x_i}(x_0 + x_i, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \tag{2.279}$$

adódik. Hasonlóan, ha a második és harmadik összeadandót nézzük, akkor

$$\sum_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n \in \{-1,1\}} t_1 \dots t_{i-1}t_{i+1} \dots t_n \cdot \tag{2.280}$$

$$\cdot \Big( -A_{x_i}(-x_0 + x_i + t_1x_1 + \dots + t_{i-1}x_{i-1} + t_{i+1}x_{i+1} + \dots + t_nx_n)^{[n]} + \tag{2.281}$$

$$+ A_{x_i}(x_0 - x_i + t_1x_1 + \dots + t_{i-1}x_{i-1} + t_{i+1}x_{i+1} + \dots + t_nx_n)^{[n]} \Big) = \tag{2.282}$$

$$= 2^n n! A_{x_i}(x_0 - x_i, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \tag{2.283}$$

adódik. Ezek alapján

$$\beta_i = 2^n n! A_{x_i}(2x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \tag{2.284}$$

$$= 2^{n+1} n! A_{x_i}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \tag{2.285}$$

$$= 2^{n+1} n! A(x_i, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \tag{2.286}$$

$$= 2^{n+1} n! A(x_0, x_1, \dots, x_n). \tag{2.287}$$

Tehát minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\beta_i = 2^{n+1}n!A(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Teljesen hasonlóan igazolható, hogy $\beta_0 = 2^{n+1}n!A(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Ezek alapján a

$$2^{n+1}(n+1)!\alpha = \sum_{i=0}^{n} \beta_i = \sum_{i=0}^{n} 2^{n+1} n! A(x_0, x_1, \dots, x_n) = 2^{n+1}(n+1)! A(x_0, x_1, \dots, x_n) \tag{2.288}$$

egyenletből

$$\alpha = A(x_0, x_1, \dots, x_n) \tag{2.289}$$

adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség bal oldala.

**2.52. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \neq A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.*

1. *Ha $A$ szimmetrikus pozitív vagy negatív multilineáris leképezés, akkor $n$ páros szám.*
2. *Ha $A$ szigorúan pozitív definit, akkor pozitív definit.*
3. *Ha $A$ szigorúan negatív definit, akkor negatív definit.*
4. *Ha $\dim V < \infty$ és $A$ pozitív definit, akkor szigorúan pozitív definit.*
5. *Ha $\dim V < \infty$ és $A$ negatív definit, akkor szigorúan negatív definit.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \neq A \in \mathscr{L}^n(V^n, \mathbb{R})$.
1. Tegyük fel, hogy $A$ szimmetrikus, pozitív és $n$ páratlan. Az $A$ szimmetrikussága miatt a 2.51 tétel alapján létezik olyan $z \in V$, melyre $A(z^{[n]}) = \alpha \neq 0$, valamint $A$ pozitivitása miatt $\alpha \geq 0$. Felhasználva $A$ multilinearitását és $n$ páratlanságát $A((-z)^{[n]}) = -A(z^{[n]}) = -\alpha < 0$ adódik, ami ellentmond $A$ pozitivitásának.
Ha $A$ szimmetrikus és negatív, akkor $n$ páratlanságát feltételezve hasonló gondolatmenettel kaphatunk ellentmondást.
2–3. A definíció alapján nyilvánvaló.
4. Legyen $n = \dim V$. Mivel $V$ véges dimenziós, ezért a 2.48 tétel alapján $A$ folytonos multilineáris leképezés. Tekintsük az $S = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ halmazt. Az $S$ halmaz korlátos, zárt, tehát a 2.17

tétel alapján kompakt. Vagyis az $A$ folytonos függvény korlátos ezen a kompakt halmazon, és felveszi a minimumát is. Az $A$ függvény minimumát jelölje $K \in \mathbb{R}_0^+$, vagyis minden $v \in S$ esetén $K \leq A(v^{[n]})$. Ez a $K$ szám szigorúan pozitív, ugyanis a $K = 0$ esetben a folytonos $A$ függvény valamely $v_0 \in S$ pontban felvenné a minimumát, és arra $A(v_0^{[n]}) = 0$ teljesülne, ami ellentmondana $A$ szigorú pozitivitásának.
Megmutatjuk, hogy minden $x \in V$ esetén $A(x^{[n]}) \geq K \|x\|^n$ teljesül. Ha $x = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Ha $x \neq 0$, akkor $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$, vagyis

$$K \leq A\left(\frac{x}{\|x\|}, \ldots, \frac{x}{\|x\|}\right) \tag{2.290}$$

teljesül, amiből az $A$ operátor multilinearitása miatt

$$A(x, \ldots, x) \geq K \cdot \|x\|^n \tag{2.291}$$

adódik.
5. A 4. ponthoz hasonlóan igazolható.

## 2.10. Az algebra alaptétele

**2.53. Tétel.** *Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ véges dimenziós normált tér, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és $f : V_1 \to V_2$ olyan folytonos függvény, melyre*

$$\forall C \in \mathbb{R}^+ \exists r \in \mathbb{R}^+ \forall x \in V_1 : \ r < \|x\|_1 \ \to \ C < \|f(x)\|_2 \tag{2.292}$$

$$\forall x \in V_1 : \ f(x) \neq 0 \ \to \ y \in V_1 : \ \|f(y)\|_2 < \|f(x)\|_2 \tag{2.293}$$

*teljesül. Ekkor létezik olyan $a \in V_1$, melyre $f(a) = 0$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ véges dimenziós normált tér, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és $f : V_1 \to V_2$ olyan függvény, melyre teljesülnek az állítás feltételei. Legyen $\alpha = \inf_{x \in V_1} \|f(x)\|_2$. Ekkor a $C = \alpha + 1$ számhoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in V_1$, $r < \|x\|_1$ esetén $C < \|f(x)\|_2$. A $V_1$ véges dimenziós normált térben $K = \overline{B_r(0)}$ korlátos és zárt halmaz, ezért kompakt. Az $f$ függvény a $K$ kompakt halmazon felveszi minimumát, vagyis létezik olyan $a \in K$, melyre $f(a) = \alpha$ teljesül. Ha $\alpha = 0$, akkor készen vagyunk a bizonyítással, hiszen létezik olyan $a \in V_1$, melyre $f(a) = 0$.
Ha $\alpha > 0$, akkor létezik olyan $y \in V_1$, melyre $\|f(y)\|_2 < \|f(a)\|_2$. Ekkor az $r < \|y\|_1$ esetben az

$$1 + \alpha \leq \|f(y)\|_2 < \|f(a)\|_2 = \alpha \tag{2.294}$$

ellentmondást kapjuk. A $\|y\|_1 \leq r$ esetén $y \in K$, ami pedig annak mond ellent, hogy a $K$ kompakt halmazon az $a$ pontban minimális az $\|f\|$ függvény. Tehát az $\alpha > 0$ feltevés esetén ellenmontdást kapunk, így $\alpha = 0$.

**2.54. Tétel.** *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $C \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ esetén $C < |p(z)|$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsük a

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{2.295}$$

polinomot, ahol $a_n \neq 0$. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ számra

$$|p(z)| = \left| a_n z^n + a_n z^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n z^{n-k}} \right| = |a_n| \, |z|^n \cdot \left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n z^{n-k}} \right| \tag{2.296}$$

teljesül. Mivel minden $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ esetén

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_n z^{n-k}} \right| = 0, \tag{2.297}$$

ezért létezik olyan $r_k$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $r_k < |z|$ esetén

$$\left| \frac{a_k}{a_n z^{n-k}} \right| < \frac{1}{2n}. \tag{2.298}$$

Legyen $R = \max\{r_0, \ldots, r_{n-1}\}$. Ekkor minden $z \in \mathbb{C}$, $R < |z|$ számra

$$\left| 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n z^{n-k}} \right| \geq 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n z^{n-k}} \right| > 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} = 1 - \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{2.299}$$

Tehát, ha $z \in \mathbb{C}$ és $R < |z|$, akkor

$$|p(z)| > \frac{|a_n|}{2} |z|^n , \tag{2.300}$$

ha még $1 < |z|$ is teljesül, akkor

$$|p(z)| > \frac{|a_n|}{2} |z|^n \geq \frac{|a_n|}{2} |z| . \tag{2.301}$$

Legyen $C \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter esetén

$$r = \max \left\{ R, 1, \frac{2C}{|a_n|} \right\} . \tag{2.302}$$

Ekkor minden $z \in \mathbb{C}$, $r < |z|$ számra

$$|p(z)| > C \tag{2.303}$$

teljesül.

**2.55. Tétel.** *Minden legalább elsőfokú $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomhoz minden $x \in \mathbb{C}$ esetén, ha $p(x) \neq 0$, akkor létezik olyan $y \in \mathbb{C}$, melyre $|p(y)| < |p(x)|$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsük a

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{2.304}$$

polinomot, ahol $a_n \neq 0$. Legyen $x \in \mathbb{C}$ olyan szám, melyre $p(x) \neq 0$. Alakítsuk át a $p$ polinomot az alábbiak szerint.

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k((z-x)+x)^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j} (z-x)^j x^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} (z-x)^j x^{k-j} = \tag{2.305}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (z-x)^j \left( \sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} x^{k-j} \right) \tag{2.306}$$

Minden $j \in \{0, \dots, n\}$ esetén bevezetve a $b_j = \sum\limits_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} x^{k-j}$ jelölést

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (z-x)^k \tag{2.307}$$

adódik. Mivel $p(x) \neq 0$, ezért $b_0 \neq 0$, valamint $b_n = a_n \neq 0$. Tekintsük a $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $q(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k z^k$ polinomot. Ha van olyan $y' \in \mathbb{C}$, melyre $|q(y')| < |b_0|$ teljesül, akkor készen vagyunk a bizonyítással, hiszen az $y = y' + x$ számra

$$|p(y)| = \left| \sum_{k=0}^{n} b_k (y')^k \right| = |q(y')| < |b_0| = \left| \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x)^k \right| = |p(x)| \tag{2.308}$$

teljesül.
Tehát azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan $y' \in \mathbb{C}$, melyre $|q(y')| < |b_0|$. Ehhez legyen

$$m = \min \{k \in \{1, \dots, n\} \mid b_k \neq 0\}. \tag{2.309}$$

Mivel $b_n = a_n \neq 0$, ezért $1 \leq m \leq n$. Ekkor

$$|q(z)| = \left| b_0 + b_m z^m + \sum_{k=m+1}^{n} b_k z^k \right| = |b_0| \cdot \left| 1 + \frac{b_m}{b_0} z^m + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} z^k \right|. \tag{2.310}$$

Olyan $y' \in \mathbb{C}$ számot kell találnunk, melyre

$$\left| 1 + \frac{b_m}{b_0} (y')^m + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} (y')^k \right| < 1. \tag{2.311}$$

Legyen $\omega \in \mathbb{C}$ egy olyan komplex szám, melyre $\omega^m = -\dfrac{b_0}{b_m}$ teljesül, és keressük az $y'$ értékét $t\omega$ alakban, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ekkor olyan $t \in \mathbb{R}$ számot keresünk, melyre

$$\left| 1 - t^m + t^m \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} \omega^k t^{k-m} \right| < 1. \tag{2.312}$$

Mivel $\lim\limits_{t \to 0} \sum\limits_{k=m+1}^{n} \dfrac{b_k}{b_0} \omega^k t^{k-m} = 0$, ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in \mathbb{R}$, $|t| < r_1$ esetén

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} \omega^k t^{k-m} \right| < \frac{1}{2}. \tag{2.313}$$

Legyen $t \in \,]0, \min\{1, r\}[$ tetszőleges. Mivel ekkor $1 - t^m, t^m \in \mathbb{R}^+$, ezért

$$\left| 1 - t^m + t^m \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k}{b_0} \omega^k t^{k-m} \right| \leq 1 - t^m + t^m \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} t^m < 1. \tag{2.314}$$

Tehát például $y' = \dfrac{\min\{1, r\}}{2} \omega$ olyan, melyre $|q(y')| < |b_0|$ teljesül.

**2.56. Tétel.** *(Az algebra alaptétele.) Minden legalább elsőfokú $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomnak létezik gyöke.*

***Bizonyítás.*** Minden $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legalább elsőkú polinom folytonos függvény, valamint a 2.54 és a 2.55 tétel miatt teljesülnek rá a 2.53 tétel feltételei, ezért a 2.53 tétel alapján létezik gyöke.

