

Kalkulus 1

Andai Attila*

2015. május 14.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

1	Halmazelméleti alapok	1
1.1.	Elemi halmazműveletek	1
1.2.	Függvények	3
1.3.	Valós számok	6
1.4.	Számosságok	9
2	A valós és komplex számok alaptulajdonságai	11
2.1.	Algebrai tulajdonságok	11
2.2.	Topológiai tulajdonságok	13
2.3.	Függvények összege, szorzata	19
3	Sorozatok	21
3.1.	A határérték és tulajdonágai	21
3.2.	Cauchy-sorozatok	28
3.3.	Nevezetes határértékek	29
4	Sorok	35
4.1.	Sorok határértéke és tulajdonságai	35
4.2.	Konvergenciakritériumok	38
4.3.	Sorok szorzata	43
4.4.	Elemi függvények	45
5	Valós függvények elemi vizsgálata	51
5.1.	Függvények tulajdonságai	51
5.2.	Függvény határértéke	52
5.3.	Függvény folytonossága	57
5.4.	Függvény folytonosságának elemi következményei	63
5.5.	Függvény egyenletes folytonossága	65
5.6.	Hatványsorok határértéke	66
5.7.	Elemi függvények folytonossága	66
6	Differenciálszámítás I.	76
6.1.	Differenciálhatóság	76
6.2.	Hatványsorok deriválása	79
6.3.	Középérték-tételek	80
6.4.	Többszörös deriváltak	86
6.5.	Taylor-sorfejtés	88
7	Határozatlan integrál	95
7.1.	Primitív függvény és tulajdonságai	95
7.2.	Integrálási módszerek	96
8	Határozott integrál	101
8.1.	A <i>majdnem mindenütt</i> tulajdonság	101
8.2.	A Riemann-integrál	104
8.3.	A Riemann-integrálhatóság kritériumai	107
8.4.	Improprius integrál	118
9	Függelék	120
9.1.	Az elemi függvények grafikonjai	120

9.2.	Tizedestörtek	123
9.3.	Valós számok szögfüggvényei	126
9.4.	Jensen-tétel következményei	130
9.5.	Wallis- és Stirling-formula	132
9.6.	A gamma függvény	138
9.7.	Az analitikus számelmélet pár tétele	140

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő számtalan hiba kijavításáért és értékes megjegyzéseiért, *Joó Attilának*, aki felhívta figyelmem a halmazelmélet részben pár pontatlanságra a jegyzet előzetes változatában, valamint *Lovas Attilának* a függelék gondos átnézéséért.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a \triangleq szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \triangleq b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2015. március 7.
Andai Attila

1 Halmazelméleti alapok

1.1. Elemi halmazműveletek

A halmazelméletben definiálatlan alapfogalomként szerepel a *halmaz* és a *halmaz elemének lenni* kifejezés. Tehát bármely A és B halmaz esetén értelmes az a kijelentés, hogy *A eleme a B halmaznak*. Az „A eleme a B halmaznak” kijelentést az $A \in B$ szimbólummal jelöljük.

A változójelekre tetszőleges betűt, illetve jelet fogunk használni a továbbiakban. Adott p és q állítás esetén az alábbi alapvető logikai kapcsolókat értelmezzük:

- $\neg p$: p tagadása, *negációja*;
- $p \vee q$: p vagy q ;
- \exists : *létezik* szimbólum.

1.1. Definíció. A logikai jelek felhasználásával a következő logikai műveleteket definiáljuk. Legyen p, q formula és x_i változójel.

1. $(p) \wedge (q)$: p és q , ha $\neg((\neg(p)) \vee (\neg(q)))$;
2. $(p) \rightarrow (q)$: p -ből q következik, ha $(\neg(p)) \vee (q)$;
3. $(p) \leftrightarrow (q)$: p és q ekvivalensek, ha $((p) \rightarrow (q)) \wedge ((q) \rightarrow (p))$;
4. $\forall x(p)$: minden x esetén p teljesül, ha $\neg(\exists x(\neg(p)))$.

Minden $p, q \in$ formula és x_i változójel esetén

$$(p) \wedge (q), (p) \neq (q), (p) \rightarrow (q), (p) \leftrightarrow (q), \forall x_i(p) \quad (1.1)$$

is formula. Amennyiben a formulákon belül a zárójelezés az értelmezést nem befolyásoló módon elhagyható, akkor az áttekinthetőség kedvéért elhagyjuk.

A továbbiakban $x \notin y$ jelöli a $\neg(x \in y)$ formulát, valamint $x \neq y$ a $\neg(x = y)$ formulát.

1.2. Definíció. Egy adott formula lehet *igaz* (i), vagy *hamis* (h). Adott p és q formula igaz vagy hamis formula esetén az alábbi *igazságtáblázatban* foglaljuk össze $\neg p$ és $p \vee q$ igaz vagy hamis voltát.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$
i	i	h	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	h	i	h

(1.2)

Ezek alapján levezethető a többi logikai művelet igazságtáblája.

1.1. Tétel. Legyen p és q formula. Ekkor a bevezetett logikai műveletek igazságtáblája az alábbi.

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	i	i	i
i	h	h	h	h
h	i	h	i	h
h	h	h	i	i

(1.3)

Bizonyítás. A definícióból elemi számolással adódik.

1.3. Definíció. A p és q formulákat *ekvivalensnek* nevezünk, ha igazságtartalmuk azonos, azaz, ha $p \leftrightarrow q$ igaz, ennek jele $p \equiv q$.

1.2. Tétel. *A p, q és r formulára*

$$\begin{array}{llll}
\neg(\neg p) \equiv p & \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) & \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) & \\
p \wedge p \equiv p & p \wedge q \equiv q \wedge p & p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r & \\
p \vee p \equiv p & p \vee q \equiv q \vee p & p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r & (1.4) \\
p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p) & p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) & & \\
& p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & &
\end{array}$$

teljesül.

Bizonyítás. A $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ azonosságot az alábbi igazságtábla bizonyítja.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$
i	i	i	i	i	i	i
h	i	i	h	h	h	h
i	h	i	h	i	i	i
h	h	i	h	h	h	h
i	i	h	i	h	i	i
h	i	h	h	h	h	h
i	h	h	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	h

A többi azonosság is hasonló módon származtatható igazságtáblázatokból.

1.4. Definíció. Az x halmaz *hatványhalmazának* nevezzük és a $\mathcal{P}(x)$ szimbólummal jelöljük azt a halmazt, melynek elemei éppen x részhalmazai.

1.3. Tétel. *(Cantor-tétele.) Nem létezik olyan halmaz, mely minden halmazt tartalmaz.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen x az a halmaz, mely minden halmazt tartalmaz és legyen $y \triangleq \{z \in x \mid z \notin z\}$. Ekkor mind $y \in y$, mind $y \notin y$ ellentmondáshoz vezet.

1.5. Definíció. Adott A, B halmaz esetén $A \cup B$ halmaz jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v (v \in A \cup B \leftrightarrow (v \in A \vee v \in B)) \quad (1.6)$$

teljesül, valamint A és B *uniójának* nevezzük.

1.6. Definíció. Adott A, B halmaz esetén $A \cap B$ halmaz jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v (v \in A \cap B \leftrightarrow (v \in A \wedge v \in B)) \quad (1.7)$$

teljesül, valamint A és B *metszetének* nevezzük.

1.7. Definíció. Adott A, B halmaz esetén az $\{x \in A \mid x \notin B\}$ halmazt A és B *különbségének* nevezzük, ennek jele $A \setminus B$.

1.4. Tétel. *Minden A, B, C halmazra az alábbiak teljesülnek.*

$$\begin{array}{llll}
A \cap \emptyset = \emptyset & A \cap A = A & A \cap B = B \cap A & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\
A \cup \emptyset = A & A \cup A = A & A \cup B = B \cup A & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C
\end{array} \quad (1.8)$$

$$\begin{array}{llll}
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) & A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
\end{array} \quad (1.9)$$

Bizonyítás. A tételben szereplő állítások elemi számolással visszavezethetők a 1.2 tételben szereplő logikai összefüggésekre.

1.2. Függvények

1.8. Definíció. Adott x, y halmazok esetén az

$$(x, y) \triangleq \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad (1.10)$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük.

1.5. Tétel. Minden x, y, a, b halmazra $(x, y) = (a, b) \leftrightarrow (x = a \wedge y = b)$ teljesül.

Bizonyítás. Ha $x = a$ és $y = b$, akkor nyilván $(x, y) = (a, b)$. Tegyük fel, hogy $(x, y) = (a, b)$, vagyis $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ teljesül. Ekkor $\{x\}, \{x, y\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

- Ha $\{x\} = \{a\}$ és $\{x, y\} = \{a\}$, akkor $x = y = a$, valamint $a = b$, tehát ekkor $x = a$ és $y = b$.
- Ha $\{x\} = \{a\}$ és $\{x, y\} = \{a, b\}$, akkor $x = a$, valamint $\{a, y\} = \{a, b\}$ miatt $y = b$, vagy $y = a$, ami ugyancsak azt jelenti, hogy $x = a$ és $y = b$.
- Ha $\{x\} = \{a, b\}$, akkor $x = a = b$ és $y = b$, tehát $x = a$ és $y = b$.

1.9. Definíció. Az A és B halmaz *Descartes-szorzatának* nevezzük az

$$A \times B \triangleq \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A, b \in B\} \quad (1.11)$$

halmazt.

1.10. Definíció. Adott X, Y halmazok esetén a Descartes-szorzatuk tetszőleges részhalmazát *relációnak* nevezzük, azaz R reláció, ha $R \subseteq X \times Y$. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció

- *értelmezési tartománya*

$$\text{Dom } R \triangleq \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R\}; \quad (1.12)$$

- *értékkészlete*

$$\text{Ran } R \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in R\}; \quad (1.13)$$

- *inverze*

$$R^{-1} \triangleq \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}; \quad (1.14)$$

- *általi képe a $H \subseteq X$ halmaznak*

$$R(H) \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in H : (x, y) \in R\}; \quad (1.15)$$

- *megszorítása vagy leszűkítése a $H \subseteq X$ halmazra*

$$R|_H \triangleq R \cap (H \times Y). \quad (1.16)$$

Az $R_1 \subseteq X \times Y$ és $R_2 \subseteq Y \times Z$ reláció *kompozíciója*

$$R_2 \circ R_1 \triangleq \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2\}. \quad (1.17)$$

Nyilván minden $R \subseteq X \times Y$ relációra minden $H \subseteq X$ esetén

$$R(H) = \text{Ran } R|_H \quad (1.18)$$

teljesül.

1.11. Definíció. Tetszőleges X halmaz esetén

$$\text{id}_X \triangleq \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\} \quad (1.19)$$

jelöli az *identitásrelációt*.

1.12. Definíció. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció *függvény*, ha

$$\forall x \forall y \forall y' ((x, y) \in R \wedge (x, y') \in R) \rightarrow y = y' \quad (1.20)$$

teljesül.

Az $f \subseteq X \times Y$ függvényre a továbbiakban az $f : X \rightarrow Y$ jelölést használjuk. Az $f : X \rightarrow Y$ függvény értelmezési tartománya $\text{Dom } f \subseteq X$ és értékkészlete $\text{Ran } f \subseteq Y$. Az f függvényt, mint hozzárendelési szabályt gyakran az

$$f : X \rightarrow Y \quad x \mapsto f(x) \quad (1.21)$$

alakban írjuk fel. A $H \subseteq X$ esetén a függvény leszűkítése

$$f|_H : H \rightarrow Y \quad x \mapsto f(x). \quad (1.22)$$

Abban az esetben, amikor az $f : X \rightarrow Y$ függvényre $\text{Dom } f = X$ teljesül az $f : X \rightarrow Y$ jelölést fogjuk használni. Tehát az $f : X \rightarrow Y$ jelentése az, hogy f függvény és $\text{Dom } f = X$.

