Fourier analízis, 1. feladatsor

Anyag: diszkrét Fourier transzformált I.

1. Legyen $F_n = [e^{-2i\pi jk/n}]_{0\le j,k\le n-1}$ az $n\times n$-es Fourier mátrix. Mutassuk meg, hogy $F_nF_n^* = nI$. Ez alapján lássuk be az inverziós formulát: $x_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\hat{x}_j e^{2i\pi jk/n}$, valamint a Parseval azonosságot: $n\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}\rangle$, amelynek speciális esete a Plancherel formula: $n\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\hat{\mathbf{x}}\|_2^2$.

2. Legyen $\delta = (1,0,0,\dots,0)$ és $\mathbf{1} = (1,1,\dots,1)$. Mutassuk meg, hogy $\hat{\delta} = \mathbf{1}$, és $\hat{\mathbf{1}} = n\delta$. (Azaz a Dirac-delta és a konstans függvény egymás Fourier transzformáltjai.)

3. Két függvény konvolúciója a következő: $f * g(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}_n} f(y)g(x-y)$. Mutassuk meg, hogy $\widehat{f*g}_k = \hat{f}_k\hat{g}_k$. (Azaz a konvolúciót a Fourier transzformálás a pontonkénti szorzásba viszi.)

4. Legyen $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$ és legyen $T_yf(x) = f(x-y)$ (eltolás y-nal, természetesen mod n), valamint $M_yf(x) = e^{2i\pi yx/n}f(x)$ (moduláció). Mutassuk meg, hogy $\widehat{T_yf} = M_{-y}\hat{f}$, valamint $\widehat{M_yf} = T_y\hat{f}$.

5. Számoljuk ki az F_n^2 és F_n^4 mátrixokat. Mi történik egy $\mathbf{x} = (x_0,\dots,x_{n-1})$ vektorral, ha egymás után kétszer alkalmazzuk rá Fourier transzformációt? Mi történik, ha négyszer alkalmazzuk?

6. Mutassuk meg, hogy F_n sajátértékei csak $\pm\sqrt{n}, \pm i\sqrt{n}$ lehetnek (a multiplicitást nem kell meghatározni).

7. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{x} = (x_0,\dots,x_{n-1})$ valós vektor, akkor $\hat{\mathbf{x}} = F_n\mathbf{x}$ konjugáltan szimmetrikus, azaz $\hat{\mathbf{x}}_k = \overline{\hat{\mathbf{x}}}_{n-k}$.

8. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ olyan vektorok, hogy $y_k = \overline{x}_{n-k}$, akkor $\hat{\mathbf{x}}_k = \overline{\hat{\mathbf{y}}}_k$.

9. Legyen $A \subset \mathbb{Z}_n$ (ahol $\mathbb{Z}_n$ az n-elemű ciklikus csoportot jelöli). Minden $t \in \mathbb{Z}_n$-re legyen x_t az a szám, ahányszor t előáll $t = a - a'$ alakban, ahol $a, a' \in A$. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{x} = (x_0,\dots,x_{n-1})$ vektor Fourier transzformáltja egy nemnegatív vektor.

10. Legyen D egy diagonális mátrix. Mutassuk meg, hogy az $F_n^{-1}DF_n$ mátrix ciklikus (azaz egy $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$ sorvektor ciklikus permutációi adják a sorokat). Mutassuk meg, hogy egy A mátrix pontosan akkor ciklikus, ha A előáll $F_n^{-1}DF_n$ alakban.

11. Mutassuk meg, hogy a ciklkus mátrixok egy kommutatív részalgebrát alkotnak az $n \times n$-es mátrixok algebrájában.

12. * Legyen p egy páratlan prímszám, és legyen $g = \sum_{j=0}^{p-1} e^{2i\pi j^2/p}$. Mutassuk meg, hogy $|g| = \sqrt{p}$.