## 2.11. Hahn–Banach-tétel

**2.14. Definíció.** Legyen $V$ vektortér és $\varphi : V \to \mathbb{R}$ leképezés. Azt mondjuk, hogy

- $\varphi$ *szubadditív*, ha minden $x, y \in V$ esetén $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$;
- $\varphi$ *pozitív homogén*, ha minden $x \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ esetén $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$;
- $\varphi$ *szublineáris*, ha szubadditív és pozitív homogén.

**2.15. Definíció.** A $V$ valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto p(x) \tag{2.315}$$

függvényt *félnormának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $p(0) = 0$
- $\forall x \in V,\ \forall\lambda \in \mathbb{K} :\ p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$
- $\forall x, y \in V :\ p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Az $(V, p)$ párt *félnormált térnek* nevezzük, ha $V$ valós vagy komplex vektortér, és $p$ félnorma a $V$ vektortéren.

**2.57. Tétel.** *Legyen $V$ valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ha $x \in V \setminus M$, akkor létezik olyan $\tilde{f} : M \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq \tilde{f}$ és $\tilde{f} \leq \varphi|_{M\oplus\mathbb{R}x}$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $x \in V \setminus M$, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ekkor minden $u, v \in M$ esetén

$$f(u) + f(v) = f(u + v) \leq \varphi(u + v) = \varphi(u - x + x + v) \leq \varphi(u - x) + \varphi(v + x), \tag{2.316}$$

ezért

$$f(u) - \varphi(u - x) \leq \varphi(v + x) - f(v). \tag{2.317}$$

Vagyis az $\{f(u) - \varphi(u - x)|\ u \in M\}$ halmaz korlátos felülről és a $\{\varphi(v + x) - f(v)|\ v \in M\}$ halmaz korlátos alulról. Az

$$\alpha = \sup\{f(u) - \varphi(u - x)|\ u \in M\} \quad \text{és} \quad \beta = \inf\{\varphi(v + x) - f(v)|\ v \in M\}. \tag{2.318}$$

számokra $\alpha \leq \beta$ teljesül. Legyen $c \in [\alpha, \beta]$ tetszőleges és

$$\tilde{f} : M \oplus \mathbb{R}x \to \mathbb{R} \qquad u + \lambda x \mapsto f(u) + \lambda c. \tag{2.319}$$

Ekkor $f \subseteq \tilde{f}$ nyilván teljesül.
Minden $u \in M$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$c \leq \beta \leq \varphi\left(\frac{1}{\lambda}u + x\right) - f\left(\frac{1}{\lambda}u\right) = \frac{1}{\lambda}\varphi(u + \lambda x) - \frac{1}{\lambda}f(u) \tag{2.320}$$

vagyis ez alapján

$$f(u + \lambda x) = f(u) + c\lambda \leq \varphi(u + \lambda x). \tag{2.321}$$

Minden $u \in M$ és $-\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$c \geq \alpha \geq f\left(-\frac{1}{\lambda}u\right) - \varphi\left(-\frac{1}{\lambda}u - x\right) = -\frac{1}{\lambda}f(u) + \frac{1}{\lambda}\varphi(u + \lambda x) \tag{2.322}$$

vagyis ez alapján

$$f(u + \lambda x) = f(u) + c\lambda \leq \varphi(u + \lambda x). \tag{2.323}$$

Tehát minden $u \in M$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(u + \lambda x) \leq \varphi(u + \lambda x) \tag{2.324}$$

teljesül.

**2.58. Tétel.** *Legyen $V$ valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$. Ha $x \in V \setminus M$, akkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq F$ és $F \leq \varphi$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ valós vektortér, $M \subseteq V$ lineáris altér, $x \in V \setminus M$, $\varphi : V \to \mathbb{R}$ szublineáris leképezés és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $f \leq \varphi|_M$.
Legyen

$$\mathcal{A} = \{g : V \twoheadrightarrow \mathbb{R}|\ \operatorname{Dom} g \text{ lineáris altér},\ M \subseteq \operatorname{Dom} g,\ g \text{ lineáris},\ g|_M = f,\ g \leq \varphi|_{\operatorname{Dom} g}\} \tag{2.325}$$

és az $\mathcal{A}$ halmazon jelölje $\leq$ a $\subseteq$ tartalmazás relációt. Ekkor $(\mathcal{A}, \leq)$ induktívan rendezett halmaz, ezért a Kuratowski–Zorn-lemma alapján létezik maximális eleme, ezt jelöljük a $F$ szimbólummal. Mivel $F \in \mathcal{A}$, ezért $F$ az $f$ kiterjesztése és $F \leq \varphi|_{\operatorname{Dom} F}$ teljesül. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{Dom} F = V$. Ha $\operatorname{Dom} F \neq V$, akkor a 2.57 tétel alapján létezik egy $g$ valódi kiterjesztése a $F$ funkcionálnak az $\mathcal{A}$ halmazban, melyre $F \subsetneqq g$ teljesül, ami viszont ellentmond $F$ maximalitásának.

**2.59. Tétel.** *Komplex vektortér feletti lineáris funkcionált egyértelműen meghatároz a valós része. Legyen $V$ komplex vektortér és jelölje $V_\mathbb{R}$ a $V$ vektorteret az összeadással és a $\mathbb{C} \times V \to V$ szorzás $\mathbb{R} \times V \to V$ megszorításával.*

1. *Ha $f : V \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés akkor az $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$ leképezés olyan $f_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in V$ esetén $f(x) = f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)$ teljesül.*
2. *Ha $f_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, akkor az $f : V \to \mathbb{C}$, $f(x) = f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)$ olyan lineáris leképezés, melyre $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ komplex vektortér.
1. Legyen $f : V \to \mathbb{C}$ lineáris leképezés és $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$. Ekkor $f_\mathbb{R}$ nyilván additív, valamint minden $x \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_\mathbb{R}(\lambda x) = \operatorname{Re}(f(\lambda x)) = \operatorname{Re}(\lambda f(x)) = \lambda \operatorname{Re}(f(x)) = \lambda f_\mathbb{R}(x) \tag{2.326}$$

teljesül, vagyis $f_\mathbb{R}$ lineáris. Továbbá minden $x \in V$ esetén

$$f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix) = \operatorname{Re}(f(x)) - i \operatorname{Re}(f(ix)) = \operatorname{Re}(f(x)) - i \operatorname{Re}(i f(x)) = \operatorname{Re}(f(x)) + i \operatorname{Im}(f(x)) = f(x). \tag{2.327}$$

2. Legyen $f_\mathbb{R} : V \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés és minden $x \in V$ esetén legyen $f(x) = f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)$. Ekkor $f$ nyilván additív, valamint minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} f((\alpha + i\beta)x) &= f_\mathbb{R}(\alpha x + i\beta x) - i f_\mathbb{R}(i\alpha x - \beta x) = f_\mathbb{R}(\alpha x) + f_\mathbb{R}(i\beta x) - i f_\mathbb{R}(i\alpha x) + i f_\mathbb{R}(\beta x) = && (2.328)\\ &= \alpha f_\mathbb{R}(x) + \beta f_\mathbb{R}(ix) - i\alpha f_\mathbb{R}(ix) + i\beta f_\mathbb{R}(x) = (\alpha + i\beta)(f_\mathbb{R}(x) - i f_\mathbb{R}(ix)) = && (2.329)\\ &= (\alpha + i\beta) f(x) && (2.330) \end{aligned}$$

teljesül, vagyis $f$ lineáris. Az $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$ egyenlőség pedig $f$ definiálása alapján nyilvánvaóan igaz.

**2.60. Tétel.** *(Hahn–Banach-tétel.) Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, $p : V \to \mathbb{R}_0^+$ félnorma, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ olyan lineáris leképezés, melyre $|f| \leq p_M$. Ekkor létezik olyan $F : M \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés, melyre $f \subseteq F$ és $|F| \leq p$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, $p : V \to \mathbb{R}_0^+$ félnorma, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés, melyre $|f| \leq p_M$.
A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben 2.58 a tételt alkalmazva a $p$ szublineáris leképezésre azt kapjuk, hogy létezik olyan $F : V \to \mathbb{R}$ kiterjesztése az $f$ funkcionálnak, melyre $F \leq p$ teljesül. Ekkor minden $x \in V$ vektor esetén

$$F(-x) \leq p(-x) \tag{2.331}$$

miatt

$$-p(x) = -p(-x) \leq -F(-x) = F(x) \leq p(x) \tag{2.332}$$

teljesül, azaz $|F(x)| \leq p(x)$.
A $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben tekintsük a $V_\mathbb{R}$ valós vektorteret és az $f_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ f$ lineáris leképezést. Az 1. pont alapján létezik olyan $F_\mathbb{R} : V \to \mathbb{R}$ lineáris kiterjesztése az $f_\mathbb{R}$ funkcionálnak, melyre $|F_\mathbb{R}| \leq p$ teljesül. A 2.59 tétel alapján

$$F : V \to \mathbb{C} \qquad x \mapsto F_\mathbb{R}(x) - iF_\mathbb{R}(ix). \tag{2.333}$$

olyan lineáris leképezés, melyre $F_\mathbb{R} = \operatorname{Re} \circ F$ teljesül.
Ha $x \in M$, akkor

$$\operatorname{Re} f(x) = f_\mathbb{R}(x) = F_\mathbb{R}(x) = \operatorname{Re} F(x) \tag{2.334}$$

$$\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re}(if(x)) = -\operatorname{Re} f(ix) = -f_\mathbb{R}(ix) = -F_\mathbb{R}(ix) = -\operatorname{Re} F(ix) = -\operatorname{Re}(iF(x)) = \operatorname{Im} F(x), \tag{2.335}$$

vagyis $f(x) = F(x)$, tehát $F$ az $f$ kiterjesztése.
Végül megmutatjuk, hogy $|F| \leq p$. Legyen $x \in V$ tetszőleges. Ha $F(x) = 0$, akkor nyilván $|F(x)| \leq p(x)$; ezért feltesszük a továbbiakban, hogy $F(x) \neq 0$. Ekkor viszont a $z = \dfrac{F(x)}{|F(x)|}$ komplex szám egységnyi abszolútértékű és

$$|F(x)| = \overline{z} \cdot F(x) = F(\overline{z}x) = \operatorname{Re} F(\overline{z}x) = F_\mathbb{R}(\overline{z}x) \leq p(\overline{z}x) = p(x) \tag{2.336}$$

teljesül, vagyis $|F| \leq p$.

A következőkben a Hahn–Banach-tétel pár egyszerűbb következményét említjük meg.

**2.61. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. Ekkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, mely $f$ kiterjesztése és $\|f\| = \|F\|$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $M \subseteq V$ lineáris altér és $f : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés. A

$$p : V \to \mathbb{R}_0^+ \qquad x \mapsto \|f\| \cdot \|x\| \tag{2.337}$$

félnormára és az $f$ leképezésre alkalmazva a 2.60 Hahn–Banach-tételt kapjuk olyan $F : V \to \mathbb{K}$ lineáris leképezésnek a létezését, mely $f$ kiterjesztése, melyre $|F| \leq p$ teljesül. Vagyis minden $x \in V$ esetén

$$|F(x)| \leq \|x\| \cdot \|f\| \tag{2.338}$$

miatt $\|F\| \leq \|f\|$, azonban a kiterjesztés miatt $\|F\| \geq \|f\|$, tehát $\|F\| = \|f\|$.

**2.62. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ lineárisan független vektorrendszer és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tetszőleges paraméterek. Ekkor létezik olyan $F : V \to \mathbb{K}$ lineáris leképezés, hogy minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $F(x_k) = a_k$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ lineárisan független vektorrendszer és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tetszőleges paraméterek. Jelölje $M$ az $x_1, \ldots, x_n$ vektorrendszer által generált lineáris alteret. Ekkor

$$\varphi : \mathbb{K}^n \to M \qquad (c_1, \ldots, c_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \tag{2.339}$$

lineáris bijekció, továbbá

$$\eta : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \qquad (c_1, \ldots, c_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k a_k \tag{2.340}$$

lineáris leképezés. Az $f = \eta \circ \varphi^{-1} : M \to \mathbb{K}$ olyan lineáris leképezés, melyre minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $f(x_k) = a_k$ teljesül. Mivel $M$ véges dimenziós és $f$ lineáris, ezért a 2.37 tétel alapján folytonos, továbbá a 2.61 tétel alapján létezik folytonos kiterjesztése.