A függvények halmazára bevezetjük az $\mathcal{F}(X, Y) = \{f \subseteq X \times Y \mid f \text{ függvény, } \text{Dom } f = X\}$ jelölést, valamint megemlítjük, hogy szokásos még az X^Y jelölés is erre a függvényhalmazra, de egészen kivételes esetektől eltekintve ezt nem használjuk.

1.13. Definíció. Az $f : X \rightarrow Y$ függvény

- *injektív*, ha $\forall x, x' \in X : (f(x) = f(x')) \rightarrow x = x'$;
- *szürjektív*, ha $\text{Ran } f = Y$;
- *bijektív*, ha $\text{Dom } f = X$, injektív és szürjektív.

Az $f : X \rightarrow X$ bijekciót az X halmaz *permutációjának* is nevezzük.

A megszokott matematikai műveletek is függvények, melyek főbb tulajdonságait az alábbiakban definiáljuk.

1.14. Definíció. Valamilyen X halmaz esetén az $X \times X \rightarrow X$ függvényeket gyakran *műveletnek* nevezzük, és jelölésükre általában az infix módot használjuk. Vagyis például az $+$: $X \times X \rightarrow X$ művelet és $x, y \in X$ esetén az $x + y \triangleq +(x, y)$ jelöléssel élünk.

- Azt mondjuk, hogy a $+$ művelet *kommutatív*, ha $\forall x, y \in X : x + y = y + x$.
- A $+$ művelet *asszociatív*, ha $\forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$.
- A $+$ művelet *egységelemes*, ha $\exists e \in X, \forall x \in X : x + e = e + x = x$.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ egységelemes művelet *inverzelemes* ha

$$\forall x \in X : \exists x' \in X : x + x' = e \wedge x' + x = e, \quad (1.23)$$

ahol e jelöli az egységelemet.

- A \cdot : $X \times X \rightarrow X$ művelet *disztributív* a $+$ műveletre nézve, ha $\forall x, y, z \in X$ elemre

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x). \quad (1.24)$$

1.6. Tétel. (Cantor-tétel.) Egyetlen A halmaz esetén sem létezik $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény.

Bizonyítás. Indirekt: Legyen $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ szürjektív függvény. Legyen $Y \triangleq \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Ekkor létezik $x_0 \in A$, melyre $f(x_0) = Y$. Ekkor az $x_0 \in Y$ feltevés és az $x_0 \notin Y$ feltevés is ellentmondáshoz vezet.

1.15. Definíció. Legyen I és A nem üres halmaz. Az $f : I \rightarrow \mathcal{P}(A)$ függvényt *halmazrendszernek* nevezzük, minden $i \in I$ esetén az $A_i \triangleq f(i)$ jelölés használjuk a függvény értékére, valamint az I halmazt *indexhalmaznak* nevezzük. Az f függvényre pedig gyakran az $(A_i)_{i \in I}$ jelölést használjuk.

1.16. Definíció. Legyen $I, A \neq \emptyset$, és $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer. Az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer *uniója*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \triangleq \{x \in A \mid \exists i \in I : x \in A_i\} \quad (1.25)$$

és *metszete*

$$\bigcap_{i \in I} A_i \triangleq \{x \in A \mid \forall i \in I : x \in A_i\}. \quad (1.26)$$

1.17. Definíció. Az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer *Descartes-szorzatán* a

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I : f(i) \in A_i \right\} \quad (1.27)$$

halmazt értjük. Adott $f \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén az $f_k \triangleq f(k)$ jelölést is fogjuk használni.

A Descartes-szorzat elemei tehát az indexhalmazon értelmezett speciális függvények. Abban az esetben, amikor az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszerre minden $i, j \in I$ esetén $A_i = A_j$ teljesül, akkor az $A = A_i$ jelölést bevezetve a halmazrendszer Descartes-szorzatára

$$\prod_{i \in I} A = \{f : I \rightarrow A\} = \mathcal{F}(I, A) \quad (1.28)$$

adódik, amit gyakran az A^I szimbólummal fogunk jelölni.

1.7. Tétel. Legyen A_x, A_y tetszőleges halmaz és $I = \{x, y\}$. Ekkor a

$$\varphi : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_x \times A_y \quad f \mapsto (f(x), f(y)) \quad (1.29)$$

leképezés bijekció.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Ekkor $(\alpha(x), \alpha(y)) = (\beta(x), \beta(y))$, amiből $\alpha(x) = \beta(x)$ és $\alpha(y) = \beta(y)$ adódik, ami pedig azt jelenti, hogy $\alpha = \beta$. Vagyis a φ leképezés injektív. Ha $(c_x, c_y) \in A_x \times A_y$, akkor az $f = \{(x, c_x), (y, c_y)\} \in \prod_{i \in I} A_i$ függvényre $\varphi(f) = (c_x, c_y)$ teljesül, vagyis φ szürjektív.

Ezen tétel értelmében a halmazrendszer szorzata tekinthető a korábban értelmezett Descartes-szorzat általánosításának, ez indokolja az elnevezést.

1.8. Tétel. Ha $(A_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy $\forall i \in I (A_i \neq \emptyset)$, akkor $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

1.3. Valós számok

1.9. Tétel. Létezik olyan $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ nyolcas, ahol

1. $0, 1 \in \mathbb{R}, 0 \neq 1$;
2. $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto a + b$ függvény, $-$: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto -a$ függvény a

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 &= a \\ \forall a \in \mathbb{R} \quad a + (-a) &= 0 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) + c &= a + (b + c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b &= b + a \end{aligned} \tag{1.30}$$

tulajdonságokkal;

3. \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto a \cdot b$ függvény, $^{-1}$: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto a^{-1}$ függvény a

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 &= a \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad a \cdot a^{-1} &= 1 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b &= b \cdot a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned} \tag{1.31}$$

tulajdonságokkal;

4. $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ részalmaz, melyre minden $(a, b) \in \leq$ esetén az $a \leq b$ jelölést használjuk, és mely rendelkezik a

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \quad a &\leq a \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a \leq b \wedge b \leq a) &\rightarrow a = b \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a \leq b \wedge b \leq c) &\rightarrow a \leq c \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b \vee b \leq a & \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a \leq b) &\rightarrow a + c \leq b + c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a \leq b \wedge 0 \leq c) &\rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \end{aligned} \tag{1.32}$$

tulajdonságokkal;

5. továbbá

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} : ((\exists K \in \mathbb{R} : (\forall a \in A : a \leq K)) \rightarrow \tag{1.33}$$

$$\rightarrow (\exists s \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : a \leq s) \wedge (\forall s' \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : a \leq s') \rightarrow s \leq s'))))) \tag{1.34}$$

teljesül.

Továbbá az 1.-4. tulajdonságoknak eleget tevő $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ struktúrát nevezzük rendezett testeknek, valamint ha az 5. is teljesül egy rendezett testre, akkor azt teljesen rendezett testnek nevezzük.

A szorzás \cdot jelét általában nem írjuk ki, azaz $a, b \in \mathbb{R}$ esetén ab jelöli az $a \cdot b$ elemet. Adott $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a - b$ jelöli az $a + (-b)$ elemet. Az $a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén az ab^{-1} elemre gyakran az $a : b$ vagy az $\frac{a}{b}$ jelölést használjuk. Továbbá minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a < b$ vagy $b > a$ azt jelöli, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$.

1.18. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Az A halmaz felső (illetve alsó) korlátjának nevezünk minden olyan $C \in \mathbb{R}$ elemet, amelyre $\forall a \in A \ a \leq C$ ($C \leq a$) teljesül.
- Az A halmaz felülről (illetve alulról) korlátos, ha létezik az A halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az A halmaz korlátos, ha A felülről és alulról is korlátos.

- Az A halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük A minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az A halmaznak.
- Az A halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az A halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup A$ (illetve $\inf A$).

A rendezett testekben (így a valós számok körében is) érvényes számolási szabályokat foglalja össze a következő tétel.

1.10. Tétel. *Legyen $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ rendezett test. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in K : 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x \in K : (-1) \cdot x = -x$
3. $\nexists x \in K : 0 \cdot x = 1$
4. $\forall x, y \in K : x < y \rightarrow -y < -x$
5. $(-1)^2 = 1$
6. $\forall x, y, z \in K : (x < y \wedge z < 0) \rightarrow yz < xz$
7. $\forall x \in K : 0 \leq x^2$
8. $0 < 1$
9. $\forall x, y \in K : 0 < x < y \rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Bizonyítás.

1. Legyen $x \in K$ tetszőleges. Ekkor $0 + 0 = 0$ és a disztributivitás miatt

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x, \quad (1.35)$$

amihez hozzáadva a $-(0 \cdot x)$ elemet $0 \cdot x = 0$ adódik.

2. Ha $x \in K$ akkor az 1. pont alapján $0 \cdot x = 0$, ezért

$$(-1) \cdot x = 0 + (-1) \cdot x = -x + x + (-1) \cdot x = -x + 1 \cdot x + (-1) \cdot x = \quad (1.36)$$

$$= -x + (1 + (-1))x = -x + 0 \cdot x = -x + 0 = -x. \quad (1.37)$$

3. Az 1. pont nyilvánvaló következménye.

4. Ha $x, y \in K$ és $x < y$, akkor az egyenlőtlenséghez hozzáadva a $-x - y$ számot $-y < -x$ adódik.

5. A

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = (1 + (-1) + (-1)) \cdot (-1) = -1 + (-1)^2 + (-1)^2 \quad (1.38)$$

egyenlet elejéhez és végéhez hozzáadva a $-(-1)^2$ számot

$$0 = -1 + (-1)^2, \quad (1.39)$$

majd az 1 számot

$$1 = (-1)^2 \quad (1.40)$$

adódik.

6. Legyen $x, y, z \in K$ olyan, melyre $x < y$ és $z < 0$ teljesül. A 4. pont alapján ekkor $0 < -z$, vagyis $-zx < -zy$, amiből megint a 4. pont alapján $zy < zx$ következik.

7. Legyen $x \in K$. Ha $0 \leq x \in K$, akkor az egyenlőtlenséget megszorozva az x pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik. Ha $x \leq 0$, akkor $0 \leq -x$, amit megszorozva a $-x$ pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik.

8. A 7. pont alapján nyilvánvaló.

9. Legyen $x \in K$ olyan, melyre $0 < x$ teljesül. Ha $\frac{1}{x} \leq 0$ teljesülne, akkor ezt megszorozva az x számmal $1 \leq 0$ ellentmondás adódna, tehát $0 < \frac{1}{x}$. Ha $x, y \in K$ olyan, melyre $0 < x < y$ teljesül, akkor az $x < y$ egyenlőtlenséget megszorozva az $\frac{1}{xy}$ számmal $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ adódik.

1.11. Tétel. *Rendezett testben minden elem négyzete pozitív.*

Bizonyítás. A 1.10 tétel 7. pontja éppen ez volt.