13. Legyen $G = \mathbb{T}$, és $\chi \in \hat{G}$ egy folytonos karakter. Mutassuk meg, hogy $\chi(z) = z^k$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén (azaz $\mathbb{T}$ karakterei csak az egész kitevőjű hatványozások).

Fourier analízis, 2. feladatsor

Anyag: diszkrét Fourier transzformált II.

14. Legyen $\chi : G \to \mathbb{T}$ egy tetszőleges véges (nem feltétlenül ciklikus) csoport karaktere. Mutassuk meg, hogy $\chi(-x) = \overline{\chi(x)}$ minden $x \in G$ esetén. Mutassuk meg továbbá, hogy $\sum_{x \in G} \chi(x) = 0$ ha $\chi \neq \chi_0$ (ahol χ_0 jelöli a főkaraktert, azaz a konstans 1 karaktert).

15. Legyen $A \subset \mathbb{Z}_n$. Mutassuk meg, hogy $\hat{\mathbf{1}}_A(\chi) = -\hat{\mathbf{1}}_{A^c}(\chi)$ minden $\chi \neq \chi_0$ esetén. Oldjuk meg ezt a feladatot kétféleképpen: először hagyjuk meg az absztrakt χ jelölést, másodjára pedig írjuk be konkrétan, hogy $\chi(x) = e^{-2i\pi xr/n}$ valamilyen $r \neq 0$-ra.

16. $q = 5$ esetén soroljuk fel $\mathbb{Z}_q$ multiplikatív karaktereit. (Azaz tekintsük a $\mathbb{Z}_q^*$ csoportot, mutassuk meg, hogy ciklkus, és írjuk fel konkrét értékekkel a karaktereit.)

17. Legyenek $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{Z}_n$, és legyen N az $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 0$ ($x_i \in A_i$) megoldásainak a száma. Mutassuk meg, hogy $N = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_n} \prod_{i=1}^{k} \hat{\mathbf{1}}_{A_i}(\chi)$.

18. Legyen $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ és $\omega = e^{-2i\pi/n}$. Mutassuk meg, hogy $\hat{\mathbf{a}}(r) = p(\omega^r)$. (Azaz a diszkrét Fourier transzformált értékei a p polimom kiértékelései az n-dik egységgyökökön.)

19. Tegyük fel, hogy n páros, és legyen $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, valamint $p_0(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{n/2-1}$, és $p_1(x) = a_1 + a_3 x + \cdots + a_{n-1}x^{n/2-1}$. Mutassuk meg, hogy $p(x) = p_0(x^2) + xp_1(x^2)$. Speciálisan, minden $0 \le k \le n/2 - 1$ esetén $p(\omega^k) = p_0(\omega^{2k}) + \omega^k p_1(\omega^{2k})$.

20. Az előző feladat jelöléseivel mutassuk meg, hogy minden $0 \le k \le n/2 - 1$ esetén $p(\omega^{n/2+k}) = p_0(\omega^{2k}) - \omega^k p_1(\omega^{2k})$.

21. Tegyük fel, hogy $n = 2^N$. Az előző két feladat alapján találjunk egy algoritmust, amely $O(n \log n)$ lépésben kiszámolja egy $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ vektor Fourier transzformáltját. (Ez az FFT, azaz Fast Fourier Transform.)

22. Legyen $n = 2^N$. Számoljuk ki $O(n \log n)$ lépésben a $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ valamint $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$ polinomok szorzatát az FFT segítségével.

23. Legyen A és B két n-jegyű egész szám (ahol n jó nagy...). Az AB szorzat kiszámolásához az iskolában tanult módszer szerint $O(n^2)$ művelet szukséges. Számoljuk ki gyorsabban, $O(n \log n)$ lépésben.