**2.63. Tétel.** *Ha $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor $V'$ szétválasztó.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in V$, $x \neq y$ vektor. A 2.62 tétel alapján létezik olyan $\varphi : V \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris leképezés, melyre $\varphi(x - y) = 1$ teljesül. Ekkor $\varphi \in V'$ és $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

**2.64. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*

1. *Minden $x \in V$ esetén legyen*

$$j_x : V' \to \mathbb{K} \qquad \varphi \mapsto \varphi(x). \tag{2.341}$$

*Ekkor $j_x$ folytonos lineáris leképezés.*

2. *A*

$$j : V \to V'' \qquad x \mapsto j_x \tag{2.342}$$

*leképezés lineáris és injektív.*

3. *A $j : V \to V''$ leképezés izometria, azaz minden $x \in V$ esetén*

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| \,. \tag{2.343}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. Ha $x \in V$, $\varphi_1, \varphi_2 \in V'$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor a

$$j_x(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = j_x(\varphi_1) + j_x(\varphi_2) \tag{2.344}$$
$$j_x(\lambda\varphi_1) = (\lambda\varphi_1)(x) = \lambda\varphi_1(x) = \lambda j_x(\varphi_1) \tag{2.345}$$

egyenletek alapján $j_x$ lineáris. A folytonosság a

$$\sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(x)| \leq \sup_{\varphi \in V',\ \|\varphi\| \leq 1} \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|x\| < \infty \tag{2.346}$$

egyenlőtlenségekből következik. Sőt ebben a pontban még azt is igazoltuk, hogy $\|j_x\| \leq \|x\|$.
2. Legyen $x, y \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges. Ekkor a minden $\varphi \in V'$ esetén érvényes

$$j_{x+y}(\varphi) = \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = j_x(\varphi) + j_y(\varphi) = (j_x + j_y)(\varphi) \tag{2.347}$$

$$j_{\lambda x}(\varphi) = \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda j_x(\varphi) = (\lambda j_x)(\varphi) \tag{2.348}$$

egyenlőségek miatt $j$ lineáris.
Tegyük fel, hogy valamely $x, y \in V$ esetén $j_x = j_y$. Ekkor minden $\varphi \in V'$ funkcionálra $\varphi(x) = \varphi(y)$ teljesül és mivel a 2.63 tétel miatt $V'$ szétválasztó, ez csak úgy lehet, ha $x = y$.
3. Legyen $x \in V$. Ha $x = 0$, akkor az 1. pont alapján $\|j_x\| \leq \|x\| = 0$ miatt $\|j_x\| = 0 = \|x\|$. Ha $x \neq 0$, akkor legyen $x_0 = \dfrac{x}{\|x\|}$ és tekintsük az $M = \mathbb{K}x_0$ alteret és az

$$f : M \to \mathbb{K} \qquad ax_0 \mapsto a \tag{2.349}$$

lineáris leképezést. Ekkor

$$\|f\| = \sup_{y\in M,\ \|y\|\leq 1} |f(y)| = \sup_{a\in\mathbb{K},\ |a|\cdot\|x_0\|\leq 1} |f(ax)| = \sup_{a\in\mathbb{K},\ |a|\leq 1} |a| = 1 \tag{2.350}$$

továbbá a 2.61 tétel alapján létezik olyan $F : V \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionál, melyre $f \subseteq F$ és $\|F\| = \|f\| = 1$ teljesül. Ekkor

$$\|j_x\| = \sup_{\varphi\in V',\ \|\varphi\|=1} |\varphi(x)| \geq |F(x)| = |f(x)| = |f(\|x\| \cdot x_0)| = \|x\|\,. \tag{2.351}$$

Az 1. pontban pedig láttuk, hogy $\|j_x\| \leq \|x\|$, ezért $\|j_x\| = \|x\|$.

**2.16. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a $(V, \|\cdot\|)$ normált tér *reflexív*, ha a $j : V \to V''$ leképezés szürjektív.

## 2.12. Banach egyenletes korlátosság tétele

**2.65. Tétel.** *Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.*
1. $\overline{B_1(0)} = \{x \in V|\ \|x\| \leq 1\}$
2. *Ha $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, $W$ vektortér és $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor $A(\Omega)$ is konvex.*
3. *Ha $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, akkor $\overline{\Omega}$ is konvex halmaz.*
4. *A $B_1(0)$ és a $\overline{B_1(0)}$ halmaz konvex.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.
1. egyen $x \in V$, $\|x\| = 1$ és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor az $R = \min\{r, 1\}$ számra és az $y = (1 - R/2)x$ vektorra $y \in B_1(0)$ és $y \in B_r(x)$ teljesül, vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_1(0) \cap B_r(x) \neq \emptyset$, tehát

$$\{x \in V|\ \|x\| \leq 1\} \subseteq \overline{B_1(0)}. \tag{2.352}$$

Ha $x \in V$, $\|x\| > 1$, akkor az $r = \|x\| - 1 \in \mathbb{R}^+$ számra $B_1(0) \cap B_r(x) = \emptyset$ teljesül, ugyanis, ha $y \in B_1(0) \cap B_r(x)$, akkor $\|y\| < 1$ és $\|x - y\| < r$, amiből az

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| < \|x\| - 1 + 1 = \|x\| \tag{2.353}$$

ellentmondás adódik. Ez azt jelenti, hogy $x \notin \overline{B_1(0)}$. Tehát

$$V \setminus \{x \in V|\ \|x\| \leq 1\} \subseteq V \setminus \overline{B_1(0)}, \tag{2.354}$$

amiből

$$\overline{B_1(0)} \subseteq \{x \in V|\ \|x\| \leq 1\} \tag{2.355}$$

következik.
2. Legyen $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz, $W$ vektortér és $A : V \to W$ lineáris leképezés, valamint $x, y \in A(\Omega)$ és $t \in [0, 1]$. Ekkor létezik olyan $x', y' \in \Omega$, melyre $Ax' = x$ és $Ay' = y$. Az $A$ linearitása és $\Omega$ konvexitása miatt $tx' + (1-t)y' \in \Omega$ és $A(tx' + (1-t)y') = tx + (1-t)y \in A(\Omega)$.
3. Legyen $\Omega \subseteq V$ konvex halmaz. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\overline{\Omega}$ nem konvex. Ekkor létezik olyan $x, y \in \overline{\Omega}$ és $t \in ]0, 1[$, melyre $z = tx + (1-t)y \notin \overline{\Omega}$. Mivel $\overline{\Omega}$ zárt, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \cap \overline{\Omega} = \emptyset$.
A lezárás definíciója alapján létezik olyan $x', y' \in \Omega$, melyre $\|x - x'\| < r$ és $\|y - y'\| < r$. Legyen $z' = tx' + (1-t)y'$. Mivel $\Omega$ konvex, ezért $z' \in \Omega$. A

$$\|z - z'\| = \|t(x - x') + (1-t)(y - y')\| \leq t\,\|x - x'\| + (1-t)\,\|y - y'\| < tr + (1-t)r = r \quad (2.356)$$

becslés alapján a $z' \in B_r(z) \cap \Omega \neq \emptyset$ ellentmondást kapjuk. Tehát $\overline{\Omega}$ konvex.
4. Legyen $x, y \in B_1(0)$ és $t \in [0, 1]$. Ekkor a $z = tx + (1-t)y$ pontra

$$\|z\| \leq t\,\|x\| + (1-t)\,\|y\| < t + 1 - t = 1 \quad (2.357)$$

miatt $z \in B_1(0)$ teljesül, vagyis $B_1(0)$ halmaz konvex, ekkor viszont a 3. pont alapján $\overline{B_1(0)}$ is konvex.

**2.66. Tétel.** *(Banach egyenletes korlátosság tétele.) Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $H \subseteq \mathscr{L}(U, V)$. A $H$ halmaz pontosan akkor korlátos pontonként, ha korlátos az operátornomában, azaz*

$$\forall x \in U : \sup_{A \in H} \|Ax\|_V < \infty \quad \leftrightarrow \quad \sup_{A \in H} \|A\| < \infty. \quad (2.358)$$

***Bizonyítás.*** Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $H \subseteq \mathscr{L}(U, V)$.
Tegyük fel, hogy minden $x \in U$ esetén az $\{Ax |\ A \in H\}$ halmaz korlátos a $V$ térben. Tekintsük a

$$T = \bigcap_{A \in H} \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right) \quad (2.359)$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy $A \in \mathscr{L}(U, V)$, akkor az $\overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$ halmaz konvex. Ehhez legyen $x, y \in \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$, valamint $t \in [0, 1]$ és tekintsük a $z = tx + (1-t)y$ pontot. Ekkor $Ax, Ay \in \overline{B_1(0)}$, valamint a $\overline{B_1(0)}$ halmaz konvexitása miatt

$$Az = A(tx + (1-t)y) = tAx + (1-t)Ay \in \overline{B_1(0)}, \quad (2.360)$$

vagyis $z \in \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$. Mivel konvex halmazok metszete konvex, ezért $T$ konvex.
Minden $A \in H$ esetén az $\overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right)$ halmaz zárt, hiszen zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe, valamint zárt halmazok metszete zárt, ezért $T$ zárt.
Megmutatjuk, hogy $T$ elnyelő. Legyen $x \in U \setminus \{0\}$ tetszőleges, $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $A \in H$ esetén $\|Ax\|_V < r$, valamint legyen $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| > r$ tetszőleges. Ekkor minden $A \in H$ esetén

$$\left\|A\left(\frac{1}{\lambda}x\right)\right\|_V \leq \frac{r}{|\lambda|} \leq 1, \quad (2.361)$$

vagyis minden $A \in H$ esetén $A\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \overline{B_1(0)}$, ezért

$$\frac{1}{\lambda}x \in \bigcap_{A \in H} \overset{-1}{A}\left(\overline{B_1(0)}\right) = T, \quad (2.362)$$

vagy másképp $x \in \lambda T$.
Mivel $T$ konvex, zárt, elnyelő halmaz egy Banach-térben, ezért a 2.26 tétel alapján a nullvektor környezete, azaz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_R(0) \subseteq T$. Ha $r = \frac{R}{2}$, akkor $\overline{B_r(0)} \subseteq T$. Tehát minden $x \in U$, $\|x\|_U \leq 1$ és $A \in H$ esetén

$$rx \in \overline{B_r(0)} \quad \to \quad rx \in T \quad \to \quad A(rx) \in \overline{B_1(0)} \quad \to \quad r\,\|Ax\| \leq 1 \quad \to \quad \|Ax\| \leq \frac{1}{r}. \tag{2.363}$$

Vagyis minden $A \in H$ esetén

$$\|A\| = \sup_{x\in U,\ \|x\|_U \leq 1} \|Ax\| \leq \frac{1}{r}, \tag{2.364}$$

tehát

$$\sup_{A\in H} \|A\| = \frac{1}{r} < \infty. \tag{2.365}$$

Fordítva, legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan, melyre

$$\sup_{A\in H} \|A\| < K \tag{2.366}$$

teljesül és legyen $x \in U$ tetszőleges. Ekkor

$$\sup_{A\in H} \|Ax\|_V \leq \sup_{A\in H} \|A\| \cdot \|x\|_U < K\,\|x\|_U < \infty. \tag{2.367}$$

## 2.13. Banach–Steinhaus-tétel

**2.67. Tétel.** *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(U, V)$ olyan sorozat, mely pontonként konvergens az $U$ halmazon. Ekkor $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$, valamint az $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ határérték folytonos lineáris operátor, melyre $\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|a_n\|$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(U, V)$ olyan sorozat, mely pontonként konvergens az $U$ halmazon. Tehát minden $x \in U$ esetén az $n \mapsto a_n x$ sorozat konvergens, ezért korlátos is, tehát a 2.66 Banach egyenletes korlátosság tétele alapján az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmaz korlátos az operátornormában is.
Az $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ operátorra minden $x, y \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén

$$A(x + y) = \lim_{n\to\infty} a_n(x + y) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) + a_n(y) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) + \lim_{n\to\infty} a_n(y) = Ax + Ay \tag{2.368}$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} a_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda a_n(x) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lambda Ax \tag{2.369}$$

teljesül, ezért lineáris.
Minden $x \in U$ esetén

$$\|Ax\|_V = \left\|\lim_{n\to\infty} a_n x\right\|_V = \lim_{n\to\infty} \|a_n x\|_V \leq \liminf_{n\to\infty} (\|a_n\| \cdot \|x\|) = \|x\| \liminf_{n\to\infty} \|a_n\|, \tag{2.370}$$

ezért $\|A\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|a_n\|$. Nyilván $\liminf_{n\to\infty} \|a_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|$, valamint $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$. Ezért $\|A\| < \infty$, vagyis $A$ folytonos lineáris operátor.