1.19. Definíció. Jelöljön ∞ és $-\infty$ két olyan halmazt, melyre $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ teljesül. Ekkor az $\overline{\mathbb{R}} \triangleq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt *bővített valós számoknak* nevezzük, a ∞ elemet *végtelemnek*, a $-\infty$ elemet pedig *mínusz végtelemnek* mondjuk. A valós számok halmazán értelmezett \leq reláció bővítése

$$\overline{\leq} \triangleq \leq \cup (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{-\infty\} \times \mathbb{R}) \cup \{(-\infty, -\infty)\} \cup \{(-\infty, \infty)\} \cup \{(\infty, \infty)\}. \quad (1.41)$$

$+$ és \cdot művelet az alábbi módon bővítjük.

- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + \infty \triangleq \infty + a \triangleq \infty$, továbbá legyen $\infty + \infty \triangleq \infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + (-\infty) \triangleq (-\infty) + a \triangleq -\infty$, továbbá legyen $-\infty + (-\infty) \triangleq -\infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$a \cdot \infty \triangleq \infty \cdot a \triangleq \begin{cases} \infty & \text{ha } a > 0, \\ -\infty & \text{ha } a < 0, \end{cases} \quad (1.42)$$

továbbá legyen $\infty \cdot \infty \triangleq (-\infty) \cdot (-\infty) \triangleq \infty$, és $(-\infty) \cdot \infty \triangleq \infty \cdot (-\infty) \triangleq -\infty$.

1.20. Definíció. A valós számok halmazán definiáljuk még az $x \in \mathbb{R}$ elem által meghatározott alábbi halmazokat.

$$[x, \infty[= \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z\} \quad (1.43)$$

$$]x, \infty[= \{z \in \mathbb{R} \mid x < z\} \quad (1.44)$$

$$]-\infty, x] = \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq x\} \quad (1.45)$$

$$]-\infty, x[= \{z \in \mathbb{R} \mid z < x\} \quad (1.46)$$

Továbbá bevezetjük még az

$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R} \quad (1.47)$$

jelölést. Ezen halmazokat is *intervallumoknak* nevezzük.

A továbbiakban, ha nem okoz félreértést a bővített $\overline{\leq}$ relációra továbbra is a \leq jelet használjuk, valamint a bővített $+$ és \cdot műveletre sem alkalmazunk új jelölést.

1.21. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ teljesen rendezett test *arkhimédészi módon rendezett*, ha $\forall x, y \in K$ elemhez $x > 0$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $y < n \cdot x$ teljesül.

1.12. Tétel. *Minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett.*

Bizonyítás. Indirekt: Legyen K nem arkhimédészi módon rendezett test, és legyen $x, y \in K$ olyan, hogy $0 < x$ és egyetlen $n \in \mathbb{N}$ számra sem teljesül, hogy $y < n \cdot x$. Ekkor az $X \triangleq \{n \cdot x \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz felső korlátja y , vagyis létezik $\sup X$. Ekkor $(\sup X) - x$ nem felső korlátja az X halmaznak, tehát létezik $n \cdot x \in X$, melyre $(\sup X) - x < n \cdot x$, vagyis $\sup X < (n + 1) \cdot x$, ami ellentmondás.

1.13. Tétel. *A valós számtest arkhimédészi módon rendezett test.*

Bizonyítás. A 1.9 tétel alapján \mathbb{R} teljesen rendezett test, az előző 1.12 tétel alapján pedig minden teljesen rendezett test arkhimédészi módon rendezett test.

1.22. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az

$$[x] \triangleq \begin{cases} \inf \{n \in \mathbb{Z} \mid x < n\} - 1, & \text{ha } x \notin \mathbb{Z}; \\ x, & \text{ha } x \in \mathbb{Z}; \end{cases} \quad (1.48)$$

számot az x egész részének a

$$\{x\} \triangleq x - [x] \quad (1.49)$$

számot pedig az x tört részének nevezzük.

Eddig láttuk, hogy létezik teljesen rendezett test, a következő tétel a teljesen rendezett testek egyértelműségéről szól.

1.14. Tétel. *Bármely két teljesen rendezett test izomorf. Ha $(K_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ és $(K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ teljesen rendezett test, akkor létezik olyan $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ bijekció, melyre minden $x, y \in K_1$ elem esetén*

$$\varphi(x +_1 y) = \varphi(x) +_2 \varphi(y) \quad (1.50)$$

$$\varphi(x \cdot_1 y) = \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y) \quad (1.51)$$

$$x \leq_1 y \Rightarrow \varphi(x) \leq_2 \varphi(y) \quad (1.52)$$

teljesül.

1.4. Számosságok

1.23. Definíció. Legyen A és B halmaz.

- Az A és B ekvipotens, ha létezik $f : A \rightarrow B$ bijekció. Ezt a tényt $|A| = |B|$ jelöli.
- Az A halmaz kisebb-egyenlő számosságú a B halmaznál, ha $\exists X \subseteq B : |A| = |X|$. Ebben az esetben az $|A| \leq |B|$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz kisebb számosságú a B halmaznál, ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$. Ennek jele $|A| < |B|$.
- Az A és B halmaz számosság tekintetében összehasonlítható, ha $(|A| \leq |B|) \vee (|B| \leq |A|)$ teljesül.

Fontos megjegyezni, hogy jelen pillanatban $|A|$ még csak pusztán szimbólum, melyet nem definiáltunk, csak az $|A| \leq |B|$, az $|A| < |B|$ és az $|A| = |B|$ típusú kifejezéseket értelmeztük eddig.

Most a halmazok számosságának két alaptétele következik, melyek biztosítják, hogy bármely két halmaz összehasonlítható a számosság tekintetében, valamint, ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.

1.15. Tétel. *Bármely két halmaz számosság tekintetében összehasonlítható.*

1.16. Tétel. *(Schröder–Bernstein-tétel) Bármely A és B halmazra $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$ esetén $|A| = |B|$ teljesül.*

1.17. Tétel. *Bármely A halmazra $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ teljesül.*

Bizonyítás. A 1.6 Cantor-tétel következménye.

1.24. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz.

- Az A halmaz véges, ha $\exists n \in \mathbb{N}$, melyre $|A| = |n|$ teljesül, ekkor az mondjuk, hogy A egy n elemű halmaz, és az $|A| = n$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz végtelen, ha nem véges.

- Az A halmaz megszámlálható, ha véges vagy $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz megszámlálhatóan végtelen, ha $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz kontinuum számosságú, ha $|A| = |\mathbb{R}|$.

1.18. Tétel. Legyen A és B olyan véges halmaz, melyre $|A| = n$ és $|B| = m$ teljesül, ahol $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Bármely $X \subseteq A$ halmazra $|X| \leq n$.
2. $|A \times B| = mn$
3. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $|A \cup B| = n + m$.
4. $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$
5. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$
6. $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$

1.19. Tétel. (Megszámlálhatóan végtelen halmazok.)

1. Minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.
2. Az A halmaz pontosan akkor végtelen, ha $|\mathbb{N}| \leq |A|$ teljesül.
3. Két megszámlálhatóan végtelen halmaz Descartes-szorzata megszámlálhatóan végtelen.
4. Megszámlálható sok megszámlálhatóan végtelen halmaz uniója megszámlálhatóan végtelen.
5. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$
6. Ha A végtelen halmaz és B megszámlálhatóan végtelen, akkor $|A| = |A \cup B|$.

2 A valós és komplex számok alaptulajdonságai

2.1. Algebrai tulajdonságok

2.1. Tétel. (Bernoulli-egyenlőtlenség.) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \dots, x_n \in [-1, \infty[$ számra, ha tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén $0 \leq x_i x_j$ teljesül, akkor

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.1)$$

speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra $-1 \leq x$ esetén

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \quad (2.2)$$

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetben nyilván igaz az állítás. Teljes indukciót használva tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás, és legyen $x_1, \dots, x_{n+1} \in [-1, \infty[$ olyan, hogy minden $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ esetén $0 \leq x_i x_j$. Ekkor az indukciós feltételt kihasználva

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1 + x_i) = (1 + x_{n+1}) \prod_{i=1}^n (1 + x_i) \geq (1 + x_{n+1}) \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i \right) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i + \sum_{i=1}^n x_i x_{n+1} \geq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i \quad (2.3)$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $n + 1$ esetén is igaz az állítás.

Kiegészítés. A Bernoulli-egyenlőtlenség speciális esetének egyfajta megfordítása is igaz. \diamond

2.2. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén létezik egyetlen olyan $y \in \mathbb{R}_0^+$, melyre $y^n = x$ teljesül.

2.1. Definíció. Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén azt a jól meghatározott $y \in \mathbb{R}_0^+$ számot, melyre $y^n = x$ teljesül x n -edik gyökének nevezzük, ennek jele $x^{\frac{1}{n}}$ vagy $\sqrt[n]{x}$.

2.3. Tétel. Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m. \quad (2.4)$$

Bizonyítás. Az $\alpha = \sqrt[n]{x^m}$ és a $\beta = (\sqrt[n]{x})^m$ számokra $\alpha^n = x^m = \beta^n$ teljesül. Ezen számok n -edik gyöke létezik és egyértelmű, ezért $\alpha = \beta$.

2.2. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}^+$ számnak a $q \in \mathbb{Q}$ kitevőjű hatványát az alábbi módon értelmezzük.

$$x^q \triangleq \begin{cases} \sqrt[n]{x^m}, & \text{ha } q > 0, q = \frac{m}{n}; \quad (m, n \in \mathbb{N}) \\ 1, & \text{ha } q = 0; \\ \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^m}, & \text{ha } q < 0, q = -\frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (2.5)$$

Továbbá $q > 0$ esetén legyen $0^q \triangleq 0$, és $0^0 \triangleq 1$.

2.4. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén.

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}, \quad (x^p)^q = x^{pq}, \quad \frac{1}{x^p} = x^{-p}. \quad (2.6)$$

Bizonyítás. A hatványozás azonosságából egyszerűen adódik.

2.3. Definíció. Az $n \in \mathbb{N}$ szám *faktoriálisa*

$$n! \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 0, \\ \prod_{i=1}^n i, & \text{ha } n > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Az $n, k \in \mathbb{N}$ számokra definiáljuk az n alatt a k számot a

$$\binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ha } k \leq n \\ 0 & \text{ha } k > n \end{cases} \quad (2.8)$$

képlettel.

2.5. Tétel. (*Binomiális tétel.*) Minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \quad (2.9)$$

Bizonyítás. Az $n = 0$ esetben nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás. Ekkor

$$(x + y)^n = (x + y) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \quad (2.10)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \quad (2.11)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \quad (2.12)$$

adódik a könnyen igazolható

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad (2.13)$$

formula segítségével.

2.6. Tétel. (*Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.*) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}. \quad (2.14)$$

Bizonyítás. 1. Az $n = 1$ esetben nyilván igaz az állítás.

2. Ha $n = 2$, akkor a bizonyítandó

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \quad (2.15)$$

egyenlőtlenség ekvivalens az

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \quad (2.16)$$

egyenlőtlenséggel. Azt pedig a 1.11 tétel alapján tudjuk, hogy rendezett testekben a négyzetszámok pozitív elemek.

3. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra igaz az állítás, akkor a $2n$ számra is igaz. Legyen minden $k \in \{1, \dots, 2n\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$. Ekkor felhasználva, hogy az n és a 2 számokra igaz az egyenlőtlenség

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} x_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{n+k} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_{n+k}} \right) \geq \quad (2.17)$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_{n+k}}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{2n} x_k} \quad (2.18)$$

adódik.

4. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}^+$, $n > 2$ számra igaz az állítás, akkor az $n-1$ számra is igaz. Legyen minden $k \in \{1, \dots, n-1\}$ esetén $x_k \in \mathbb{R}^+$, és legyen

$$x_n = \sqrt[n-1]{\prod_{k=1}^{n-1} x_k}. \quad (2.19)$$

Ekkor az x_1, \dots, x_n számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség átrendezéséből adódik az állítás.

2.7. Tétel. (Elemi Cauchy–Schwartz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.)

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}. \quad (2.20)$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (x_k - t y_k)^2 = t^2 \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) - 2t \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right), \quad (2.21)$$

ezért a fenti t szerinti másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem lehet pozitív, azaz

$$4 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \leq 0, \quad (2.22)$$

amiből adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

2.2. Topológiai tulajdonságok

2.4. Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{R}$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\} \quad (2.23)$$

halmazt az x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek nevezzük.

2.5. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz

- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $\mathbb{R} \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

2.8. Tétel. *Korlátos halmaz részhalmaza korlátos. Véges sok korlátos halmaz uniója korlátos.*

Bizonyítás. Az első állítás a definíció közvetlen következménye. A második állításhoz vegyünk A_1, \dots, A_n korlátos halmazokat, és legyen $(r_i, x_i)_{i=1, \dots, n}$ olyan rendszer, hogy minden $i = 1, \dots, n$ esetén $A_i \subseteq B_{r_i}(x_i)$, legyen továbbá minden $i = 1, \dots, n$ esetén $R_i = r_i + |x_i - x_1|$. Ekkor minden i számra $B_{r_i}(x_i) \subseteq B_{R_i}(x_1)$ teljesül az abszolútértékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt.

Tehát az $R = \max\{R_i \mid i = 1, \dots, n\}$ számra teljesül, hogy $\bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq B_R(x_1)$.

2.9. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}$ pontra és $r \in \mathbb{R}^+$ számra $B_r(x)$ korlátos, nyílt halmaz.*

Bizonyítás. A definíció alapján a $B_r(x)$ halmaz korlátossága nyilvánvaló. Legyen $y \in B_r(x)$ és legyen $R = r - |x - y|$. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_R(y) \subseteq B_r(x)$ teljesül. Ha $z \in B_R(y)$, akkor $|z - y| < R = r - |x - y|$, vagyis $|x - y| + |y - z| < r$, amiből pedig $|x - z| < r$ adódik, vagyis $z \in B_r(x)$.

2.10. Tétel. *(Nyílt halmazok rendszere.)*

1. Az üres halmaz és a \mathbb{R} halmaz nyílt.
2. Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
3. Nyílt halmazok tetszőleges rendszerének az uniója nyílt.

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és legyen továbbá $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Ekkor minden $i = 1, \dots, n$ számhoz létezik olyan $r_i \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq A_i$ teljesül. Ha

$$R = \min\{r_i \mid i = 1, \dots, n\}, \quad (2.24)$$

akkor $R \in \mathbb{R}^+$ és $B_R(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$ teljesül.

3. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és legyen továbbá $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Ekkor létezik olyan $i_0 \in I$ melyre $x \in A_{i_0}$ teljesül. Mivel A_{i_0} nyílt halmaz, így létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq A_{i_0}$, vagyis $B_r(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

2.11. Tétel. *(Zárt halmazok rendszere.)*

1. Az üres halmaz és a \mathbb{R} halmaz zárt.
2. Véges sok zárt halmaz uniója zárt.
3. Zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt.

Bizonyítás. 1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Legyen $(Z_i)_{i=1, \dots, n}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathbb{R} \setminus Z_i$ nyílt halmaz. Az

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n Z_i = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R} \setminus Z_i) \quad (2.25)$$

azonosság miatt $\bigcup_{i=1}^n Z_i$ komplementere véges sok nyílt halmaz metszete, így az előző állítás miatt az is nyílt. Vagyis a $\bigcup_{i=1}^n Z_i$ halmaz zárt.

3. Legyen $(Z_i)_{i \in I}$ zárt halmazok tetszőleges rendszere. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $\mathbb{R} \setminus Z_i$ nyílt halmaz. Az

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus Z_i) \quad (2.26)$$

azonosság miatt $\bigcap_{i \in I} Z_i$ komplementere nyílt halmazok uniója, így az előző állítás miatt az is nyílt.

Vagyis a $\bigcap_{i \in I} Z_i$ halmaz zárt.

2.12. Tétel. Legyen $Z, U \subseteq \mathbb{R}$. Ha Z zárt halmaz és U nyílt halmaz, akkor $Z \setminus U$ zárt halmaz és $U \setminus Z$ nyílt halmaz.

Bizonyítás. Legyen $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz és $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Ekkor az

$$Z \setminus U = Z \cap (\mathbb{R} \setminus U) \quad (2.27)$$

azonosság alapján az $Z \setminus U$ két zárt halmaz metszete, ezért zárt. Az

$$U \setminus Z = U \cap (\mathbb{R} \setminus Z) \quad (2.28)$$

egyenlőség szerint az $U \setminus Z$ halmaz két nyílt halmaz metszete, ezért nyílt.

2.6. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy x

- *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \subseteq X$;
- *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$;
- *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
- *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X = \{x\}$.

2.7. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

2.8. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\text{Int } X = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \subseteq X\} \quad (2.29)$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall r \in \mathbb{R}^+ : B_r(x) \cap X \neq \emptyset\} \quad (2.30)$$

halmazt. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\text{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \text{Int } X \quad (2.31)$$

halmazt.

2.13. Tétel. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

1. $\text{Int } X$ halmaz nyílt;

2. $\text{Int } X$ az a legbővebb nyílt halmaz, melyet X tartalmaz;
3. \overline{X} halmaz zárt;
4. \overline{X} az a legszűkebb zárt halmaz, mely tartalmazza X -et.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \text{Int } X$. Ekkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(x) \subseteq X$. Mivel a $B_r(x)$ halmaz minden pontja belső pontja az X halmaznak, ezért $B_r(x) \subseteq \text{Int } X$ teljesül.

2. Jelölje U azt a legbővebb nyílt halmazt, melyet X tartalmaz. Ekkor nyilván $\text{Int } X \subseteq U$ teljesül. Legyen $z \in U$. Ekkor az U halmaz nyíltsága miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(z) \subseteq U$ amiből a $U \subseteq X$ felhasználásával $B_r(z) \subseteq X$ adódik, vagyis $z \in \text{Int } X$. Tehát az $U \subseteq \text{Int } X$ tartalmazás is fennáll.

3. Legyen $z \in \mathbb{R} \setminus \overline{X}$. Ekkor a lezárt definíciója alapján létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(z) \cap X = \emptyset$ teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor $B_r(z) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{X}$, vagyis az \overline{X} halmaz komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy létezik $y \in B_r(z) \cap \overline{X}$ elem. Ekkor a $\rho = r - |y - z| > 0$ számra $B_\rho(y) \cap X \neq \emptyset$ teljesül a lezárt definíciójából. A $B_\rho(y) \subseteq B_r(z)$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_\rho(y) \cap X \subseteq B_r(z) \cap X = \emptyset$ ellentmondás adódik.

4. Jelölje Z azt a legszűkebb zárt halmazt, mely az X halmazt tartalmazza. Ekkor nyilván $Z \subseteq \overline{X}$ teljesül. Tegyük fel, hogy létezik $y \in \overline{X} \setminus Z$ elem. A Z halmaz zárttsága és $y \notin Z$ miatt létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(y) \cap Z = \emptyset$. A lezárt értelmezése alapján $B_r(y) \cap X \neq \emptyset$. Az $X \subseteq Z$ tartalmazás felhasználásával az $\emptyset \neq B_r(y) \cap X \subseteq B_r(y) \cap Z = \emptyset$ ellentmondás adódik.

2.14. Tétel. Tetszőleges $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz esetén

1. az X halmaz pontosan akkor nyílt, ha $X = \text{Int } X$;
2. az X halmaz pontosan akkor zárt, ha $X = \overline{X}$.

Bizonyítás. Az előző tétel alapján nyilvánvaló.

2.15. Tétel. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, és legyen $x \in \mathbb{R}$ az X halmaz torlódási pontja. Ez azt jelenti, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset. \quad (2.32)$$

Vagyis minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \subseteq B_r(x) \cap X \neq \emptyset, \quad (2.33)$$

amiből definíció szerint $x \in \overline{X}$ következik. Mivel X zárt halmaz, ezért az előző állítás miatt $x \in X$. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, mely tartalmazza az összes torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy ekkor $X = \overline{X}$ teljesül, mely ekvivalens az X halmaz zárttságával. Az $X \subseteq \overline{X}$ tartalmazás nyilvánvaló ezért csak azt kell igazolni, hogy $\overline{X} \subseteq X$. Tegyük fel, hogy létezik $x \in \overline{X} \setminus X$ elem. Ekkor $x \in \overline{X}$ miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$B_r(x) \cap X \neq \emptyset, \quad (2.34)$$

továbbá $x \notin X$ miatt

$$(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset, \quad (2.35)$$

vagyis x az X halmaz torlódási pontja. Mivel X tartalmazza az összes torlódási pontját, ezért az $x \in X$ ellentmondást kapjuk.

2.16. Tétel. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos halmaz.

1. Ha az X halmaz zárt, akkor $\inf X, \sup X \in X$.

2. Ha az X halmaz nyílt, akkor $\inf X, \sup X \notin X$.

Bizonyítás. 1. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos zárt halmaz. Ha $r \in \mathbb{R}^+$, akkor $\inf X + r$ nem a legnagyobb alsó korlátja az X halmaznak, vagyis létezik olyan $x \in X$, melyre $x < \inf X + r$ teljesül, valamint $\sup X - r$ nem a legkisebb felső korlátja az X halmaznak, vagyis létezik olyan $x' \in X$, melyre $\sup X - r < x'$ teljesül. Tehát minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(\inf X) \cap X \neq \emptyset$ és $B_r(\sup X) \cap X \neq \emptyset$, ami azt jelenti, hogy $\inf X, \sup X \in \overline{X} = X$.

2. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ korlátos nyílt halmaz. Ha $\inf X \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(\inf X) \subseteq X$ teljesül, vagyis $\inf X$ nem alsó korlátja az X halmaznak. A $\sup X$ számra hasonló ellentmondást kapunk a $\sup X \in X$ feltételezéséből.

2.9. Definíció. Adott $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ halmazok esetén azt mondjuk, hogy az X halmaz sűrű az Y halmazban, ha $\overline{X} = Y$ teljesül, valamint, hogy az X halmaz sűrű, ha X sűrű a \mathbb{R} halmazban.

2.17. Tétel. (A racionális és az irracionális számok sűrűn vannak.)

1. A \mathbb{Q} halmaz sűrű az \mathbb{R} halmazban.
2. Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmaz sűrű az \mathbb{R} halmazban.

Bizonyítás.

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ tartalmazáshoz azt kell megmutatni, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $q \in \mathbb{Q}$ szám melyre $q \in B_r(x)$ teljesül, vagyis $q \in]x - r, x + r[$. Ehhez vegyünk egy tetszőleges $0 < r$ paramétert. Ekkor az \mathbb{R} arkhimédészi tulajdonsága miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $1 < 2Nr$ teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből

$$1 + N(x - r) < N(x + r) \quad (2.36)$$

adódik. Jelölje n azt a jól meghatározott egész számot, melyre $n \leq N(x - r) < n + 1$ teljesül. Ekkor $n \leq N(x - r)$ miatt

$$n + 1 \leq N(x - r) + 1 < N(x - r) + 2Nr = N(x + r), \quad (2.37)$$

ezért

$$N(x - r) < n + 1 < N(x + r), \quad (2.38)$$

vagyis a $q_x = \frac{n+1}{N} \in \mathbb{Q}$ számra $q_x \in B_r(x)$ teljesül.