24. Legyenek n, k relatív prímek. Tekintsük Z_{nk}-ban a következő részcsoportokat: $H = \{m \in \mathbb{Z}_{nk} : n|m\}$, $G = \{m \in \mathbb{Z}_{nk} : k|m\}$. Mutassuk meg, hogy $\hat{\mathbf{1}}_H(r) = k$ ha $r \in G$, és $\hat{\mathbf{1}}_H(r) = 0$ ha $r \notin G$. (Azaz egy "Dirac-fésű" Fourier transzformáltja egy másik "Dirac-fésű"; ez a Poisson-féle összegzési formula egy speciális esete.)

25. * Legyen q prímszám, és tegyük fel, hogy $k|p-1$. Legyen $A = \{x^k : x \in \mathbb{Z}_q, x \neq 0\}$. Mutassuk meg, hogy ha $r \neq 0$ akkor $|\hat{\mathbf{1}}_A(r)| \le \sqrt{q}$.

Fourier analízis, 3. feladatsor

Anyag: Fourier sorok I. Jelölés: $\mathbb{T} = [0, 1)$, és $f \in L^1(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{Z}$ estén $\hat{f}(r) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi rt}dt$.

26. Mutassuk meg, hogy $g(t) = f(t - y)$ estén $\hat{g}(r) = e^{-2i\pi ry}\hat{f}(r)$.

27. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ n-szer folytonosan differenciálható, 1-periodikus függvény. Mutassuk meg, hogy $\hat{f}(r) = (2\pi i r)^{-n}\widehat{f^{(n)}(r)}$. (Tehát minél simább a függvény, annál gyorsabban tartanak 0-hoz a Fourier együtthatók.)

28. Legyen $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Mutassuk meg, hogy $f * g \in L^1(\mathbb{T})$, és $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

29. Mutassuk meg, hogy $\widehat{f * g}(r) = \hat{f}(r)\hat{g}(r)$.

30. Legyen $f \in L^1(\mathbb{T})$ valós értékű függvény. Mutassuk meg, hogy ekkor $\hat{f}(r) = \overline{\hat{f}(-r)}$. Ez alapján, és az órán tanult Fejér mag segítségével mutassuk meg, hogy ha f folytonos és valós értékű, akkor f egyenletesen közelíthető valós trignotmetrikus polinomokkal (azaz $a_0 + \sum_{r=1}^{n}(a_r \cos 2\pi r t + b_r \sin 2\pi r t)$ alakban).

31. Mutassuk meg, hogy az $1, \sqrt{2}\cos 2\pi r t, \sqrt{2}\sin 2\pi r t$ függvények ($r \geq 1, r \in \mathbb{Z}$) ortonormált bázist alkotnak $L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$-en.

32. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodikus folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy ha $r \notin \mathbb{Z}$ akkor $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-2i\pi r t}dt = 0$.

33. Legyen $h(t) = a_0 + \sum_{r=1}^{n}(a_r \cos \omega_r t + b_r \sin \omega_r t)$, ahol az ω_r számok pozitívak és különbözőek. Mutassuk meg, hogy minden $S \in \mathbb{R}$-re $\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_S^{S+T} h(t)\cos\omega_r t dt = a_r$, és $\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_S^{S+T} h(t)\sin\omega_r t dt = b_r$. Ez alapján próbáljuk előre megjósolni egy kikötőben a dagály $h(t)$ magasságát, miután elég sokáig figyeltük a vízszint alakulását.

34. Mutassuk meg, hogy ha $f \in L^2(\mathbb{T})$ akkor $f \in L^1(\mathbb{T})$, és $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$.

35. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, és $f(0) = f(1) = 0$. Mutassuk meg, hogy $\pi^2 \int_0^1 |f(t)|^2 \leq \int_0^1 |f'(t)|^2$. (Ez a Wirtinger-egyenlőtlenség.)

36. Lássuk be Weierstrass approximációs tételét: minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény egyenletsen közelíthető polinomokkal.