## 2.14. Banach nyílt leképezések tétele és közvetlen következményei

**2.68. Tétel.** *Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés. Ha létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre*

$$B_R(0) \subseteq \overline{A(B_1(0))}, \tag{2.371}$$

*akkor minden $r \in ]0, R[$ esetén*

$$B_r(0) \subseteq A(B_1(0)). \tag{2.372}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ Banach-tér, $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre $B_R(0) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$ és $c \in ]0, 1[$ tetszőleges paraméter. Ekkor felhasználva, hogy a nem nulla számmal való szorzás homeomorfizmus, valamint az $A$ operátor linearitását és folytonosságát

$$B_{cR}(0) = cB_R(0) \subseteq c\overline{A(B_1(0))} = \overline{cA(B_1(0))} = \overline{A(B_c(0))} \tag{2.373}$$

adódik, amiből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$B_{c^n R}(0) \subseteq \overline{A(B_{c^n}(0))}. \tag{2.374}$$

Legyen $y \in B_R(0)$. A lezárás definíciója alapján ekkor létezik olyan $y_0 \in A(B_1(0))$ és $x_0 \in B_1(0)$, melyre

$$\|y - y_0\| < cR, \qquad Ax_0 = y_0 \quad \text{és} \quad \|x_0\| < 1. \tag{2.375}$$

Ekkor $y - y_0 \in B_{cR}(0)$, vagyis a (2.373) képlet alapján létezik olyan $y_1 \in A(B_c(0))$ és $x_1 \in B_c(0)$, melyre

$$\|y - y_0 - y_1\| < c^2 R, \qquad Ax_1 = y_1 \quad \text{és} \quad \|x_1\| < c. \tag{2.376}$$

Ha már valamilyen $N \in \mathbb{N}$ értékig definiáltuk az $x_N$ és $y_N$ vektorokat úgy, hogy azokra minden $k \in \{0, \ldots, N\}$ esetén

$$\left\| y - \sum_{j=0}^{k} y_j \right\| < c^{k+1} R, \qquad Ax_k = y_k \quad \text{és} \quad \|x_k\| < c^k \tag{2.377}$$

teljesül, akkor a (2.374) képlet alapján létezik olyan $y_{N+1} \in A(B_{c^{N+1}}(0))$ és $x_{N+1} \in B_{c^{N+1}}(0)$, melyre

$$\left\| y - \sum_{j=0}^{N+1} y_j \right\| < c^{N+2} R, \qquad Ax_{N+1} = y_{N+1} \quad \text{és} \quad \|x_{N+1}\| < c^{N+1}. \tag{2.378}$$

Ekkor a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tétele alapján létezik egy olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{y\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| y - \sum_{k=0}^{n} y_k \right\| < c^{n+1} R \qquad Ax_n = y_n, \quad \text{és} \quad \|x_n\| < c^n. \tag{2.379}$$

Ekkor $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} y_k = y$, valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c} < \infty \tag{2.380}$$

miatt a $\sum_k x_k$ sor abszolút konvergens az $U$ Banach-térben, ezért konvergens is. Az $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ vektorra normájára a $\|x\| < \frac{1}{1-c}$ becslésünk van az a sor abszolút konvergenciájából.
Az $A$ folytonossága miatt

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} Ax_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} y_k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k = y. \tag{2.381}$$

Tehát egy rögzített $c \in ]0,1[$ paraméter esetén azt kaptuk, hogy minden $y \in B_R(0)$ vektorhoz létezik egy olyan $x \in B_{\frac{1}{1-c}}(0)$ vektor, melyre $Ax = y$.
Az $A$ linearitását kihasználva ez azt jelenti, hogy minden $y \in B_{(1-c)R}(0)$ vektorhoz létezik egy olyan $x \in B_1(0)$ vektor, melyre $Ax = y$; vagy másképp

$$B_{(1-c)R}(0) \subseteq A(B_1(0)). \tag{2.382}$$

Adott $r \in ]0,R[$ esetén ebből a $c = 1 - \frac{r}{R}$ választással kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

**2.69. Tétel.** *(Banach nyílt leképezés tétele.) Ha $(U,\|\cdot\|_U)$, $(V,\|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés, akkor az $A$ operátor pontosan akkor nyílt, ha szürjektív.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(U,\|\cdot\|_U)$, $(V,\|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés.
Tegyük fel, hogy $A$ nyílt. Ekkor az $A(B_1(0))$ halmaz is nyílt. Mivel $A0 = 0$, ezért a 0 belső pontja az $A(B_1(0))$ halmaznak, vagyis létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(0) \subseteq A(B_1(0))$. Ekkor az $A$ linearitása miatt

$$\operatorname{Ran} A = A \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_n(0)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(B_1(0)) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_r(0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{rn}(0) = V \tag{2.383}$$

teljesül, vagyis $A$ szürjektív.
Most tegyük fel, hogy $A$ szürjektív. Ekkor

$$V = A \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_n)(0). \tag{2.384}$$

Mivel $V$ teljes metrikus tér, ezért a Baire-féle kategóritétel miatt nem áll elő megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként. Tehát létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\operatorname{Int} \overline{A(B_n(0))} \neq \emptyset$. Mivel a nem nulla számmal való szorzás lineáris homeomorfizmus és $A$ lineáris, ezért

$$\operatorname{Int} \overline{A(B_n(0))} = \operatorname{Int} \overline{A(nB_1(0))} = \operatorname{Int} \overline{nA(B_1(0))} = \operatorname{Int} \left(n\overline{A(B_1(0))}\right) = n \operatorname{Int} \overline{A(B_1(0))} \neq \emptyset. \tag{2.385}$$

Legyen $z \in \operatorname{Int} \overline{A(B_1(0))}$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$, valamint a $B_1(0)$ halmaz szimmetrikussága és $A$ linearitása miatt $B_r(-z) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$ is teljesül. A 2.65 tétel alapján $\overline{A(B_1(0))}$ konvex halmaz. Ha $x \in U$ olyan, hogy $\|x\| < r$, akkor $x + z \in B_r(z)$ és $x - z \in B_r(-z)$ miatt $x + z, x - z \in \overline{A(B_1(0))}$, vagyis a konvexitás miatt

$$x = \frac{1}{2}(x+z) + \frac{1}{2}(x-z) \in \overline{A(B_1(0))}. \tag{2.386}$$

Tehát $B_r(0) \subseteq \overline{A(B_1(0))}$. Ekkor viszont a 2.68 tétel miatt az $R = \frac{r}{2}$ számra $B_R(0) \subseteq A(B_1(0))$ teljesül.

Ennek a segítségével megmutatjuk, hogy $A$ nyílt leképezés. Legyen $\Omega \subseteq U$ nyílt halmaz és $y \in A(\Omega)$. Ekkor létezik olyan $x \in \Omega$, melyre $Ax = y$, továbbá létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_c(x) \subseteq \Omega$. Így

$$A(\Omega) \supseteq A(B_c(x)) = A(x+B_c(0)) = A(x+cB_1(0)) = Ax+cA(B_1(0)) \supseteq y+cB_R(0) = B_{Rc}(y) \quad (2.387)$$

miatt $y$ belső pontja az $\Omega$ halmaznak.

**2.70. Tétel.** *(Banach tétele a folytonos inverz létezéséről.) Ha $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris bijekció, akkor $A^{-1}$ is folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és $A : U \to V$ folytonos lineáris bijekció. Ekkor $A$ szürjektív, vagyis 2.69 Banach nyílt leképezés tétele alapján nyílt is. Ami a folytonosság topologikus jellemzése alapján éppen azt jelenti, hogy $A^{-1}$ folytonos.

**2.17. Definíció.** Azt mondjuk, hogy a $V$ vektortéren értelmezett $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ norma *összehasonlítható*, ha létezik olyan $C_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_1 \le C_1 \|\cdot\|_2$ teljesül, vagy létezik olyan $C_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_2 \le C_2 \|\cdot\|_1$ teljesül.

**2.71. Tétel.** *Legyen $V$ vektortér, valamint $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ olyan norma a $V$ vektortéren, mellyel $V$ Banach-tér. Ha $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ összehasonlítható, akkor $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalens normák.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ vektortér, valamint $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ olyan norma a $V$ vektortéren, mellyel $V$ Banach-tér. Tegyük fel, hogy létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, melyre $\|\cdot\|_1 \le C_1 \|\cdot\|_2$ teljesül. Tekintsük az

$$\mathrm{id}_V : (V, \|\cdot\|_2) \to (V, \|\cdot\|_1) \qquad x \mapsto x \quad (2.388)$$

lineáris leképezést. Ez a

$$\sup_{\|x\|_2 \le 1} \|\mathrm{id}_V(x)\|_1 = \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|x\|_1 \le \sup_{\|x\|_2 \le 1} C \|x\|_2 = C < \infty \quad (2.389)$$

egyenlőtlenség alapján folytonos. Ezért a 2.70 folytonos inverzről szóló tétel alapján $\mathrm{id}_V$ inverze is folytonos, vagyis

$$\sup_{\|x\|_1 \le 1} \left\|\mathrm{id}_V^{-1}(x)\right\|_2 < \infty. \quad (2.390)$$

Ha $K \in \mathbb{R}^+$ jelöli a fenti képletben szereplő szuprémumot, akkor minden $x \in V$, $\|x\|_1 \le 1$ esetén $\|x\|_2 \le K$ teljesül. Vagyis ha $x \in V \setminus \{0\}$ tetszőleges, akkor $\left\|\frac{1}{\|x\|_1} x\right\|_1 \le 1$ miatt $\left\|\frac{1}{\|x\|_1} x\right\|_2 \le K$, azaz $\|x\|_2 \le K \|x\|_1$. Amivel igazoltuk, hogy a $\|\cdot\|_1$ és a $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek.

## 2.15. Zárt gráf tétel

**2.18. Definíció.** Legyen $X, Y$ halmaz és $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény. Az $f$ *függvény gráfjának* nevezzük a $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in \mathrm{Dom}\, f\}$ halmazt.

A halmazelméletben éppen a függvény gráfján keresztül vezettük be a függvényeket, vagyis szigorúan véve $\Gamma(f) = f$.

**2.19. Definíció.** Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. Azt mondjuk, hogy $A$ *zárt*, ha $\Gamma(A)$ zárt halmaz az $U \times V$ szorzattérben.

**2.72. Tétel.** *Legyen* $(U, \|\cdot\|_U)$ *és* $(V, \|\cdot\|_V)$ *normált tér, valamint* $A : U \twoheadrightarrow V$ *lineáris leképezés. Az* $A$ *leképezés pontosan akkor zárt, ha minden olyan* $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ *konvergens sorozatra, melyre az* $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens teljesül, hogy* $\lim_{n\to\infty} x_n \in \operatorname{Dom} A$ *és*

$$A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n. \tag{2.391}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ normált tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris leképezés. A $\Gamma(A)$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden benne haladó konvergens sorozat határértéke eleme a $\Gamma(A)$ halmaznak. Ha $z : \mathbb{N} \to \Gamma(A)$ konvergens sorozat, akkor létezik olyan $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $z_n = (x_n, Ax_n)$ teljesül, valamint $z$ konvergenciája miatt az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens. Tehát $\Gamma(A)$ pontosan akkor zárt, ha minden ilyen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} z_n \in \Gamma(A)$, vagyis $\lim_{n\to\infty} (x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$, ami másképp $\lim_{n\to\infty} x_x \in \operatorname{Dom} A$ és $A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n$ teljesülését jelenti.