2. Ebben a részben használjuk az oszthatósági szabályok segítségével könnyen igazolható $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ formulát. Legyen $x \in \mathbb{R}$, és vegyünk egy tetszőleges $0 < r$ paramétert. Ekkor az \mathbb{R} arkhimédészi tulajdonsága miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre $1 < \sqrt{2}Nr$ teljesül. Ebből az egyenlőtlenségből

$$1 + \frac{\sqrt{2}N}{2}(x - r) < \frac{\sqrt{2}N}{2}(x + r) \quad (2.39)$$

adódik. Jelölje n azt a jól meghatározott egész számot, melyre $n \leq \frac{\sqrt{2}N(x - r)}{2} < n + 1$ teljesül.

Ekkor $n \leq \frac{\sqrt{2}N(x - r)}{2}$ miatt

$$n + 1 \leq \frac{\sqrt{2}N(x - r)}{2} + 1 < \frac{\sqrt{2}N(x - r)}{2} + \sqrt{2}Nr = \frac{\sqrt{2}N(x + r)}{2}, \quad (2.40)$$

ezért

$$\frac{\sqrt{2}N(x - r)}{2} < n + 1 < \frac{\sqrt{2}N(x + r)}{2}, \quad (2.41)$$

vagyis a $p_x = \frac{2(n+1)}{\sqrt{2}N} = \sqrt{2} \cdot \frac{n+1}{N}$ számra $p_x \notin \mathbb{Q}$ és $p_x \in B_r(x)$ teljesül.

2.18. Tétel. (Cantor-féle közsérész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i, j \in I$ esetén létezik olyan $k \in I$ index, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset. \quad (2.42)$$

Bizonyítás. Ha $i, j \in I$, akkor létezik olyan $k \in I$, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$ teljesül, tehát

$$\inf(A_j) \leq \inf(A_k) \leq \sup(A_k) \leq \sup(A_i). \quad (2.43)$$

Ezek alapján a $\{\sup(A_i) \mid i \in I\}$ halmaz alulról korlátos, vagyis létezik a $x = \inf \{\sup(A_i) \mid i \in I\} \in \mathbb{R}$ elem. Megmutatjuk, hogy $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Ehhez elég azt igazolni, hogy minden $i \in I$ esetén $x \in \overline{A_i}$.

Legyen $i \in I$ és $r \in \mathbb{R}^+$, belátjuk, hogy $B_r(x) \cap A_i \neq \emptyset$. Mivel $x + r$ nem a legnagyobb alsó korlátja a $\{\sup A_i \mid i \in I\}$ halmaznak, ezért létezik olyan $j \in I$, melyre $\sup A_j < x + r$. Legyen $k \in I$ olyan, melyre $A_k \subseteq A_i \cap A_j$. Ekkor nyilván $\sup A_k \leq \sup A_j < x + r$, továbbá $\sup A_k - r$ nem a legkisebb felső korlátja az A_k halmaznak, ezért létezik olyan $y \in A_k$, melyre $\sup A_k - r < y$. Az utolsó egyenlőtlenség miatt $x - r < y$, $\sup A_k \leq \sup A_j < x + r$ miatt $y < x + r$, valamint $A_k \subseteq A_i \cap A_j$ miatt $y \in A_i$. Vagyis $y \in B_r(x) \cap A_i$.

Érdeemes külön kiemelni a fenti állítás egy következményét.

2.19. Tétel. (Cantor-féle közsérész-tétel a valós számok halmazán.) Legyen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ olyan halmazrendszer, melyre minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres halmaz, továbbá minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $A_{i+1} \subseteq A_i$. Ekkor

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \neq \emptyset. \quad (2.44)$$

Bizonyítás. Az állítás az előzőek közvetlen következménye.

2.10. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz (be)fedésének nevezünk minden olyan $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszert, melyre $\forall i \in I : A_i \subseteq \mathbb{R}$ és $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ teljesül. Az $(A_i)_{i \in I}$ befedés részbefedésének nevezünk minden

olyan $(A_i)_{i \in I'}$ rendszert, melyre $I' \subseteq I$ és $X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül.

2.11. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz kompakt, ha minden nyílt halmazokból álló befedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre

$X \subseteq \bigcup_{i \in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i halmaz nyílt.

2.20. Tétel. (Borel–Lebesgue-tétel valós számokra.) Az \mathbb{R} halmaz valamely részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

Bizonyítás. Legyen $C \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Megmutatjuk, hogy C korlátos. Mivel $C \subseteq \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} B_n(0)$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $C \subseteq \bigcup_{n \in I} B_n(0)$. Ekkor az $r = \max_{n \in I} (n)$ számra $C \subseteq B_r(0)$ teljesül. Most igazoljuk, hogy C zárt. Tegyük fel, hogy C nem zárt, ami azt jelenti,

hogy a C komplementere nem nyílt. Legyen $z \in \mathbb{R} \setminus C$ olyan pont, melyre minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(z) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus C$, vagyis $B_r(z) \cap C \neq \emptyset$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra legyen $U_n = \mathbb{R} \setminus \overline{B_{\frac{1}{n}}(z)}$, mely nyílt halmaz. Mivel $C \subseteq \mathbb{R} \setminus \{z\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} U_n$, ezért létezik olyan véges $I \subseteq \mathbb{N}^+$ halmaz, hogy $C \subseteq \bigcup_{n \in I} U_n$.

Ekkor az $m = \max_{n \in I} (n)$ számra $C \subseteq U_m$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\overline{B_{\frac{1}{m}}(z)} \cap C = \emptyset$, vagyis ha $0 < r < \frac{1}{m}$, akkor $B_r(z) \subseteq \overline{B_{\frac{1}{m}}(z)}$, tehát $B_r(z) \cap C = \emptyset$, ami pedig ellentmondás.

Most tegyük fel, hogy $C \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmaz, valamint az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer a C halmaz nyílt fedése, vagyis minden $i \in I$ esetén $A_i \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, és $C \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ teljesül. Jelölje J az I

halmaz nem üres, véges részhalmazainak a halmazát, vagyis $J = \{j \subseteq I \mid j \neq \emptyset, j \text{ véges}\}$, valamint minden $j \in J$ esetén legyen $B_j = C \setminus \bigcup_{i \in j} A_i$. Ekkor minden $j \in J$ esetén B_j korlátos zárt halmaz,

valamint minden $j_1, j_2 \in J$ elemhez létezik olyan $j' \in J$, melyre $B_{j'} \subseteq B_{j_1} \cap B_{j_2}$ teljesül. Ha egyik B_j halmaz sem lenne üres, akkor a Cantor-féle közösrész-tétel alapján

$$\emptyset \neq \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{j \in J} \left(C \setminus \bigcup_{i \in j} A_i \right) = C \setminus \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in j} A_i = C \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \quad (2.45)$$

teljesülne, ami ellentmondana annak, hogy az $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer a C halmaz fedése. Tehát létezik olyan $j \in J$, melyre $B_j = \emptyset$. Ez viszont azt jelenti, hogy $C \subseteq \bigcup_{i \in j} A_i$, vagyis a C halmaznak létezik véges fedése.

Megjegyzés. A Cantor-féle közösrész-tétel ezek után úgy is megfogalmazható, hogy \mathbb{R} egymásba ágyazott, nem üres, kompakt részhalmazainak a metszete nem üres. \diamond

2.3. Függvények összege, szorzata

2.12. Definíció. Legyen A halmaz, $+$: $A \times A \rightarrow A$ művelet, $a \in A$ és $U, V \subseteq A$. Ekkor definiáljuk az alábbi jelöléseket.

$$\begin{aligned} U + V &:= \{u + v \in A \mid u \in U, v \in V\} \\ a + V &:= \{a + v \in A \mid v \in V\} \\ U + a &:= \{u + a \in A \mid u \in U\} \end{aligned}$$

Ennek a segítségével értelmezhetők az alábbi *komplexus műveletek*.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) &\rightarrow \mathcal{P}(A) & (U, V) &\mapsto U + V \\ \mathcal{P}(A) &\rightarrow \mathcal{P}(A) & V &\mapsto a + V \\ \mathcal{P}(A) &\rightarrow \mathcal{P}(A) & U &\mapsto U + a \end{aligned}$$

2.13. Definíció. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

– Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor definiáljuk a *függvények összegét, szorzatát, számszorosát és abszolút értékét* az alábbi módon.

$$f + g : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto f(a) + g(a) \quad (2.46)$$

$$fg : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto f(a)g(a) \quad (2.47)$$

$$cf : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto cf(a) \quad (2.48)$$

$$|f| : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto |f(a)| \quad (2.49)$$

- Értelmezzük az összeadás, szorzás, számmal való szorzás és abszolútérték képzés műveletét a függvények terén az alábbi módon.

$$+ : \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \quad (f, g) \mapsto f + g \quad (2.50)$$

$$\times : \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \quad (f, g) \mapsto fg \quad (2.51)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \quad (c, f) \mapsto cf \quad (2.52)$$

$$|\cdot| : \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \quad (f) \mapsto |f| \quad (2.53)$$

Az így bevezetett függvénytűveleteket nevezzük *pontonkénti függvénytűveleteknek*.

- Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén legyen $f_i \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor az $(f_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ függvényrendszer *alsó*, illetve *felső burkolóját* az alábbi képlettel definiáljuk.

$$\sup(f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \sup(f_1(a), \dots, f_n(a)) \quad (2.54)$$

$$\inf(f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \inf(f_1(a), \dots, f_n(a)) \quad (2.55)$$

- Az $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ függvény *pozitív*, illetve *negatív részét* az alábbi képletek definiálják.

$$f_+ : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \sup(f(a), 0) \quad (2.56)$$

$$f_- : A \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto -\inf(f(a), 0) \quad (2.57)$$

2.21. Tétel. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

1. Ha $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor

$$f = f_+ - f_- \quad |f| = f_+ + f_- \quad f_+ f_- = 0 \quad (2.58)$$

teljesül.

2. Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, akkor

$$\sup(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \inf(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \quad (2.59)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

1. Legyen $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ és legyen $a \in A$ tetszőleges.

Ha $f(a) > 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = f(a)$ és $f_-(a) = 0$, vagyis teljesülnek a 2.58 egyenletek.

Ha $f(a) = 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = 0$ és $f_-(a) = 0$, vagyis teljesülnek a 2.58 egyenletek.

Ha $f(a) < 0$, akkor a definíció alapján $f_+(a) = 0$ és $f_-(a) = -f(a)$, vagyis ebben az esetben is teljesülnek a 2.58 egyenletek.

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az $a < b$, $a = b$ és $a > b$ eseteket külön megvizsgálva igazolható egyszerűen a

$$\sup(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} \quad \inf(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2} \quad (2.60)$$

azonosság. Legyen $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Ekkor elég minden $x \in A$ elemre az $a = f(x)$ és $b = g(x)$ választással alkalmazni az előző azonosságot a tétel bizonyításához.

2.14. Definíció. Adott $(a_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ esetén a

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (2.61)$$

függvényt *polinomnak* nevezzük, az a_i paramétereket pedig a polinom *együtthatóinak*. Ha $a_n \neq 0$, akkor p n -ed fokú polinom, melynek *főegyütthatója* a_n . Az $x_0 \in \mathbb{R}$ számot a p polinom *gyökének* nevezzük, ha $p(x_0) = 0$ teljesül.