Fourier analízis, 4. feladatsor

Anyag: Fourier sorok II., L^2-elmélet, Parseval azonosság, pontonkénti konvergencia

37. Lássuk be a Dirichlet-mag zárt alakját: $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2i\pi kt} = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}$. Mutassuk meg továbbá, hogy az n-dik Fourier részletösszeg megegyezik a Dirichlet-maggal vett konvolúcióval, azaz $S_n(x) = \int_{y\in\mathbb{T}} f(x-y)D_n(y)dy$.

38. Mutassuk meg, hogy $S_n(x) = \int_0^{1/2}(f(x-y)+f(x+y))D_n(y)dy$.

39. Mutassuk meg, hogy $\int_{t\in\mathbb{T}} D_n(t)dt = 1$ minden n-re, de $\int_{t\in\mathbb{T}} |D_n(t)|dt \to +\infty$, ha $n\to\infty$.

40. Lássuk be a Fejér-mag zárt alakját: $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_n(t) = \frac{1}{n+1}(\sum_{k=-n/2}^{n/2} e^{2i\pi kt})^2 = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2(n+1)\pi t}{\sin^2 \pi t}$.

41. Legyen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és együk fel, hogy valamely $c > 0$-val $|\hat{f}(r)| \geq \frac{c}{|r|}$ teljesül minden $r \neq 0$-ra. Legyen P_n egy legfeljebb n-ed fokú trigonometrikus polinom $P_n(x) = a_0 + \sum_{r=1}^{n}(a_n \cos 2\pi rx + b_n \sin 2\pi rx)$. Mutassuk meg, hogy P_n nem tudja "nagyon jól" egyenletesen közelíteni f-et, azaz létezik olyan $c' > 0$, hogy minden n-re $\|f - P_n\|_\infty \geq \frac{c'}{\sqrt{n}}$.

42. Legyen $h : [-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x$. Számoljuk ki h Fourier együtthatóit, majd a Parseval formulát használva határozzuk meg a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ nevezetes összeget.

43. Az előző feladatbeli h függvényre mutassuk meg, hogy $S_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}) \to A \approx 0.58$. (Ez a Gibbs jelenség: a szakadások közelében a Forier részletösszegek "túllőnek" a függvény értékén.)

44. Legyen $f \in L^1(\mathbb{T})$, és $f_y(t) = f(t-y)$. Mutassuk meg, hogy $\lim_{y\to 0}\|f - f_y\|_1 \to 0$.

45. Legyen $f \in C(\mathbb{T})$. Mutassuk meg, hogy $A_r(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)|r|^n e^{2i\pi nx} =$

$\int_0^1 \frac{1-r^2}{1-2rcos2\pi(x-y)+r^2} f(y)dy$, ahol az integrálban szererplő mag neve "Poisson-magfüggvény", $P_r(s) = \frac{1-r^2}{1-2rcos2\pi s+r^2}$.

46. A konvolúció kisimít: ha $g \in C^n(\mathbb{T})$, és $f \in L^1(\mathbb{T})$, akkor $g * f \in C^n(\mathbb{T})$, és a deriv áltakra $(g*f)^{(m)} = g^{(m)} * f$ teljesül minden $0 \leq m \leq n$-re.

Fourier analízis, 5. feladatsor

Anyag: Fourier sorok alkalmazásai, Fourier transzformáció $\mathbb{R}$-en

47. Legyen az $u(0,x) = f(x) \in C^2(\mathbb{T})$ kétszer folytonosan differenciálható kezdeti hőeloszlás adott egy köralakú vezetéken. Láttuk, hogy ekkor a hőeloszlás t idő múlva $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{-2\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi n x}$. Mutassuk meg, hogy $\|u(t,x) - f(x)\|_\infty \to 0$, ahogy $t \to 0_+$. (Ez akkor is igaz, ha $f(x)$ csak folytonos, de akkor nehezebb belátni.)

48. Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$ alakú függvények ($n = 1, 2, 3 \dots$) ortonormált bázist alkotnak az $L^2[0,1]$ térben, és minden $f \in L^2[0,1]$ függvény kifejthető $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ alakban, ahol $c_n = \sqrt{2} \int_0^1 f(y) \sin n\pi y dy$.

