Kalkulus 2, 2016/17 II. félév, vizsgatematika

1. Topologikus alapfogalmak az $\mathbb{R}^n$ térben.
Norma fogalma, $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ mint norma az $\mathbb{R}^n$ téren. $B_r(x)$ bevezetése. Nyílt, zárt, korlátos halmaz, valamint ezen halmazok alaptulajdonságai. Halmaz belső, torlódási, határ és izolált pontjai. Halmaz belseje és lezártja ($\operatorname{Int} A$ és $\overline{A}$). $\operatorname{Int} A$ és $\overline{A}$ alaptulajdonságai. Sűrű halmaz. Zárt halmaz jellemzése torlódási pontokkal.

2. Sorozatok az $\mathbb{R}^n$ térben.
Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat határértéke. Határérték egyértelműsége. Konvergens sorozatokkal való műveletek. Torlódási pont jellemzése sorozattal. Halmaz zártságának jellemzése sorozattal. Cauchy-sorozat. Cauchy-sorozat tulajdonságai. Bolzano–Weierstrass-tétel (a kompaktság jellemzése sorozatokkal).

3. Kompakt halmazok és függvények.
Kompakt halmaz és alaptulajdonságai. Minden kompakt halmaz korlátos és zárt. Kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt. Cantor-féle közösrész-tétel. Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény értékkészlete kompakt. Weierstrass-féle maximum- minimum elv. Kompakt halmazon értelmezett folytonos injekció inverze folytonos. Az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

4. Függvények.
Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény határértéke és a határérték egyértelműsége. Átviteli elv határértékre. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény adott pontbeli folytonossága és folytonossága. Átviteli elv folytonosságra. Folytonos függvények összege, számszorosa és kompozíciója folytonos. A folytonosság topologikus jellemzése. Egyenletes folytonosság, Heine-tétel. Kontrakció. Banach-féle fixponttétel.

5. Összefüggő halmazok, sorok és skaláris szorzás.
Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok és ezek tulajdonságai. Sorok és abszolút konvergens sorok az $\mathbb{R}^n$ térben. Skaláris szorzás. Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Ortonormált vektorrendszer skalárszorzatos téren. Vektor felbontása ortonormált bázisban. Parseval-egyenlőség.

6. Differenciálszámítás alapfogalmai.
Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény pontbeli differenciálhatósága, differenciálhatósága és deriváltja. Függvény deriváltjának az egyértelműsége. Függvények összegének, szorzatának és kompozíciójának deriváltja. Függvény pontbeli iránymenti deriváltja. Függvény parciális deriváltja. Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú differenciálható függvények Jacobi-mátrixa és Jacobi-determinánsa.

7. Differenciálhatóság.
Függvény gradiense, divergenciája, rotációja. Laplace-operátor. Kapcsolat a folytonos differenciálhatóság és a folytonos parciális deriváltak létezése között.

8. Inverz- és implicitfüggvény-tétel, valamint a többszörös differenciálhatóság.
Inverzfüggvény-tétel. Az implicitfüggvény-tétel. Függvény n-szeres differenciálhatósága és n-edik deriváltja. Young-tétel. Taylor-sorfejtés. Infinitezimális Taylor-formula.

9. Szélsőérték.
Függvény lokális maximuma, minimuma, szigorú lokális maximuma és minimuma. Függvény lokális szélsőértékének jellemzése a függvény deriváltjaival. Függvény lokális maximuma és minimuma adott feltétel mellett. A feltételes szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Lagrange-multiplikátor elv.

10. Többváltozós függvények integrálása. Térgörbe, térgörbe paraméterezése és ívhossza. Skalár- és vektorértékű függvény vonalmenti integrálja. Felület, felület paraméterezése, normálvektora és felszíne. Skalár- és vektorértékű függvény felületi integrálja. Tértartomány, tértartomány paraméterezése és térfogata. Skalárértékű függvény integrálja tértartományon.

11. Integráltételek. Skalár- és vektorpotenciálos vektormezők. Csillagszerű és egyszeresen összefüggő halmazok. Elégséges feltétel skalárpotenciál és vektorpotenciál létezéséhez. Gauss–Osztrogradszkij-tétel és Stokes-tétel.

12. Függvénysorozat és függvénysor.
A pontonkénti határfüggvény, illetve a pontonkénti összegfüggvény. Függvénysor abszolút konvergenciája. Függvénysorozat és függvénysor egyenletes konvergenciája. Weierstrass-tétel (függvénysorok egyenletes konvergenciájáról). Hatványsorok, Cauchy–Hadamard-tétel és Abel-tétel.

13. Függvénysorozat és függvénysor integrálása/deriválása és mátrixfüggvények.
Függvénysorozat és függvénysor tagonkénti deriválhatósága és integrálhatósága. Operátornorma az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések terén. Az $f(A)$ szimbólum értelmezése, ahol $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan végtelenszer differenciálható függvény esetén, melynek Taylor-sora megegyezik a függvénnyel. Mátrix függvényének kiszámítási módszere a Jordan-felbontás segítségével.

14. Fourier-sorfejtés.
Trigonometrikus függvények és alaptulajdonságaik. Függvény Fourier-együtthatói és Fourier-sora. A k-szor folytonosan differenciálható függvény Fourier-együtthatóinak becslése. A kétszer folytonosan differenciálható periodikus függvények Fourier-sora.

15. Dirichlet-féle lokalizációs tétel.
Riemann–Lebesgue-lemma (az integrálható függvény Fourier-együtthatóinak konvergenciájáról). Fourier-sor n-edik részletösszegének előállítása a Dirichlet-féle magfüggvénnyel. Dirichlet-féle lokalizációs tétel és következményei (pl. a differenciálható függvények Fourier-sorának a konvergenciája).