**2.73. Tétel.** *Zártgráf-tétel Legyen* $(U, \|\cdot\|_U)$ *és* $(V, \|\cdot\|_V)$ *Banach-tér, valamint* $A : U \twoheadrightarrow V$ *lineáris altéren értelmezett lineáris leképezés. Ekkor az alábbi állítások közül bármely kettő maga után vonja a harmadikat.*

*i.* $\operatorname{Dom} A$ *zárt;*

*ii.* $\Gamma(A)$ *zárt;*

*iii.* $A$ *folytonos.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(U, \|\cdot\|_U)$ és $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér, valamint $A : U \twoheadrightarrow V$ lineáris altéren értelmezett lineáris leképezés.
Tegyük fel, hogy $\operatorname{Dom} A$ és $\Gamma(A)$ zárt. Mivel $\operatorname{Dom} A$ zárt lineáris altere egy teljes térnek, ezért teljes is, vagyis $(\operatorname{Dom} A, \|\cdot\|_U |_{\operatorname{Dom} A})$ Banach-tér. Mivel $U \times V$ is Banach-tér és ennek $\Gamma(A)$ zárt altere, ezért $\Gamma(A)$ is Banach-tér a szorzatnorma megszorításával. A

$$\operatorname{pr}_U : U \times V \to U \qquad (x, y) \mapsto x \tag{2.392}$$

$$\operatorname{pr}_V : U \times V \to V \qquad (x, y) \mapsto y \tag{2.393}$$

projekciók folytonos lineáris leképezések, ezért a

$$\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)} : \Gamma(A) \to \operatorname{Dom} A \qquad (x, Ax) \mapsto x \tag{2.394}$$

$$\operatorname{pr}_V |_{\Gamma(A)} : \Gamma(A) \to \operatorname{Ran} A \qquad (x, Ax) \mapsto Ax \tag{2.395}$$

megszorításuk is folytonos. Így $\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)}$ Banach-terek között ható folytonos lineáris bijekció, vagyis a folytonos inverz létezéséről szóló 2.70 tétel alapján a

$$\left(\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)}\right)^{-1} : \operatorname{Dom} A \to \Gamma(A) \qquad x \mapsto (x, Ax) \tag{2.396}$$

leképezés folytonos. Ekkor viszont $A = \operatorname{pr}_V |_{\Gamma(A)} \circ \left(\operatorname{pr}_U |_{\Gamma(A)}\right)^{-1}$ miatt $A$ folytonos leképezések kompozíciója, tehát folytonos.
Tegyük fel, hogy $\operatorname{Dom} A$ zárt és $A$ folytonos. Legyen $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ tetszőleges konvergens sorozat a $z = \lim_{n\to\infty} x_n$ határértékkel. Mivel $\operatorname{Dom} A$ zárt, ezért $z \in A$, valamit $A$ folytonossága miatt

$$A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Ax_n. \tag{2.397}$$

Ezért a 2.72 tétel alapján $\Gamma(A)$ zárt.
Tegyük fel, hogy $\Gamma(A)$ zárt és $A$ folytonos. Legyen $x : \mathbb{N} \to \operatorname{Dom} A$ konvergens sorozat, és legyen

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $z_n = (x_n, Ax_n) \in \Gamma(A)$. Ekkor minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|(x_n, Ax_n) - (x_m, Ax_m)\| = \|(x_n - x_m, A(x_n - x_m))\| = \max\{\|x_n - x_m\|_U, \|A(x_n - x_m)\|_V\} \leq \tag{2.398}$$

$$\leq \max\{\|x_n - x_m\|_U, \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_U\} < (1 + \|A\|)\|x_n - x_m\|_U, \tag{2.399}$$

amiből adódik, hogy $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\Gamma(A)$ teljes térben, vagyis létezik a határértéke és a határértéke is benne van a $\Gamma(A)$ térben. Ezért $\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} Ax_n\right) \in \Gamma(A)$ miatt $\lim_{n\to\infty} x_n \in \operatorname{Dom} A$. Tehát $\operatorname{Dom} A$ zárt halmaz.

## 2.16. Approximáció folytonos függvényekkel

**2.20. Definíció.** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to V$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az *$f$ függvény $n$-edik Bernstein-polinomjának* nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \to V \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)(t-a)^k (b-t)^{n-k} \tag{2.1}$$

polinomot.

**2.74. Tétel.** *(Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to V$ folytonos függvény. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[a,b]} \left\|B_n^f(t) - f(t)\right\|\right) = 0. \tag{2.2}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \to V$ folytonos függvény, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $[a, b]$ kompakt halmaz és $f$ folytonos, ezért: $f$ korlátos, vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [a, b]$ pontra $\|f(t)\| < C$; valamint a Heine-tétel miatt $f$ egyenletesen folytonos, vagyis a később rögzítendő $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t, t' \in [a, b]$, $|t - t'| < \delta$ esetén $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon'$ teljesül. Legyen $t \in [a, b]$ és $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor

$$\left\|B_n^f(t) - f(t)\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right)\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}\right\|. \tag{2.3}$$

Tekintsük az

$$I_n = \left\{k \in \{0, \ldots, n\} \mid \left|a + \frac{k}{n}(b-a) - t\right| < \delta\right\} \tag{2.4}$$

$$J_n = \left\{k \in \{0, \ldots, n\} \mid \left|a + \frac{k}{n}(b-a) - t\right| \geq \delta\right\} \tag{2.5}$$

halmazokat. Ekkor $I_n \cap J_n = \emptyset$ és $I_n \cup J_n = \{0, \ldots, n\}$, vagyis a 2.3 egyenlet alapján

$$\left\|B_n^f(t) - f(t)\right\| \leq \sum_{k\in I_n} \binom{n}{k}\left\|f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t)\right\|\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k} + \tag{2.6}$$

$$+\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}\left\|f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)-f(t)\right\|\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}\le \tag{2.7}$$

$$\le\sum_{k\in I_n}\binom{n}{k}\cdot\varepsilon'\cdot\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}+\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}\cdot 2C\cdot\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}\le \tag{2.8}$$

$$\le\varepsilon'\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}+2C\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}= \tag{2.9}$$

$$=\varepsilon'+2C\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}. \tag{2.10}$$

Ha $k\in J_n$, akkor definíció szerint

$$\left|a+\frac{k}{n}(b-a)-t\right|\ge\delta, \tag{2.11}$$

amiből

$$\frac{(b-a)^2}{\delta^2n^2}\cdot\left(k-\frac{t-a}{b-a}\cdot n\right)^2\ge 1 \tag{2.12}$$

adódik. Ezért

$$\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}\le\frac{(b-a)^2}{\delta^2n^2}\sum_{k\in J_n}\binom{n}{k}\left(k-\frac{t-a}{b-a}\cdot n\right)^2\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-k}\le \tag{2.13}$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{\delta^2n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}, \tag{2.14}$$

ahol $x=\dfrac{t-a}{b-a}$. Minden $y,z\in\mathbb{R}$ esetén

$$(y+z)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^kz^{n-k}, \tag{2.15}$$

melynek $y$ szerinti első és második deriváltjából

$$ny(y+z)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}ky^kz^{n-k} \tag{2.16}$$

$$n(n-1)y^2(y+z)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)y^kz^{n-k} \tag{2.17}$$

adódik. Ha $z=1-y$, akkor ezekből

$$ny=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}ky^k(1-y)^{n-k} \tag{2.18}$$

$$n(n-1)y^2+ny=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2y^k(1-y)^{n-k} \tag{2.19}$$

következik, vagyis

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x). \tag{2.20}$$

Figyelembe véve, hogy $|x|, |1-x| \leq 1$

$$\left\| B_n^f(t) - f(t) \right\| \leq \varepsilon' + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n} \tag{2.21}$$

adódik. Vagyis ha $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám, melyre $N > \dfrac{4C(b-a)^2}{\delta^2 \varepsilon}$ teljesül, akkor minden $n > N$ és $t \in [a, b]$ esetén

$$\left\| B_n^f(t) - f(t) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n} \leq \varepsilon, \tag{2.22}$$

ezért

$$\sup_{t \in [a,b]} \left\| B_n^f(t) - f(t) \right\| \leq \varepsilon. \tag{2.23}$$

**2.21. Definíció.** Legyen $T$ tetszőleges, nem üres halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$.

- Azt mondjuk, hogy az *$A$ halmaz szétválasztó $T$ felett*, vagy röviden *szétválasztó*, ha minden $x, y \in T$ elemre $x \neq y$ esetén van olyan $f \in A$, melyre $f(x) \neq f(y)$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az *$A$ halmaz lineáris függvényháló*, ha lineáris altere az $\mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ térnek, valamint minden $f \in A$ esetén $|f| \in A$.

**2.75. Tétel.** *Legyen $T$ halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ függvényháló. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, ha $f_1, \ldots, f_n \in A$, akkor*

$$\sup\{f_1, \ldots, f_n\}, \inf\{f_i, \ldots, f_n\} \in A \tag{2.24}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $T$ halmaz és $A \subseteq \mathcal{F}(T, \mathbb{K})$ lineáris függvényháló, valamint legyen $f, g \in A$. Mivel minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sup(x, y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} \qquad \inf(x, y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2} \tag{2.25}$$

teljesül, ezért

$$\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \qquad \inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}, \tag{2.26}$$

vagyis $\sup(f, g), \inf(f, g) \in A$. Ebből következik, hogy véges sok $A$ halmazban lévő függvény infimuma és szuprémuma is eleme az $A$ halmaznak.

**2.76. Tétel.** *(Stone-tétel.) Legyen $(T, d_T)$ kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(T, \mathbb{R})$ olyan lineáris függvényháló, amely tartalmazza a konstans függvényeket. Az $A$ halmaz pontosan akkor szétválasztó $T$ felett, ha $A$ sűrű a $(C(T, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(T, d_T)$ kompakt metrikus tér.
1. Legyen $A \subseteq C(T, \mathbb{R})$ olyan szétválasztó függvényháló, amely tartalmazza a konstans függvényeket. Legyen továbbá $f \in C(T, \mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy létezik $u \in A$, melyre $\|f - u\|_{\sup} < \varepsilon$ teljesül. Legyen $x, y \in T$ tetszőleges, ha $x \neq y$, akkor létezik olyan $h_{x,y} \in A$, melyre $h_{x,y}(x) \neq h_{x,y}(y)$, ekkor legyen $u_{x,y} : T \to \mathbb{R}$

$$u_{x,y}(t) = \frac{h_{x,y}(t) - h_{x,y}(x)}{h_{x,y}(y) - h_{x,y}(x)} \cdot (f(y) - f(x)) + f(x); \tag{2.27}$$

ha $x = y$, akkor legyen $u_{x,y} : T \to \mathbb{R}$

$$u_{x,y}(t) = f(x). \tag{2.28}$$

Mivel $A$ lineáris altér, ezért minden $x, y \in T$ esetén $u_{x,y} \in A$, valamint $u_{x,y}(x) = f(x)$ és $u_{x,y}(y) = f(y)$. Minden $x, y \in T$ esetén legyen

$$U_{x,y} = \{t \in T |\ u_{x,y}(t) > f(t) - \varepsilon\}. \tag{2.29}$$

Ekkor $U_{x,y} \subseteq T$ nyílt halmaz, hiszen az $U_{x,y} = \overset{-1}{(u_{x,y} - f)}(]-\varepsilon, \infty[)$ azonosság miatt $U_{x,y}$ nyílt halmaz folytonos függvény általi ősképe. Az $U_{x,y}$ konstrukciója folytán

$$T = \bigcup_{y \in T} U_{x,y}, \tag{2.30}$$

amiből $T$ kompaktsága miatt következik, hogy létezik véges sok $y_1, \ldots, y_n$, melyre

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x,y_i}. \tag{2.31}$$

Minden $x \in T$ esetén legyen $u_x : T \to \mathbb{R}$

$$u_x = \sup\{u_{x,y_i} |\ i \in \{1, \ldots, n\}\}. \tag{2.32}$$

Mivel $A$ lineáris függvényháló, ezért a 2.75 tétel alapján $u_x \in A$, valamint minden $t \in T$ pont esetén $u_x(t) > f(t) - \varepsilon$. Most minden $x \in T$ esetén legyen

$$U_x = \{t \in T |\ u_x(t) < f(t) + \varepsilon\}. \tag{2.33}$$

Ekkor $U_x \subseteq T$ nyílt halmaz, hiszen az $U_x = \overset{-1}{(u_{x,y} - f)}(]-\infty, \varepsilon[)$ azonosság miatt $U_x$ nyílt halmaz folytonos függvény általi ősképe. Az $U_x$ konstrukciója folytán

$$T = \bigcup_{x \in T} U_x, \tag{2.34}$$

amiből $T$ kompaktsága miatt következik, hogy létezik véges sok $x_1, \ldots, x_m$, melyre

$$T = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}. \tag{2.35}$$

Ekkor legyen $u : T \to \mathbb{R}$

$$u = \inf\{u_{x_i} |\ i \in \{1, \ldots, m\}\}. \tag{2.36}$$

Mivel $A$ lineáris függvényháló ezért a 2.75 tétel alapján $u \in A$, valamint minden $t \in T$ esetén

$$f(t) - \varepsilon < u(t) < f(t) + \varepsilon. \tag{2.37}$$

Tehát $\|f - u\|_{\sup} < \varepsilon$, ezért $\overline{A} = C(T, \mathbb{R})$.
2. Legyen $A \subseteq C(T, \mathbb{R})$ olyan lineáris függvényháló, amely tartalmazza a konstans függvényeket. Tegyük fel, hogy az $A$ halmaz sűrű a $(C(T, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben. Megmutatjuk, hogy ekkor az $A$ halmaz szétválasztó is. Ehhez legyen $x, y \in T$, $x \neq y$. Ekkor a 1.70 tétel alapján létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $f(x) = 0$ és $f(y) = 1$ teljesül. Mivel az $A$ halmaz sűrű a folytonos függvények terében, ezért létezik olyan $u \in A$ függvény, melyre $\|f - u\|_{\sup} < \dfrac{1}{2}$ teljesül. Ekkor $-\dfrac{1}{2} < u(x) < \dfrac{1}{2}$ és $\dfrac{1}{2} < u(y) < \dfrac{3}{2}$, vagyis $u(x) \neq u(y)$.