49. Legyen $u(0,x) = f(x) \in C[0,1]$ olyan folytonos kezdeti hőeloszlás a $[0,1]$ intervallumon, hogy $f(0) = f(1) = 0$. Lássuk be az órán tanult képletet, miszerint t idő múlva a hőeloszlás (az előző feladat jelöléseivel) $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 / 2} c_n f_n(x)$.

50. Tegyük fel, hogy a földfelszín hőmérsékletét a $\sin 2\pi t$ függvény írja le (ahol t egysége 1 év, és a hőmérséklet változása az évszakokat követi, a napi ingadozást most elhanyagoljuk). Az órán tanult képletet alkalmazva mutassuk meg, hogy x mélységben az évi homérsékletet az $u(t,x) = e^{-\sqrt{2\pi} x} \sin(2\pi t - \sqrt{2\pi} x)$ írja le. Speciálisan, ha $x = \sqrt{\pi}/\sqrt{2}$, akkor teljes fáziseltolódás jön létre x mélzségben (azaz nyáron van hidegebb, és télen melegebb).

51. A Schwartz tér $S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall p, q \in \mathbb{N}, x^p D^q f(x) \to 0 \ (|x| \to \infty)\}$. Mutassuk meg, hogy ekvivalens definíciót kapunk így is: $S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall p, q \in \mathbb{N}, \|x^p D^q f(x)\|_\infty < +\infty\}$.

52. Mutassuk meg, hogy $e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$.

53. Mutassuk meg, hogy $f \in S(\mathbb{R})$ esetén minden $p, q \in \mathbb{N}$-re $\|D^p x^q f(x)\|_1 < +\infty$.

54. Mutassuk meg, hogy $e^{-\pi x^2}$ Fourier transzformáltja önmaga.

Fourier analízis, 6. feladatsor

Anyag: Fourier transzformáció tulajdonságai $\mathbb{R}$-en

55. Legyen $f \in S(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \gamma x} dx$. Mutassuk meg, hogy $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$. Mutassuk meg, hogy ha f valós értétkű, akkor $\hat{f}$ konjugáltan szimmetrikus, és fordítva, ha f konjugáltan szimmetrikus, akkor $\hat{f}$ valós értékű. Mutassuk meg, hogy ha f valós értékű, páros függvény, akkor $\hat{f}$ szintén valós értékű, páros, és $\hat{\hat{f}} = f$.

56. Mutassuk meg, hogy ha $f \in L^1(\mathbb{R})$, és $g(x) = \lambda f(\lambda x)$, akkor $\hat{g}(\gamma) = \hat{f}(\frac{\gamma}{\lambda})$.

57. Számoljuk ki az alábbi függvények Fourier transzformáltját:
$f(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}$ (speciálisan nézzük meg az $[a,b] = [-1/2, 1/2]$ esetet), $g(x) = e^{-2\pi x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}$, $h(x) = e^{-2\pi|x|}$.

58. Az előző két feladat segítségégével számoljuk ki $t > 0$ esetén a következő függvények Fourier transzformáltját:
$f(x) = \frac{e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}$, (válasz: $e^{-2\pi^2\gamma^2 t}$)
$f(x) = \frac{t}{\pi}\frac{1}{x^2+t^2}$, (válasz: $e^{-2\pi\gamma t}$)
$f(x) = \left(\frac{\sin \pi x t}{\pi x}\right)^2$ (válasz: $1 - \frac{|\gamma|}{t}$ ha $|\gamma| \leq t$).

59. Legyen $h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}e^{\pi x^2}D^n e^{-2\pi x^2}$, az n-dik Hermite függvény. Mutassuk meg, hogy $h_n(x) = e^{-\pi x^2}P_n(x)$ ahol P_n egy n-edfokú polinom. Továbbá $h_n'(x) - 2\pi x h_n(x) = -(n+1)h_{n+1}(x)$.