3 Sorozatok

3.1. A határérték és tulajdonágai

3.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket *valós számsorozatoknak*, az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényeket *komplex számsorozatoknak* nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat értékeire az $a_n \triangleq a(n)$ jelölést használjuk.

3.2. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*)

- Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}$ szám az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \rightarrow a_n \in B_\varepsilon(x)). \quad (3.1)$$

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *határértéke végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \rightarrow \varepsilon < a_n). \quad (3.2)$$

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *határértéke mínusz végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \rightarrow -\varepsilon > a_n). \quad (3.3)$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *konvergens*, ha létezik véges határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

3.1. Tétel. Ha $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat határértéke, akkor $x = y$.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < \frac{|x - y|}{2}$ és $|a_n - y| < \frac{|x - y|}{2}$. Amiből az

$$|x - y| = |x - a_n + a_n - y| \leq |x - a_n| + |a_n - y| < |x - y| \quad (3.4)$$

ellentmondás adódik.

Ha $x \in \mathbb{R}$ és $y = \infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n > x + 1$, ami ellentmondás. Valamint hasonlóan, ha $x \in \mathbb{R}$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n < x - 1$, ami ellentmondás. Végül ha $x = \infty$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $a_n < 0$ és $a_n > 0$, ami ellentmondás.

3.3. Definíció. (*A lim művelet.*)

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ jelöli.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat határértéke végtelen, a $\lim a = \infty$ vagy a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ jelölés fejezi ki.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat határértéke mínusz végtelen, a $\lim a = -\infty$ vagy a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ jelölés fejezi ki.

3.4. Definíció.

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *korlátos*, ha $\text{Ran } a$ korlátos halmaz.
- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *zérussorozat*, ha $\lim a = 0$.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *monoton növény*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *monoton fogyó*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

3.2. Tétel. Minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, és legyen $A = \lim a$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $a_n \in B_1(A)$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\text{Ran } a \subseteq B_1(A) \cup \left(\bigcup_{n=0}^N \{a_n\} \right)$ és a jobb oldalon álló halmaz véges sok korlátos halmaz uniója, vagyis korlátos, a $\text{Ran } a$ halmaz is korlátos.

3.3. Tétel. Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, és a határértéke ugyanaz, mint az eredeti sorozat határértéke.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ indexsorozat, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - \lim a| < \varepsilon$ teljesül. Mivel $\sigma(n) \geq n$, ezért minden $n > N$ számra $|a_{\sigma(n)} - \lim a| < \varepsilon$ teljesül, vagyis az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, és $\lim(a \circ \sigma) = \lim a$.

3.4. Tétel. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növény korlátos sorozat, és legyen $A = \sup \text{Ran } a$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az $A - \varepsilon < A$ egyenlőtlenség miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $A - \varepsilon < a_N$. Mivel az a sorozat monoton növény, így minden $n > N$ természetes számra $A - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq A < A + \varepsilon$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, tehát $\lim a = \sup \text{Ran } a$. Monoton csökkenő sorozatra teljesen hasonló a bizonyítás.

3.5. Tétel. Zérussorozat és korlátos sorozat szorzata zérussorozat.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos sorozat, $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zérussorozat és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n| < K$. Létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|b_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ekkor minden $n > N$ számra

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < K \cdot |b_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon, \quad (3.5)$$

vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

3.6. Tétel. Legyen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, és $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
- A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = \lambda(\lim a)$.
- Az ab sorozat konvergens és $\lim ab = (\lim a)(\lim b)$.
- Az \bar{a} sorozat konvergens és $\lim \bar{a} = \overline{\lim a}$.
- Az $|a|$ sorozat konvergens és $\lim |a| = |\lim a|$.
- Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \neq 0$ és $\lim a \neq 0$, akkor az $\frac{1}{a}$ sorozat konvergens és $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$.

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, az $A = \lim a$ és $B = \lim b$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.

1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

és minden $n > N_b$ számra $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (3.6)$$

2. A $\lambda = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Ekkor $n > N_a$ számra

$$|\lambda a_n - \lambda A| = |\lambda| \cdot |a_n - A| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon. \quad (3.7)$$

3. Mivel az a sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n| < K$. Ha $B = 0$, akkor az előző állítás szerint egy korlátos és egy zérussorozat szorzata zérussorozat. Tehát elég a $B \neq 0$ esetet vizsgálni. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}$ és legyen $N_b \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_b$ esetén $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2|B|} = \varepsilon. \quad (3.8)$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, akkor $n > N_a$ számra

$$\left| \overline{a_n} - \overline{A} \right| = \left| \overline{(a_n - A)} \right| = |a_n - A| < \varepsilon. \quad (3.9)$$

5. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, akkor $n > N_a$ számra

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon. \quad (3.10)$$

6. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és legyen $\lim a = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Legyen $N_1 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ esetén $|a_n - A| < \frac{|A|}{2}$. Ekkor minden $n > N_1$ számra $|a_n| > \frac{|A|}{2}$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon |A|^2}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_1, N_a\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{A} \right| = \frac{|a_n - A|}{|a_n| \cdot |A|} < \frac{|a_n - A|}{\frac{|A|}{2} \cdot |A|} < \frac{2}{|A|^2} \cdot \frac{\varepsilon |A|^2}{2} = \varepsilon. \quad (3.11)$$

3.7. Tétel. Ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatra $\lim |a| = 0$ teljesül, akkor $\lim a = 0$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor a $\lim |a| = 0$ tulajdonság miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$|a| < \varepsilon \quad (3.12)$$

teljesül, ami éppen a $\lim a = 0$ tulajdonságot fejezi ki.

3.8. Tétel. Ha az $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozatra minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$, akkor $\lim a \leq \lim b$.

Bizonyítás. Legyen $A = \lim a$, $B = \lim b$ és tegyük fel, hogy $B < A$. Az $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ és $|b_n - B| < \varepsilon$. Vagyis $n > N$ esetén az $A - \varepsilon < a_n$ egyenlőtlenség miatt $\frac{A+B}{2} < a_n$, és a $b_n < B + \varepsilon$ egyenlőtlenség miatt $b_n < \frac{A+B}{2}$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $a_n \leq b_n$.

3.9. Tétel. (Rendőr-elv.) Legyen $a, b, c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim a = \lim c = x$ teljesül. Ekkor b konvergens, és $\lim b = x$.

Bizonyítás. Bevezetve az $\alpha = b - a$ és a $\beta = c - a$ sorozatok, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ teljesül. A $\lim \beta = 0$ határérték miatt minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $-\varepsilon < \beta_n < \varepsilon$. A $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség alapján ekkor $|\alpha_n| < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $\lim \alpha = 0$. Ekkor a $b = \alpha + a$ sorozat is konvergens és $\lim b = \lim \alpha + \lim a = x$.

3.10. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az

$$a^p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto a_n^p \quad (3.13)$$

sorozat konvergens, és

$$\lim a^p = (\lim a)^p \quad (3.14)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, $A = \lim a$, $p \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $p = 0, 1$ esetekben nyilván teljesül az állítás, így feltehetjük, hogy $p \geq 2$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Mivel $\lim a = A$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $|a_n| < 2|A|$ teljesül. Ekkor az $n > N_1$ esetben

$$|A^p - a_n^p| = |A - a_n| \cdot \left| \sum_{k=0}^{p-1} A^k a_n^{p-1-k} \right| \leq |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^k |a_n|^{p-1-k} < \quad (3.15)$$

$$< |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^k (2|A|)^{p-1-k} \leq |A - a_n| \cdot \sum_{k=0}^{p-1} |A|^{p-1} 2^{p-1} \leq \quad (3.16)$$

$$\leq |A - a_n| \cdot p |A|^{p-1} 2^{p-1}. \quad (3.17)$$

Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon}{p |A|^{p-1} 2^{p-1}}. \quad (3.18)$$

Ebben az esetben az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$|A^p - a_n^p| < |A - a_n| \cdot p |A|^{p-1} 2^{p-1} < \frac{\varepsilon}{p |A|^{p-1} 2^{p-1}} \cdot p |A|^{p-1} 2^{p-1} = \varepsilon, \quad (3.19)$$

vagyis $\lim a^p = A^p$.

Most vizsgáljuk meg az $A = 0$ esetet. Mivel $\lim a = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $|a_n| < 1$ teljesül, valamint létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra $|a_n| < \varepsilon$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$|a_n|^p \leq |a_n| < \varepsilon, \quad (3.20)$$

vagyis $\lim a^p = 0$.

3.11. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $p \in \mathbb{N}$. Az

$$\sqrt[p]{a} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad n \mapsto \sqrt[p]{a_n} \quad (3.21)$$

sorozat konvergens, és

$$\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{\lim a} \quad (3.22)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, $A = \lim a$, $p \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A $p = 0, 1$ esetekben nyilván teljesül az állítás, így feltehetjük, hogy $p \geq 2$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Mivel $\lim a = A$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra $a_n > \frac{A}{2}$ teljesül. Ekkor az $n > N_1$ esetben

$$\left| \sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{a_n} \right| = \frac{|A - a_n|}{\sum_{k=0}^{p-1} A^{\frac{k}{p}} a_n^{\frac{p-1-k}{p}}} \leq \frac{|A - a_n|}{\sum_{k=0}^{p-1} A^{\frac{k}{p}} \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{p-1-k}{p}}} < \quad (3.23)$$

$$< \frac{|A - a_n|}{\sum_{k=0}^{p-1} A^{\frac{p-1}{p}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} \cdot |A - a_n|. \quad (3.24)$$

Legyen $N_2 \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$|A - a_n| < \frac{\varepsilon \cdot pA^{\frac{p-1}{p}}}{2}. \quad (3.25)$$

Ebben az esetben az $N = \max\{N_1, N_2\}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left| \sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{a_n} \right| < |A - a_n| \cdot \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} < \frac{\varepsilon \cdot pA^{\frac{p-1}{p}}}{2} \cdot \frac{2}{pA^{\frac{p-1}{p}}} = \varepsilon, \quad (3.26)$$

vagyis $\lim \sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{A}$.

Most vizsgáljuk meg az $A = 0$ esetet. Mivel $\lim a = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra $a_n < \varepsilon^p$ teljesül. Ekkor minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[p]{a_n} < \varepsilon, \quad (3.27)$$

vagyis $\lim \sqrt[p]{a} = 0$.

3.12. Tétel. (Sorozatok racionális hatványa.) Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat és $q \in \mathbb{Q}$. Az

$$a^q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad n \mapsto a_n^q \quad (3.28)$$

sorozat konvergens, és

$$\lim a^q = \begin{cases} (\lim a)^q, & \text{ha } \lim a > 0 \vee q \geq 0; \\ \infty, & \text{ha } \lim a = 0 \wedge q < 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ konvergens sorozat, $A = \lim a$ és $q \in \mathbb{Q}$. Ha $q = 0$, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás.

Ha $q > 0$, akkor létezik olyan $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, melyre $q = \frac{p_1}{p_2}$. Ekkor a 3.12 és a 3.11 tételből következik az állítás.

Ha $q < 0$, akkor a 3.6 tétel segítségével visszavezethető a $q > 0$ esetre az állítás.

3.13. Tétel. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$.

1. Az A halmaznak x pontosan akkor a torlódási pontja, ha létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$.
2. Az A halmaz pontosan akkor zárt, ha minden konvergens $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozatra $\lim a \in A$.