**2.77. Tétel.** *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen $(T, d_T)$ kompakt metrikus-tér és legyen $A \subseteq C(T, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely tartalmazza a konstans függvényeket. Az $A$ halmaz pontosan akkor szétválasztó $T$ felett, ha $A$ sűrű a $(C(T, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(T, d_T)$ kompakt metrikus tér.
1. Legyen $A \subseteq C(T, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket. Megmutatjuk, hogy $\overline{A}$ olyan szétválasztó lineáris függvényháló, mely tartalmazza a konstans függvényeket, ekkor ugyanis a Stone-tétel miatt $\overline{\overline{A}} = C(T, \mathbb{R})$ teljesül. Az nyilvánvaló, hogy $\overline{A}$ lineáris altér, szétválasztó és tartalmazza a konstans függvényeket, egyedül az szorul igazolásra, hogy minden $f \in \overline{A}$ esetén $|f| \in \overline{A}$.
Először megmutatjuk, hogy minden $f \in A$ esetén $|f| \in \overline{A}$. Ehhez legyen $f \in A$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f$ kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért az értékkészlete is kompakt halmaz, vagyis létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $\operatorname{Ran} f \subseteq [-c, c]$. A $\sqrt{\ } : [0, c^2] \to [0, c]$ függvény kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért létezik olyan $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom, melyre

$$\sup_{x \in [0, c^2]} \left|p(x) - \sqrt{x}\right| < \varepsilon. \tag{2.38}$$

Ekkor

$$\sup_{t \in T} \left||f(t)| - (p \circ f^2)(t)\right| \leq \sup_{y \in [-c, c]} \left||y| - p(y^2)\right| = \sup_{x \in [0, c^2]} \left|\sqrt{x} - p(x)\right| < \varepsilon. \tag{2.39}$$

Mivel $A$ algebra, ezért $\tilde{f} = p \circ f^2 \in A$ olyan elem, melyre $\left\||f| - \tilde{f}\right\|_{\sup} < \varepsilon$, vagyis $|f| \in \overline{A}$.
Most megmutatjuk, hogy minden $f \in \overline{A}$ esetén $|f| \in \overline{A}$. Ehhez legyen $f \in \overline{A}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Létezik olyan $f_A \in A$, melyre $\|f - f_A\|_{\sup} < \varepsilon$. Ekkor $|f_A| \in \overline{A}$, valamint

$$\||f| - |f_A|\|_{\sup} \leq \|f - f_A\|_{\sup} < \varepsilon \tag{2.40}$$

miatt $|f| \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
2. Legyen $A \subseteq C(T, \mathbb{R})$ olyan algebra, amely tartalmazza a konstans függvényeket, valamint tegyük fel, hogy az $A$ halmaz sűrű a $(C(T, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben. Megmutatjuk, hogy ekkor az $A$ halmaz szétválasztó is. Ehhez legyen $x, y \in T$, $x \neq y$. Ekkor a 1.70 tétel alapján létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $f(x) = 0$ és $f(y) = 1$ teljesül. Mivel az $A$ halmaz sűrű a folytonos függvények terében, ezért létezik olyan $u \in A$ függvény, melyre $\|f - u\|_{\sup} < \frac{1}{2}$ teljesül. Ekkor $-\frac{1}{2} < u(x) < \frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2} < u(y) < \frac{3}{2}$, vagyis $u(x) \neq u(y)$.

**2.78. Tétel.** *(Stone–Weierstrass-tétel.) Legyen $(T, d_T)$ kompakt metrikus tér és legyen $A \subseteq C(T, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket, valamint minden $f \in A$ elemre $\overline{f} \in A$. Az $A$ halmaz pontosan akkor szétválasztó $T$ felett, ha $A$ sűrű a $(C(T, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben.*

***Bizonyítás.*** Legyen $(T, d_T)$ kompakt metrikus tér.
1. Legyen $A \subseteq C(T, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely szétválasztó, tartalmazza a konstans függvényeket és zárt a konjugálásra nézve. Megmutatjuk, hogy

$$A' = \{\operatorname{Re} \circ u |\ u \in A\} \tag{2.41}$$

olyan függvényalgebra, mely szétválasztó, tartalmazza a konstans függvényeket, és melyre melyre $A' \subseteq A$ teljesül. Mivel $A$ zárt a konjugálásra, ezért ha $a \in A'$ és $u \in A$ olyan, hogy $a = \operatorname{Re} u$, akkor az

$$a = \frac{u + \overline{u}}{2} \tag{2.42}$$

egyenlet alapján $a \in A$. Vagyis $A' \subseteq A$. Ha $a_1, a_2 \in A'$, akkor létezik olyan $u_1, u_2 \in A$, melyre $a_1 = \mathrm{Re} \circ u_1$ és $a_2 = \mathrm{Re} \circ u_2$ teljesül. Mivel $A$ algebra és zárt a konjugálásra, ezért az

$$a_1 a_2 = \mathrm{Re}(u_1) \cdot \mathrm{Re}(u_2) = \frac{u_1 + \overline{u_1}}{2} \cdot \frac{u_2 + \overline{u_2}}{2} \tag{2.43}$$

egyenlet alapján az $u = \dfrac{u_1 + \overline{u_1}}{2} \cdot \dfrac{u_2 + \overline{u_2}}{2}$ elemre $u \in A$ és $a_1 a_2 = \mathrm{Re} \circ u$ teljesül, tehát $a_1 a_2 \in A'$. Az $u = \dfrac{u_1 + \overline{u_1}}{2} + \dfrac{u_2 + \overline{u_2}}{2}$ elemre $u \in A$ és $a_1 + a_2 = \mathrm{Re} \circ u$ teljesül, tehát $a_1 + a_2 \in A'$. Hasonlóan igazolható, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda a_1 \in A'$. Tehát $A'$ olyan függvényalgebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket. Ha $x, y \in T$ olyan, hogy $x \neq y$, akkor létezik olyan $u \in A$, melyre $u(x) \neq u(y)$. Ha $\mathrm{Re}(u(x)) \neq \mathrm{Re}(u(y))$, akkor az $a = \mathrm{Re}(u) \in A'$ olyan elem, melyre $a(x) \neq a(y)$; valamint, ha $\mathrm{Im}(u(x)) \neq \mathrm{Im}(u(y))$, akkor az $a = \mathrm{Re}(\mathrm{i} \cdot u) \in A'$ olyan elem, melyre $a(x) \neq a(y)$, tehát $A'$ szétválasztó.

2. Legyen $f \in C(T, \mathbb{C})$ tetszőleges elem és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $f_1 = \dfrac{f + \overline{f}}{2}$ és $f_2 = \dfrac{f - \overline{f}}{2\,\mathrm{i}}$ függvényekre $f = f_1 + \mathrm{i}\, f_2$ és $f_1, f_2 \in C(T, \mathbb{R})$ teljesül. Ezért a 2.77 Stone–Weierstrass-tétel értelmében létezik olyan $g_1, g_2 \in A' \subseteq A$ függvény, melyre $\|f_1 - g_1\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $\|f_2 - g_2\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $g = g_1 + \mathrm{i}\, g_2$. Ekkor $g \in A$, valamint

$$\|f - g\|_{\sup} = \|(f_1 - g_1) + \mathrm{i}(f_2 - g_2)\|_{\sup} \leq \|f_1 - g_1\|_{\sup} + \|f_2 - g_2\|_{\sup} < \varepsilon \tag{2.44}$$

teljesül.

3. Legyen $A \subseteq C(T, \mathbb{C})$ olyan algebra, mely tartalmazza a konstans függvényeket, és minden $f \in A$ elemre $\overline{f} \in A$, valamint tegyük fel, hogy az $A$ halmaz sűrű a $(C(T, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\sup})$ térben. Megmutatjuk, hogy ekkor az $A$ halmaz szétválasztó is. Ehhez legyen $x, y \in T$, $x \neq y$. Ekkor a 1.70 tétel alapján létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $f(x) = 0$ és $f(y) = 1$ teljesül. Mivel az $A$ halmaz sűrű a folytonos függvények terében, ezért létezik olyan $u \in A$ függvény, melyre $\|f - u\|_{\sup} < \dfrac{1}{2}$ teljesül. Ekkor $|u(x)| < \dfrac{1}{2}$ és $|u(y) - 1| < \dfrac{1}{2}$, vagyis $u(x) \neq u(y)$.

Az előbbi tételből következik az alábbi.

**2.79. Tétel.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Ekkor a $C(K, \mathbb{R})$ halmazban a polinomok sűrű részhalmazt alkotnak.*

**Kiegészítés.** Természetes kérdés, hogy az identitásfüggvénynek mely hatványai feszítenek ki sűrű alteret a $C([0,1], \mathbb{R})$ térben. Erre ad választ az alábbi tétel. A $\left\{ \mathrm{id}_{[0,1]}^{\lambda_k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ általánosított polinomokhoz tartozó Bernstein-féle polinomot Gelfond adta meg.

**2.80. Tétel.** *(Approximáció Bernstein-polinomokkal, Hirschman–Widder–Gelfond-tétel.) Legyen $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olyan szigorúan monoton növekedő sorozat, melyre $\lambda_0 = 0$, $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n} = \infty$, továbbá legyen $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Ekkor*

$$\lim_{n \to \infty} \left( \sup_{t \in [0,1]} \left| B_n^{\lambda, f}(x) - f(x) \right| \right) = 0. \tag{2.45}$$

$\diamondsuit$

# 3 Differenciálszámítás II.

## 3.1. Differenciálhatóság

A jelen fejezetben követjük azt a matematika irodalomban elterjedt konvenciót, hogy normált térre pusztán az alaphalmaz kiírásával hivatkozunk, és a normát nem említjük amennyiben ez nem okoz félreértést. Továbbá $U$, $V$ normált terek és $A : U \to V$ folytonos lineáris leképezés esetén $\|A\|$ az operátornormát jelenti, vagyis

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in U \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\| . \tag{3.1}$$

Valamint a jelen fejezetben csak $\mathbb{R}$ feletti normált terekkel foglalkozunk.

**3.1. Tétel.** *Legyen $U$ és $V$ normált tér, $f : U \to V$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy $u, v \in \mathscr{L}(U, V)$, melyre*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \tag{3.2}$$

*teljesül. Ekkor $u = v$.*

***Bizonyítás.*** Legyen $U$ és $V$ normált tér, $f : U \to V$ függvény, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ és legyen $u, v \in \mathscr{L}(U, V)$ olyan, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - u(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - v(x-a)}{\|x-a\|} = 0. \tag{3.3}$$

Tegyük fel, hogy $A = u - v \neq 0$. Ekkor létezik olyan $0 \neq e \in U$ vektor, hogy $Ae \neq 0$. Legyen $\varepsilon = \dfrac{\|Ae\|}{\|e\|} \in \mathbb{R}^+$. A fenti két határérték különbségeként

$$\lim_{x\to a} \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \tag{3.4}$$

adódik, a határérték definíciója alapján pedig létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Az $x = a + \dfrac{\delta}{2\,\|e\|} \cdot e \in E$ vektorra $x \in B_\delta(a)$ teljesül, azonban a fenti egyenlőtlenségből az

$$\left\| \frac{A(x-a)}{\|x-a\|} \right\| = \left\| \frac{Ae}{\|e\|} \right\| = \varepsilon < \varepsilon \tag{3.6}$$

ellentmondás adódik.

**3.1. Definíció.** Legyen $U$ és $V$ normált tér, $f : U \to V$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

– Azt mondjuk, hogy az $f$ *függvény differenciálható*, vagy *(Fréchet-) deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \mathscr{L}(U, V)$, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \tag{3.7}$$

teljesül. Ezt az $A$ leképezést az $f$ *függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük és a továbbiakban a $(\mathrm{D}f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

– Az $f : U \to V$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

$$\mathrm{D}f = \left\{ (a, A) \in (\operatorname{Int}\operatorname{Dom} f) \times \mathscr{L}(U, V) \;\middle|\; \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \right\} \tag{3.8}$$

függvényt.
– Az $f$ *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} \mathrm{D}f$.
– Az $f$ *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és $\mathrm{D}f$ folytonos. Az $A \subseteq U$ nyílt halmazon értelmezett, $V$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, V)$ jelöli.