60. Mutassuk meg, hogy $\hat{h}_n = (-i)^n h_n$, tehát a Hermite-függvények sajátvektorai a Fourier transzformációnak. (Fourier transzformáljuk az előző feladatbeli rekurziót.)

61. Legyen $f \in L^2(0, +\infty)$, és definiáljuk a cosinus- és sinus-transzformáltakat: $\hat{f}_0(\gamma) = 2\int_0^\infty f(x)\cos(2\pi\gamma x)dx$, és $\hat{f}_1(\gamma) = \int_0^\infty f(x)\sin(2\pi\gamma x)dx$. Mutassuk meg, hogy
$f(x) = 2\int_0^\infty \hat{f}_0(\gamma)\cos(2\pi\gamma x)d\gamma = 2\int_0^\infty \hat{f}_1(\gamma)\sin(2\pi\gamma x)d\gamma$

62. Legyen $f \in S(\mathbb{R})$, és tekintsük az $u'' - u = f$ differencálegyenletet. Találjunk meg egy $u \in S(\mathbb{R})$ megoldást, és mutassuk meg, hogy az az egyetlen megoldás.

63. Legyen $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$. Mutassuk meg, hogy $\theta(t) = t^{-1/2}\theta(1/t)$. (Gondoljunk a Poisson-összegzési formulára). Legyen $t = 0.1$. Hogyan érdemes kiszámolni $\theta(t)$ értékét?

64. Legyen $f \in S(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2n) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n/2)$.

65. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re és minden $x \in \mathbb{R}$-re $\left|(\frac{d}{dx})^n(\frac{\sin x}{x})\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Fourier analízis, 7. feladatsor

Anyag: Határozatlansági reláció, disztribúciók, többdimenziós Fourier transzformált

66. Legyen $a, b \in \mathbb{R}_+$, és $0 \neq f \in L^2(\mathbb{R})$. Adjunk alsó becslést az $\frac{a\|f'\|+b\|(\hat{f})'\|}{\|f\|}$ mennyiségre (ahol a norma 2-es normát jelöl), a határozatlansági reláció segítségével, és egy súlyozott számtani-mértani egyenlőtlenséget használva.

67. Határozzuk meg az alábbi disztribúciókat:

a; $\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{|x|}$

b; $(\widehat{\delta_{-1}+\delta_1})$ (ahol a $\delta_t(f) = f(t)$ jelölést használtuk)

c; $x\delta_0'(x)$

68. Legyen $f_n(x) = \frac{n^3 x}{(1+n^2x^2)^2}$. Határozzuk meg az f_n függvénysorozat pontonkénti liemszét, illetve disztribúciós értelemben vett limeszét.

69. A Minkowski-tétel bizonyításában a Poisson összegzési formulát a $g = 1_K * 1_K$ függvényra használtuk. De ez csalás, hiszen $g \notin S(\mathbb{R}^d)$. Orvosoljuk ezt a problémát, amikor $Vol(K) > 2^d$.

70. Ha $Vol(K) = 2^d$, akkor tekintsük az $(1+\varepsilon)K$ halmazokat, és kihasználva K zártságát mutassuk meg, hogy K tartalmaz 0-n kívüli rácspontot.

71. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben μ az xy-síkra helyezett 2-dimenziós Lebesgue mérték. Ez egy temperált disztribúció $\mathbb{R}^3$-on. Mi lesz $\hat{\mu}$?

72. Legyen $f \in L^1(\mathbb{R})$. A Riesz-Thorin tétel segítségével mutassuk meg, hogy minden $1 \leq p \leq +\infty$ és minden $g \in L^p(\mathbb{R})$ esetén $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$. Ez utóbbit kihasználva, újabb interpolációval mutassuk meg, hogy $\|f * g\|_s \leq \|f\|_r\|g\|_p$, minden $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{s}$ esetén (Young konvolúciós egyenlőtlensége).