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$.

1. Tegyük fel, hogy x az A halmaz torlódási pontja. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\} \right) \cap A \neq \emptyset. \quad (3.30)$$

A 1.8 tétel alapján

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left(B_{\frac{1}{n+1}}(x) \setminus \{x\} \right) \cap A \neq \emptyset, \quad (3.31)$$

legyen a egy tetszőleges eleme ennek a halmaznak. Ekkor a egy $\mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ sorozat, melyre $\lim a = x$, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|a_n - x| < \frac{1}{n+1}$.

Tegyük fel, hogy $a : \mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{x\}$ olyan sorozat, melyre $\lim a = x$, és legyen $r \in \mathbb{R}^+$. Az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - x| < r$, vagyis $a_{N+1} \in B_r(x)$. Az a_{N+1} elemre $a_{N+1} \in A \setminus \{x\}$ is teljesül, ezért

$$a_{N+1} \in (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset. \quad (3.32)$$

2. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ konvergens sorozat és $\lim a = \alpha$. Tegyük fel, hogy $\alpha \notin A$. Ekkor $a : \mathbb{N} \rightarrow A \setminus \{\alpha\}$ konvergens sorozat, melyre $\lim a = \alpha$ teljesül, tehát a tétel 1. pontja miatt α torlódási pontja az A halmaznak. Amiből az A halmaz zártsága miatt az $\alpha \in A$ ellentmondás adódik. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ konvergens sorozat esetén $\lim a \in A$. Tegyük fel, hogy az A halmaz nem zárt, és legyen $\alpha \in \overline{A} \setminus A$. A lezárás definíciója alapján ekkor α torlódási pontja az A halmaznak. Ezért létezik olyan $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozat, melyre $\lim a = \alpha$, vagyis az $\alpha \in A$ ellentmondást kapjuk.

3.14. Tétel. (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.) Minden korlátos sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos sorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n = \overline{\{a_k \mid k \geq n\}}$. Az $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszerre teljesülnek a 2.19 Cantor-tétel feltételei, ezért $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Legyen

$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Mivel minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_\varepsilon(x) \cap \{a_k \mid k \geq n\} \neq \emptyset$, ezért létezik olyan $k \geq n$,

melyre $a_k \in B_\varepsilon(x)$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

- Legyen $\sigma(0) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \in B_1(x)\}$.
- Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \wedge a_k \in B_{\frac{1}{n+2}}(x) \right\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens, határértéke x .

Ha $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ sorozat, akkor a $\operatorname{Re} \circ a$ valós sorozathoz létezik olyan σ_1 indexsorozat, hogy $\operatorname{Re} \circ a \circ \sigma_1$ konvergens; és az $\operatorname{Im} \circ a \circ \sigma_1$ valós sorozathoz létezik olyan σ_2 indexsorozat, hogy $\operatorname{Im} \circ a \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$ konvergens. Ekkor a $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ indexsorozatra az $a \circ \sigma$ sorozat konvergens lesz.

3.15. Tétel. (Bolzano–Weierstrass-tétel.) Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor korlátos és zárt, ha minden $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \rightarrow A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ korlátos és zárt halmaz, valamint legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ tetszőleges sorozat. Mivel az a sorozat korlátos, ezért létezik a' konvergens részsorozata. Ekkor $\lim a' \in \overline{A}$, vagyis az A halmaz zártsága miatt $\lim a' \in A$.

Tegyük fel, hogy $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, hogy minden $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozatnak létezik olyan $a' : \mathbb{N} \rightarrow A$ részsorozata, melyre $\lim a' \in A$ teljesül. Megmutatjuk, hogy az A halmaz korlátos és zárt.

Ha az A halmaz nem korlátos, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A \setminus B_{n+1}(0) \neq \emptyset$, ezért a 1.8 tétel miatt

$\prod_{n \in \mathbb{N}} (A \setminus B_{n+1}(0)) \neq \emptyset$. Ha $a \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A \setminus B_{n+1}(0)$, akkor $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozat. Ha a' ennek tetszőleges

részsorozata, akkor $|a'_n| \geq n$, vagyis az a' sorozat nem korlátos, így konvergens sem lehet. Vagyis ekkor az a olyan sorozat, melynek nincsen konvergens részsorozata, tehát ellentmondásra jutottunk.

Ha az A halmaz nem zárt, akkor létezik $x \in \overline{A} \setminus A$ elem. A lezárt definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A \neq \emptyset$, ezért a 1.8 tétel miatt

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_{\frac{1}{n+1}}(x)) \neq \emptyset. \quad (3.33)$$

Ha $a \in \prod_{n \in \mathbb{N}} (B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap A)$, akkor $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ sorozat. Legyen a' az a tetszőleges részsorozata. Ekkor

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a'_n \in B_{\frac{1}{n+1}}(x)$, ezért $\lim a' = x \notin A$ teljesül. Vagyis ekkor az a olyan sorozat, melynek nincsen olyan konvergens részsorozata melynek a határértéke az A halmazban lenne, tehát ellentmondásra jutottunk.

3.5. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *limesz inferiorja*

$$\liminf a \triangleq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq n} a_k \right) \quad (3.34)$$

és *limesz superiorja*

$$\limsup a \triangleq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq n} a_k \right). \quad (3.35)$$

3.16. Tétel. Minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatra $\liminf a \leq \limsup a$.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\limsup a < \liminf a$ és legyen $q \in]\limsup a, \liminf a[$. Ekkor a \limsup és a \liminf definíciója alapján léteznek olyan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ számok, hogy

$$\sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq n_1} a_k < q < \inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq n_2} a_k, \quad (3.36)$$

vagyis minden $n > \max\{n_1, n_2\}$ számra az

$$a_n < q < a_n \quad (3.37)$$

ellentmondást kapjuk.

3.17. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat.

1. Ha $\lim a \in \mathbb{R}$, akkor $\liminf a = \limsup a = \lim a$.
2. Ha $\liminf a, \limsup a \in \mathbb{R}$ és $\liminf a = \limsup a$, akkor az a sorozat konvergens és $\lim a = \liminf a$ teljesül.

Bizonyítás. 1. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, és legyen $\lim a = A \in \mathbb{R}$. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \quad (3.38)$$

teljesül. Ezért

$$A - \varepsilon \leq \left(\inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq N+1} a_k \right) \leq \left(\sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq N+1} a_k \right) \leq A + \varepsilon, \quad (3.39)$$

amiből pedig a 3.16 tétel felhasználásával

$$A - \varepsilon \leq \liminf a \leq \limsup a \leq A + \varepsilon \quad (3.40)$$

adódik. Ezek alapján minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül a $\liminf a, \limsup a \in [A - \varepsilon, A + \varepsilon]$, tehát

$$\liminf a = \limsup a = A. \quad (3.41)$$

2. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre $\liminf a = \limsup a \in \mathbb{R}$. Legyen $A = \liminf a$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel feltételezésünk szerint

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq n} a_k \right) = A = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq n} a_k \right), \quad (3.42)$$

ezért

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : A - \varepsilon < \inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq N_1} a_k \quad (3.43)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : A + \varepsilon > \sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq N_2} a_k. \quad (3.44)$$

Legyen $N = \max \{N_1, N_2\}$. Ekkor minden $n > N$ természetes számra az

$$A - \varepsilon < \inf_{k \in \mathbb{N}, k \geq N_1} a_k \leq a_n \leq \sup_{k \in \mathbb{N}, k \geq N_2} a_k < A + \varepsilon \quad (3.45)$$

egyenlőtlenségek alapján $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ adódik.

3.2. Cauchy-sorozatok

3.6. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} ((N < n \wedge N < m) \rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon). \quad (3.46)$$

3.18. Tétel. Minden *Cauchy-sorozat* korlátos.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m > N$ számra $|a_n - a_m| < 1$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $a_n \in B_1(a_{N+1})$, vagyis az $\{a_n \mid n > N\}$ halmaz korlátos. Minden $0 \leq n \leq N$ esetén az egyetlen pontból álló $\{a_n\}$ halmaz korlátos. Mivel $\text{Ran } a$ véges sok korlátos halmaz uniója, így korlátos.

3.19. Tétel. Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat határértéke A és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, vagyis minden $n, m > N$ esetén

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (3.47)$$

3.20. Tétel. Egy Cauchy-sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olyan indexsorozat, melyre $a \circ \sigma$ konvergens, és legyen továbbá $A = \lim a \circ \sigma$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m > N_1$ esetén $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, és létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N_2$ esetén $|a_{\sigma(n)} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $n > N = \max\{N_1, N_2\}$, akkor

$$|a_n - A| = |(a_n - a_{\sigma(n)}) + (a_{\sigma(n)} - A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (3.48)$$

ahol kihasználtuk, hogy $\sigma(n) \geq n$.

3.21. Tétel. (Cauchy-kritérium.) Egy $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

Bizonyítás. Ha $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, akkor a 3.18 tétel alapján az a sorozat korlátos, és a 3.15 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján van konvergens részsorozata, amiből az 3.20 előző állítás alapján a konvergenciája adódik.

Ha $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat, akkor a 3.19 tétel alapján Cauchy-sorozat.

3.3. Nevezetes határértékek

3.22. Tétel. Adott $\alpha \in \mathbb{Q}$ mellett

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{ha } \alpha > 0, \\ 1 & \text{ha } \alpha = 0, \\ 0 & \text{ha } \alpha < 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha > 0$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.13 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\sqrt[\alpha]{\varepsilon} < N \cdot 1. \quad (3.50)$$

Ebből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\varepsilon \leq n^\alpha, \quad (3.51)$$

vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \infty$.

Ha $\alpha = 0$, akkor nyilvánvalóan $\lim_{n \rightarrow \infty} n^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

Ha $\alpha < 0$, akkor a $\beta = -\alpha$ számra $\beta > 0$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.13 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\sqrt[\beta]{\frac{1}{\varepsilon}} < N \cdot 1. \quad (3.52)$$

Ebből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\left| \frac{1}{n^\beta} \right| \leq \varepsilon, \quad (3.53)$$

vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = 0$.

3.23. Tétel. Adott $q \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{ha } q > 1, \\ 1 & \text{ha } q = 1, \\ 0 & \text{ha } -1 < q < 1, \end{cases} \quad (3.54)$$

és $q \leq -1$ esetén a q^n sorozat divergens.

Bizonyítás. Legyen $q > 1$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Vezessük be az $a = q - 1 > 0$ mennyiséget. A valós számok arkhimédészi tulajdonsága 1.13 miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, melyre

$$\frac{\varepsilon - 1}{a} < N \cdot 1. \quad (3.55)$$

Ebből, és a 2.1 Bernoulli-egyenlőtlenségből adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $n > N$ esetén

$$\varepsilon \leq 1 + na \leq (1 + a)^n = q^n, \quad (3.56)$$

vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

A $q = 1$ és a $q = 0$ esetekben nyilvánvalóan teljesül az állítás.

Legyen $q \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Vezessük be az $a = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$ mennyiséget. A Bernoulli-egyenlőtlenség szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|q^n| = \frac{1}{(1 + a)^n} \leq \frac{1}{1 + na} \leq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n}, \quad (3.57)$$

amiből a 3.9 rendőr-elv és a 3.22 tétel alapján adódik a $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ határérték.

Legyen $q \leq -1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|q^n - q^{n+1}| \geq 1$, vagyis az $n \mapsto q^n$ sorozat nem Cauchy-sorozat, ezért nem is konvergens.