**3.2. Tétel.** *(A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $U$ és $V$ normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Az $A \in \mathscr{L}(U, V)$ leképezés pontosan akkor az $f$ függvény a pontbeli deriváltja, ha*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \Big( \|x-a\| < \delta \;\to\; \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| \le \varepsilon \cdot \|x-a\| \Big) \tag{3.9}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** A derivált és a határérték definíciójából következik.

**3.3. Tétel.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Pontosan akkor létezik a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \tag{3.10}$$

*határérték, ha létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0 \tag{3.11}$$

*teljesül. Továbbá ekkor*

$$(\mathrm{D}f)(a)(1) = f'(a). \tag{3.12}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.
Ha $f$ differenciálható az $a$ pontban és létezik a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \tag{3.13}$$

határérték, akkor legyen $A$ olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$Ax = f'(a)x \tag{3.14}$$

teljesül. Ekkor

$$0 = \lim_{x\to a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x - a}, \tag{3.15}$$

tehát

$$0 = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{x - a} \right| = \lim_{x\to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x - a|} \right|, \tag{3.16}$$

vagyis

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x - a|} = 0. \tag{3.17}$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $(\mathrm{D}f)(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = 0 \tag{3.18}$$

teljesül, és legyen $c = ((\mathrm{D}f)(a))(1)$. Ekkor

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - ((\mathrm{D}f)(a))(x-a)}{|x-a|} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{|x-a|}, \tag{3.19}$$

vagyis

$$0 = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{|x-a|} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{x-a} \right| = \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - c \right| \tag{3.20}$$

ezért

$$0 = \lim_{x \to a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - c \right), \tag{3.21}$$

tehát létezik a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = c \tag{3.22}$$

határérték és $c = f'(a)$.

**3.4. Tétel.** *Legyen $U$ és $V$ normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Ha $f$ differenciálható az $a$ pontban, akkor $f$ folytonos az $a$ pontban.*

***Bizonyítás.*** Legyen $U$ és $V$ normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. A differenciálhatóság jellemzéséről szóló 3.2 tétel alapján ekkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ vektorra a $\|x-a\| < \delta$ esetben

$$\|f(x) - f(a) - (\mathrm{D}f)(a)(x-a)\| \leq \|x-a\| \tag{3.23}$$

teljesül, aminek az átrendezéséből

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|x-a\| \cdot (1 + \|(\mathrm{D}f)(a)\|) \tag{3.24}$$

adódik. Ezért $\lim_{x \to a} \|f(x) - f(a)\| = 0$, vagyis $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, amiből következik az $f$ függvény $a$ pontbeli folytonossága.

**3.5. Tétel.** *Legyen $U$ és $V$ normált tér, $f, g : U \to V$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ függvény, továbbá $a$ tetszőleges belső pontja a $(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ halmaznak és legyen $f$, $g$ és $\varphi$ differenciálható az $a$ pontban. Ekkor*

1. *$f + g$ differenciálható az $a$ pontban, és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
2. *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $cf$ differenciálható az $a$ pontban, és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
3. *$\varphi f$ differenciálható az $a$ pontban, és $(\mathrm{D}(\varphi f))(a) = f(a) \cdot (\mathrm{D}\varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D}f)(a)$;*
4. *ha $\varphi(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{\varphi}$ differenciálható az $a$ pontban, és*

$$\left( \mathrm{D} \left( \frac{f}{\varphi} \right) \right) (a) = \frac{\varphi(a)(\mathrm{D}f)(a) - f(a)(\mathrm{D}\varphi)(a)}{\varphi^2(a)}. \tag{3.25}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $U$ és $V$ normált tér, $f, g : U \to V$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ olyan, hogy $f$, $g$ és $\varphi$ differenciálható az $a$ pontban. Legyen továbbá $F = (\mathrm{D}f)(a)$, $G = (\mathrm{D}g)(a)$ és $\Phi = (\mathrm{D}\varphi)(a)$. Mivel $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$, ezért vehetünk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paramétert, melyre $B_r(a) \subseteq a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g \cap \operatorname{Dom} \varphi)$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a) - G(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \tag{3.26}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)}{\|x-a\|} = 0. \tag{3.27}$$

1. Az

$$\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a) - (F+G)(x-a)}{\|x-a\|} = \tag{3.28}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x-a\|} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a) - G(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \tag{3.29}$$

egyenlőség igazolja, hogy $f+g$ is differenciálható az $a$ pontban és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = F + G$.
2. Az

$$\lim_{x\to a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a) - (cF)(x-a)}{\|x-a\|} = c \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \tag{3.30}$$

egyenlőség igazolja, hogy $cf$ is differenciálható az $a$ pontban és $(\mathrm{D}(cf))(a) = cF$.
3. A minden $x \in B_r(a)$ vektorra teljesülő

$$\|(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)\| = \tag{3.31}$$

$$= \left\| \Big(\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\Big) f(x) + \varphi(a)\Big(f(x) - f(a) - F(x-a)\Big) + (f(x) - f(a))\Phi(x-a) \right\| \le \tag{3.32}$$

$$\le \|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\| \cdot \|f(x)\| + |\varphi(a)| \cdot \|f(x) - f(a) - F(x-a)\| + \tag{3.33}$$

$$+ \|f(x) - f(a)\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x-a\| \tag{3.34}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\lim_{x\to a} \left\| \frac{(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \le \tag{3.35}$$

$$\le \lim_{x\to a} \left\| \frac{\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \cdot \|f(x)\| + |\varphi(a)| \cdot \lim_{x\to a} \left\| \frac{f(x) - f(a) - F(x-a)}{\|x-a\|} \right\| + \tag{3.36}$$

$$+ \lim_{x\to a} \|f(x) - f(a)\| \cdot \|\Phi\| = \tag{3.37}$$

$$= 0 \cdot \|f(a)\| + |\varphi(a)| \cdot 0 + 0 \cdot \|\Phi\| = 0 \tag{3.38}$$

adódik, amiből

$$\lim_{x\to a} \frac{(\varphi f)(x) - (\varphi f)(a) - f(a)\Phi(x-a) - \varphi(a)F(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \tag{3.39}$$

következik, vagyis a $\varphi f$ függvény is differenciálható az $a$ pontban és $\mathrm{D}(\varphi f) = f(a)\Phi - \varphi(a)F$.
4. Tegyük fel, hogy $\varphi(a) \neq 0$. Mivel a $\varphi$ függvény differenciálható az $a$ pontban, ezért ott folytonos is. A folytonosság miatt azonban létezik olyan $\delta \in ]0, r[$ paraméter, hogy minden $x \in B_\delta(a)$ esetén $\varphi(x) \neq 0$.
Először megmutatjuk, hogy

$$\left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) = -\frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi \tag{3.40}$$

teljesül. A minden $x \in B_\delta(a)$ vektorra teljesülő

$$\left\|\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi(x-a)\right\| = \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|}\left\|\varphi(a) - \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\Phi(x-a)\right\| = \tag{3.41}$$

$$= \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|}\left\|\varphi(x) - \varphi(a) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\Phi(x-a)\right\| = \tag{3.42}$$

$$= \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|}\left\|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a) + \left(1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\right)\Phi(x-a)\right\| \leq \tag{3.43}$$

$$\leq \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|}\left(\|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\| + \left|1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\right| \cdot \|\Phi\| \cdot \|x-a\|\right) \tag{3.44}$$

egyenlőtlenség felhasználásával

$$\lim_{x\to a}\left\|\frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi(x-a)}{\|x-a\|}\right\| \leq \tag{3.45}$$

$$\leq \lim_{x\to a}\frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(x)|}\left(\frac{\|\varphi(x) - \varphi(a) - \Phi(x-a)\|}{\|x-a\|} + \left|1 - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\right| \cdot \|\Phi\|\right) = \tag{3.46}$$

$$= \frac{1}{|\varphi(a)| \cdot |\varphi(a)|}\left(0 + \left|1 - \frac{\varphi(a)}{\varphi(a)}\right| \cdot \|\Phi\|\right) = 0 \tag{3.47}$$

adódik, amiből

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \tag{3.48}$$

következik, vagyis az $\frac{1}{\varphi}$ függvény is differenciálható az $a$ pontban és $\left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) = -\frac{1}{\varphi^2(a)}\Phi$ teljesül.
A 3. pont alapján ekkor

$$\left(\mathrm{D}\left(\frac{f}{\varphi}\right)\right)(a) = \left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\cdot f\right)\right)(a) = f(a)\cdot\left(\mathrm{D}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right)(a) + \frac{1}{\varphi}(a)\cdot(\mathrm{D}f)(a) = \tag{3.49}$$

$$= -\frac{f(a)}{\varphi^2(a)}\Phi + \frac{1}{\varphi(a)}F = \frac{\varphi(a)F - f(a)\Phi}{\varphi^2(a)} \tag{3.50}$$

teljesül.

**3.6. Tétel.** *Legyen $U$ és $V$ normált tér, és legyen $A \subseteq U$ nyílt halmaz. Ekkor $C^1(A,V)$ vektortér.*

***Bizonyítás.*** Az előző állítást kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

**3.7. Tétel.** *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $U$, $V$ és $W$ normált tér, $g : U \to V$, $f : V \to W$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f\circ g$. Ha $g$ differenciálható az $a$ pontban és $f$ differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f\circ g$ differenciálható az $a$ pontban, és*

$$(\mathrm{D}(f\circ g))(a) = (\mathrm{D}f)(g(a))\circ(\mathrm{D}g)(a). \tag{3.51}$$

***Bizonyítás.*** Legyen $U$, $V$ és $W$ normált tér, $g : U \to V$, $f : V \to W$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \circ g$ olyan, hogy $g$ differenciálható az $a$ pontban és $f$ differenciálható a $g(a)$ pontban. Mivel az $f$ függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a) \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$, tehát

$$\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \forall y \in V : \tag{3.52}$$
$$\|y - g(a)\| < \delta_1 \;\to\; \|f(y) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(y - g(a))\| \le \varepsilon_1 \cdot \|y - g(a)\| . \tag{3.53}$$

Mivel a $g$ függvény differenciálható az $a$ pontan, ezért $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$, tehát

$$\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \tag{3.54}$$
$$\|x - a\| < \delta_2 \;\to\; \|g(x) - g(a) - (\mathrm{D}g)(a)(x - a)\| \le \varepsilon_2 \cdot \|x - a\| . \tag{3.55}$$

Továbbá a $g$ függvény folytonos is az $a$ pontban, ezért

$$\forall \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_3 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U : \qquad \|x - a\| < \delta_3 \;\to\; \|g(x) - g(a)\| < \varepsilon_3. \tag{3.56}$$

Legyen $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a $\varepsilon_1$ számhoz tartozó $\delta_1$ paramétert választva $\varepsilon_3$ paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ esetén

$$\|x - a\| < \delta_3 \;\to\; \|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x) - g(a))\| \le \varepsilon_1 \cdot \|g(x) - g(a)\| . \tag{3.57}$$

Az $\varepsilon_1$ számot választva $\varepsilon_2$ paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in U$ esetén

$$\|x - a\| < \delta_2 \;\to\; \|g(x) - g(a) - (\mathrm{D}g)(a)(x - a)\| \le \varepsilon_1 \cdot \|x - a\| . \tag{3.58}$$

Legyen $\delta' = \min\{\delta_2, \delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x \in U$ vektorra, ha $\|x - a\| < \delta'$, akkor

$$\|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x) - g(a))\| \le \varepsilon_1 \cdot \|g(x) - g(a)\| \tag{3.59}$$
$$\|g(x) - g(a) - (\mathrm{D}g)(a)(x - a)\| \le \varepsilon_1 \cdot \|x - a\| \tag{3.60}$$

teljesül, valamint az utolsó egyenlőtlenség alapján ha $\|x - a\| < \delta'$, akkor

$$\|g(x) - g(a)\| \le \varepsilon_1 \cdot \|x - a\| + \|(\mathrm{D}g)(a)\| \cdot \|x - a\| . \tag{3.61}$$

Ezek alapján, ha $\|x - a\| < \delta'$, akkor

$$\|f(g(x)) - f(g(a)) - ((\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a))(x - a)\| = \tag{3.62}$$
$$= \|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x) - g(a)) + \tag{3.63}$$
$$+ (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x) - g(a)) - ((\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a))(x - a)\| \le$$
$$\le \|f(g(x)) - f(g(a)) - (\mathrm{D}f)(g(a))(g(x) - g(a))\| + \tag{3.64}$$
$$+ \|(\mathrm{D}f)(g(a))\| \cdot \|(g(x) - g(a)) - (\mathrm{D}g)(a)(x - a)\| \le \tag{3.65}$$
$$\le \varepsilon_1 \|g(x) - g(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\| \, \varepsilon_1 \|x - a\| \le \tag{3.66}$$
$$\le \varepsilon_1 (\varepsilon_1 \|x - a\| + \|(\mathrm{D}g)(a)\| \, \|x - a\|) + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\| \, \varepsilon_1 \|x - a\| = \tag{3.67}$$
$$= \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \|(\mathrm{D}g)(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|) \, \|x - a\| \tag{3.68}$$

Vagyis bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \|(\mathrm{D}g)(a)\| + \|(\mathrm{D}f)(g(a))\|) < \varepsilon \tag{3.69}$$

teljesül, ehhez a $\varepsilon_1$ számhoz pedig létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x - a\| < \delta'$ esetén

$$\|f(g(x)) - f(g(a)) - ((\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a))(g(x) - g(a))\| \le \varepsilon \cdot \|x - a\| , \tag{3.70}$$

ezért a $f \circ g$ függvény deriváltja az $a$ pontban $(\mathrm{D}f)(g(a)) \circ (\mathrm{D}g)(a)$.

**3.2. Definíció.** Legyen $U$ vektortér és V normált tér. Legyen továbbá $f : U \to V$ függvény, $a \in \operatorname{Dom} f$ és $e \in U$. Azt mondjuk, hogy az $f$ *függvénynek létezik az a pontban az e irányú deriváltja*, ha létezik a

$$\lim_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ t\to 0}} \frac{f(a+te)-f(a)}{t} \tag{3.71}$$

határérték, amit a $(\mathrm{D}_e f)(a)$ szimbólummal jelölünk és az $f$ *függvény a pontbeli, e irányú (Gateaux-) deriváltjának* nevezünk.

**3.8. Tétel.** *Legyen $U$ és $V$ normált tér, $f : U \to V$ függvény, valamint $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Ha $f$ differenciálható az a pontban, akkor minden $e \in U$ vektorra létezik az $f$ függvény $e$ iránymenti deriváltja az a pontban, továbbá $(\mathrm{D}_e f)(a) = ((\mathrm{D}f)(a))(e)$ teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $U$ és $V$ normált tér, $f : U \to V$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$ pontban, valamint legyen $A = (\mathrm{D}f)(a)$ és $e \in U$ tetszőleges vektor. Az $e = 0$ esetben nyilván teljesül az állítás, így feltehető, hogy $e \neq 0$. A

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+te)-f(a)}{t} = Ae \tag{3.72}$$

egyenlőtlenség igazolásához válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paramétert. A függvény $a$ pontbeli differenciálhatósága alapján a $\dfrac{\varepsilon}{\|e\|}$ számhoz létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$ melyre

$$\forall x \in B_{\delta'}(a): \ \|f(x)-f(a)-A(x-a)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|e\|}\cdot\|x-a\| \tag{3.73}$$

teljesül. Ha $\delta = \dfrac{\delta'}{\|e\|}$ és $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta$, akkor $a + te \in B_{\delta'}(a)$, vagyis

$$\|f(a+te)-f(a)-A(te)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|e\|}\cdot|t|\,\|e\| = \varepsilon\,|t|\,. \tag{3.74}$$

Amiből $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(a+te)-f(a)-tA(e)}{t}\right\| = 0$ következik.

## 3.2. Néhány speciális függvény deriváltja

**3.9. Tétel.** *Legyen $U$ normált tér, $c \in U$ és*

$$L_c : U \to U \qquad x \mapsto x - c. \tag{3.75}$$

*Ekkor $L_c$ minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}L_c : U \to \mathscr{L}(U,U) \qquad a \mapsto \mathrm{id}_U \tag{3.76}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $U$ normált tér és $c \in U$. Legyen $a \in U$ tetszőleges pont. Mivel minden $x \in U$ esetén

$$L_c x - L_c a = x - a \tag{3.77}$$

teljesül, ezért

$$\lim_{x\to a} \frac{L_c x - L_c a - \mathrm{id}_U(x-a)}{\|x-a\|} = 0, \tag{3.78}$$

amiből $(\mathrm{D}L_c)(a) = \mathrm{id}_u$ következik.

**3.10. Tétel.** *Legyen $U$ és $V$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(U,V)$. Ekkor $A$ minden pontban differenciálható és*

$$\mathrm{D}A : U \to \mathscr{L}(U,V) \qquad a \mapsto A \tag{3.79}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $U$ és $V$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathscr{L}(U,V)$. Legyen $a \in U$ tetszőleges pont. Mivel az $A$ linearitása miatt minden $x \in U$ esetén

$$Ax - Aa - A(x-a) = 0 \tag{3.80}$$

teljesül, ezért

$$\lim_{x \to a} \frac{Ax - Aa - A(x-a)}{\|x-a\|} = 0, \tag{3.81}$$

amiből $(\mathrm{D}A)(a) = A$ következik.

**3.11. Tétel.** *Legyen $U$, $V$ normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n,V)$ szimmetrikus $n$-lineáris leképezés. A*

$$\rho : U \to V \qquad x \mapsto A\left(x, \ldots, x\right), \tag{3.82}$$

*függvény deriváltjára*

$$\mathrm{D}\rho : U \to \mathscr{L}(U,V) \qquad a \mapsto (x \mapsto nA(x,a,\ldots,a)) \tag{3.83}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $U$, $V$ normált tér, $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen $A \in \mathscr{L}(U^n,V)$ szimmetrikus $n$-lineáris leképezés. Legyen

$$B : U \to V \qquad x \mapsto nA(x,a,\ldots,a). \tag{3.84}$$

Megmutatjuk, hogy $(\mathrm{D}\rho)(a) = B$.
Az $n$ szerinti teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $x, y \in U$ esetén

$$\rho(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A\left((x)^{[k]}, y^{[n-k]}\right), \tag{3.85}$$

vagyis

$$\rho(x) - \rho(a) = \rho(a + (x-a)) - \rho(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A\left((x-a)^{[k]}, a^{[n-k]}\right) - \rho(a) = \tag{3.86}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A\left((x-a)^{[k]}, a^{[n-k]}\right) \tag{3.87}$$

teljesül. Ebből az $\|x-a\| < 1$ esetben

$$\|\rho(x) - \rho(a) - B(x-a)\| = \left\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A\left((x-a)^{[k]}, a^{[n-k]}\right) \right\| \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|A\| \|x-a\|^k \|a\|^{n-k} \leq \tag{3.88}$$

$$\leq \|x-a\|^2 \|A\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|x-a\|^{k-2} \|a\|^{n-k} \leq \|x-a\|^2 \|A\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|a\|^{n-k} = \tag{3.89}$$

$$= \|x-a\|^2 \|A\| \left(1 + \|a\|\right)^n \tag{3.90}$$

adódik. Vagyis ha $0 < \|x-a\| < 1$, akkor

$$\left\| \frac{\rho(x) - \rho(a) - B(x-a)}{\|x-a\|} \right\| \leq \|x-a\| \, \|A\| \, (1 + \|a\|)^n \,, \tag{3.91}$$

amiből

$$\lim_{x \to a} \frac{\rho(x) - \rho(a) - B(x-a)}{\|x-a\|} = 0 \tag{3.92}$$

következik.

**3.12. Tétel.** *Legyen $V$ Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \to A$, $f(a) = a^n$. Ekkor*

$$Df : A \to \mathscr{L}(A,A) \qquad a \mapsto \left( b \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k} \right) \tag{3.93}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \to A$, $f(a) = a^n$. Ekkor $A$ olyan Banach-tér, melyen a norma szubmultiplikatív. Legyen $a \in A$ tetszőleges pont, és $\tau \in \mathscr{L}(A,A)$, $\tau(b) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k}$. A minden $h \in A \setminus \{0\}$, $\|h\| \leq 1$ esetén érvényes

$$\left\| \frac{f(a+h) - f(a) - \tau(h)}{\|h\|} \right\| = \left\| \frac{(a+h)^n - a^n - \sum_{k=0}^{n-1} a^k h a^{n-1-k}}{\|h\|} \right\| \leq \tag{3.94}$$

$$\leq \frac{1}{\|h\|} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|h\|^k \cdot \|a\|^{n-k} \leq \|h\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|h\|^{k-2} \cdot \|a\|^{n-k} \leq \tag{3.95}$$

$$\leq \|h\| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot \|a\|^{n-k} \leq \|h\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \|a\|^{n-k} = \|h\| \cdot (1 + \|a\|)^n \tag{3.96}$$

becslésből következik, hogy $(\mathrm{D}f)(a) = \tau$.

**3.13. Tétel.** *Legyen $V$ Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$ és*

$$G(A) = \left\{ a \in \mathscr{L}(V,V) \middle| \, \exists a^{-1}, \; a^{-1} \in \mathscr{L}(V,V) \right\}. \tag{3.97}$$

*Az inverzképzés $i : G(A) \to G(A)$, $i(a) = a^{-1}$ függvényére ekkor*

$$\mathrm{D}i : G(A) \to \mathscr{L}(A,A) \qquad a \mapsto \left( b \mapsto -a^{-1} b a^{-1} \right) \tag{3.98}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** Legyen $V$ Banach-tér, $A = \mathscr{L}(V,V)$ és

$$G(A) = \left\{ a \in \mathscr{L}(V,V) \middle| \, \exists a^{-1}, \; a^{-1} \in \mathscr{L}(V,V) \right\}. \tag{3.99}$$

Legyen $a \in G(A)$ tetszőleges pont, $\tau \in \mathscr{L}(A, A)$, $\tau(b) = -a^{-1}ba^{-1}$ és jelölje 1 az $A$ egységelemét, vagyis az $\mathrm{id}_V$ leképezést. Ha $0 \neq h \in A$ és $\|h\| \leq \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$, akkor a $-a^{-1}h$ elemre alkalmazható a Carl–Neumann-féle sorfejtés, vagyis ebben az esetben érvényes a

$$\left\| \frac{i(a+h) - i(a) - \tau(h)}{\|h\|} \right\| = \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\|(a+h)^{-1} - a^{-1} + a^1 h a^{-1}\right\| = \tag{3.100}$$

$$= \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\|((1 + a^{-1}h)^{-1} - 1 + a^{-1}h)a^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\|h\|} \cdot \left\| \sum_{k=2}^{\infty} (-a^{-1}h)^k \right\| \cdot \left\|a^{-1}\right\| \leq \tag{3.101}$$

$$\leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left\|a^{-1}h\right\|^k \leq \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\left\|a^{-1}\right\| \cdot \|h\|\right)^k = \tag{3.102}$$

$$= \frac{\|a^{-1}\|}{\|h\|} \cdot \frac{\|a^{-1}\|^2 \cdot \|h\|^2}{1 - \|a^{-1}\| \cdot \|h\|} \leq \|h\| \cdot 2\left\|a^{-1}\right\|^3 \tag{3.103}$$

becslés, amiből következik az állítás.

**Kiegészítés.** A utolsó két tételt kicsit általánosabb formában is kimondhatjuk.

**3.14. Tétel.** *Legyen $A$ Banach-algebra, $n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $f : A \to A$, $f(a) = a^n$. Ekkor*

$$Df : A \to \mathscr{L}(A, A) \qquad a \mapsto \left( b \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a^k b a^{n-1-k} \right) \tag{3.104}$$

*teljesül.*

***Bizonyítás.*** A 3.12 tétel bizonyításában csak azt használtuk fel, hogy $A$ Banach-algebra, így az ott adott bizonyítás változatlan formában érvényes erre az esetre is.

**3.15. Tétel.** *Legyen $A$ egységelemes Banach-algebra, és legyen $i : G(A) \to G(A)$, $i(a) = a^{-1}$. Ekkor*

$$Di : G(A) \to \mathscr{L}(A, A) \qquad a \mapsto \left(b \mapsto -a^{-1}ba^{-1}\right). \tag{3.105}$$

***Bizonyítás.*** A 3.13 tétel bizonyításában csak azt használtuk fel, hogy $A$ egységelemes Banach-algebra, így az ott adott bizonyítás változatlan formában érvényes erre az esetre is.

◊

# Tárgymutató