3.24. Tétel. Legyen $q \in \mathbb{R}$.

- Ha $|q| < 1$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.
- Ha $q = 1$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$.
- Ha $|q| \geq 1$ és $q \neq 1$, akkor az $n \mapsto q^n$ sorozat divergens.

Bizonyítás. Legyen $|q| < 1$. Ekkor az előző 3.24 állítás miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Legyen $|q| \geq 1$ és $q \neq 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|q^n - q^{n+1}| \geq |1 - q|$, vagyis az $n \mapsto q^n$ sorozat nem Cauchy-sorozat, ezért nem is konvergens.

3.25. Tétel. Minden $q \in \mathbb{R}^+$ számra $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

Bizonyítás. Ha $q = 1$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $q > 1$, és tekintsük az $a_n = \sqrt[n]{q} - 1$ sorozatot. Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > 0$ és a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$q = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n, \quad (3.58)$$

amiből

$$0 \leq a_n \leq \frac{q-1}{n} \quad (3.59)$$

adódik. Ebből a rendőr-elv miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, és így $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = 1$ következik.

Ha $q < 1$, akkor tekintsük a $q' = \frac{1}{q}$ számot. Ekkor az előző eredmény alapján.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q'}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q'}} = 1 \quad (3.60)$$

3.26. Tétel. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Bizonyítás. A számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot (1)^{n-2}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n}. \quad (3.61)$$

Ebből a 3.9 rendőr-elv alapján adódik a bizonyítandó állítás.

3.27. Tétel. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Definiáljuk az $N_1 = 2([\varepsilon] + 1)$ és az $\alpha = \frac{N_1!}{\varepsilon^{N_1}}$ számot. Ha $n > N_1$ természetes szám, akkor

$$\frac{n!}{\varepsilon^n} = \alpha \cdot \prod_{k=1}^{n-N_1} \frac{k + N_1}{\varepsilon} > \alpha \cdot 2^{n-N_1} = \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot 2^n. \quad (3.62)$$

Mivel a 3.23 tétel miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$, ezért létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_2$ természetes számra

$$2^n > \frac{2^{N_1}}{\alpha} \quad (3.63)$$

teljesül. Ha $N = \max\{N_1, N_2\}$, akkor minden $n > N$ természetes számra

$$\frac{n!}{\varepsilon^n} > \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot 2^n > \frac{\alpha}{2^{N_1}} \cdot \frac{2^{N_1}}{\alpha} = 1 \quad (3.64)$$

teljesül, vagyis

$$\sqrt[n]{n!} > \varepsilon. \quad (3.65)$$

3.28. Tétel. (Hányados-kritérium sorozatokra.) Ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ teljesül, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Legyen q olyan valós szám melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q < 1$. A sorozat határértékének a definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$ teljesül. Tehát

$$|a_{N+1}| < q \cdot |a_N|. \quad (3.66)$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$0 < |a_{N+k}| < q^k \cdot |a_N|. \quad (3.67)$$

Amiből a $k \rightarrow \infty$ határérték képzéssel a rendőr-elv alapján $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{N+k}| = 0$ következik, ebből pedig $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = 0$ adódik.

3.29. Tétel. Legyen $p \in \mathbb{Q}$ és $q \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|q| < 1$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$.

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor nyilván igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $q \neq 0$, és tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = n^p q^n$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |q| \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = |q| < 1 \quad (3.68)$$

adódik, ahol felhasználtuk a sorozatok hatványára vonatkozó 3.12 tételt. A fenti egyenlőtlenségből pedig a sorozatokra vonatkozó 3.28 hányados-kritérium alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$ következik.

3.30. Tétel. Minden $q \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.

Bizonyítás. Ha $q = 0$, akkor nyilván igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $q \neq 0$, és tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = \frac{q^n}{n!}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|q|}{n+1} = 0 < 1 \quad (3.69)$$

adódik, amiből a sorozatokra vonatkozó 3.28 hányados-kritérium alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ következik.

3.31. Tétel. Minden $\alpha \in \mathbb{Q}$ esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$.

Bizonyítás. Az $\alpha < 0$ esetben a 3.23 tétel alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = 0$, és a minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra fennálló

$$0 \leq \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \quad (3.70)$$

egyenlőtlenségre alkalmazva a rendőr elvet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$ adódik, tehát ezen két sorozat szorzatára szintén $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$ adódik.

Tehát elég azt az esetet vizsgálni, amikor $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = \frac{n^\alpha}{n!}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha = 0 \cdot 1 = 0 < 1 \quad (3.71)$$

adódik, ahol felhasználtuk a sorozatok hatványára vonatkozó 3.12 tételt. A sorozatokra vonatkozó 3.28 hányados-kritérium alapján ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0$.

3.32. Tétel. (Napier állandó.)

1. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az

$$a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (3.72)$$

sorozat korlátos, monoton növekvő, tehát konvergens.

2. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén a

$$b : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \quad (3.73)$$

konvergens.

3. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1. \quad (3.74)$$

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. A $z_1 = \dots = z_n = 1 + \frac{x}{n}$, $z_{n+1} = 1$ számokra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$${}^{n+1}\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1}{n+1} = \frac{n+1+x}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1} \quad (3.75)$$

adódik, amiből hatványozással $a_n \leq a_{n+1}$ következik.

Jelölje $[x]$ az x szám egészrészét, tehát azt a jól meghatározott egész számot melyre $[x] \leq x$ és $[x] + 1 > x$. Az $z_1 = \dots = z_n = 1 + \frac{x}{n}$, $z_{n+1} = \dots = z_{n+[x]+1} = 1 - \frac{x}{[x]+1}$ számokra alkalmazva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$${}^{n+[x]+1}\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1}} \leq \frac{n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + ([x]+1)\left(1 - \frac{x}{[x]+1}\right)}{n+[x]+1} = \quad (3.76)$$

$$= \frac{n+x+[x]+1-x}{n+[x]+1} = 1 \quad (3.77)$$

adódik, amiből hatványozással

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{[x]+1}\right)^{[x]+1} \leq 1 \quad (3.78)$$

következik. Ennek átrendezése adja a sorozat korlátosságát bizonyító

$$a_n \leq \left(1 - \frac{x}{[x]+1}\right)^{-[x]-1} \quad (3.79)$$

egyenlőtlenséget. Ezek alapján az a sorozat monoton növekvő, és felülről korlátos, vagyis konvergens.

2. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $b_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$. Mivel $[x] \leq x < [x] + 1$, ezért $0 < [x] + 1 - x \leq 1$, vagyis minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{x}{n+[x]+1-x} < \frac{x}{n}. \quad (3.80)$$

Ebből

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{x}{n+[x]+1-x}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (3.81)$$

adódik, tehát a rendőr elv alapján a

$$\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^n \quad (3.82)$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (3.83)$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^{-[x]-1} = 1, \quad (3.84)$$

ezért a

$$c : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \left(1 + \frac{x}{n + [x] + 1 - x}\right)^{n+[x]+1} \quad (3.85)$$

sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \quad (3.86)$$

A minden $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{x\}$ számra érvényes

$$b_n = \left(\frac{n-x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n-x}\right)^n\right)^{-1} \quad (3.87)$$

átalakításból azt kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra $b_{n+[x]+1} = c_n^{-1}$. Mivel a c sorozat konvergens és $\lim c \neq 0$ (hiszen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_1 \leq c_n$), ezért a b sorozat is konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} c_n\right)^{-1}. \quad (3.88)$$

3. A 3.88 egyenlet jelenti a bizonyítandó egyenlőséget.

3.33. Tétel. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Bizonyítás. Tekintsük a $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $b_n = \frac{n!}{n^n}$ sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n. \quad (3.89)$$

A 3.32 tételben definiált $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 1$ teljesül, hiszen a sorozat monoton növekvő és $a_1 = 2 > 1$. Ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1 \quad (3.90)$$

adódik. A sorozatokra vonatkozó 3.28 hányados-kritérium alapján ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

4 Sorok

4.1. Sorok határértéke és tulajdonságai

4.1. Definíció. (Sorok.)

- Adott $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat esetén, azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatot, melyet minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n \triangleq \sum_{i=0}^n a_i$ definiál, az a sorozathoz rendelt sornak vagy röviden csak sornak nevezzük, és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim \sum a$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Ha $\lim \sum a = \pm\infty$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$ jelölést használjuk megfelelő előjellel.

4.1. Tétel. Legyen $\sum a, \sum b$ konvergens sor, és $\lambda \in \mathbb{R}$.

- A $\sum(a+b)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
- A $\sum(\lambda a)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- A $\sum \bar{a}$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Mivel az α és a β sorozat konvergens, ezért összegük, számszorosuk és konjugáltjuk is konvergens lesz. Továbbá a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \quad (4.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c\alpha_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \quad (4.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n} \quad (4.3)$$

egyenlőségek teljesülnek.

4.2. Tétel. (A konvergencia szükséges feltétele.) Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor $\lim a = 0$.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$, és legyen $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Ekkor az $n \rightarrow \alpha_n$ és az $n \rightarrow \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergens, és határértékük megegyezik. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n, \quad (4.4)$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0. \quad (4.5)$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

4.3. Tétel. (Cauchy-kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat. A $\sum a$ sor pontosan akkor konvergens ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \left((N < n < m) \rightarrow \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon \right). \quad (4.6)$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$. A sorozatokra vonatkozó 3.20 Cauchy-kritérium alapján az $(\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat, vagyis ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} ((N < n < m) \rightarrow |\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon) \quad (4.7)$$

teljesül.

4.4. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat. Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \left((N < n) \rightarrow \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon \right). \quad (4.8)$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Tegyük fel, hogy a $\sum a$ sor konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $(\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens, vagyis Cauchy-sorozat. Ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N + 1 < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$|\alpha_m - \alpha_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.9)$$

teljesül, amiből az $m \rightarrow \infty$ határátmenettel

$$|\lim \alpha - \alpha_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (4.10)$$

adódik, amiből a

$$\lim \alpha - \alpha_{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \quad (4.11)$$

átalakítással adódik az állítás.

4.5. Tétel. (Majoráns és minoráns kritérium.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sort.

1. Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$, és a $\sum b$ sor konvergens, akkor a $\sum a$ sor is konvergens, továbbá $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
2. Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq b_n$, és a $\sum b$ sor divergens, akkor a $\sum a$ sor is divergens.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

1. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \leq \beta_n$. Mivel a β sorozat konvergens, ezért korlátos is. Az α sorozat korlátos az $\alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt, továbbá monoton növekvő az α sorozat a konstrukciója miatt. Ezek alapján az α sorozat konvergens.

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \geq \beta_n$. Mivel a β sorozat divergens, és monoton növekvő, ezért $\lim \beta = \infty$. Az $\alpha_n \geq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt $\lim \alpha = \infty$, vagyis az α sorozat divergens.

4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum |a|$ sor konvergens.

4.6. Tétel. Ha a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, akkor *konvergens is*, és

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|. \quad (4.12)$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy a belőle képzett $\sum a$ sor abszolút konvergens, és legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Megmutatjuk, hogy az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, így a 3.21 Cauchy-kritérium alapján konvergens. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és legyen $A = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left| A - \sum_{k=0}^n |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon \quad (4.13)$$

Ezek alapján minden $n, m > N$ természetes számra

$$|\alpha_n - \alpha_m| = \left| \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} a_k \right| \leq \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon \quad (4.14)$$

teljesül, vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat.

4.7. Tétel. A $\sum_n \frac{1}{n+1}$ sor *divergens*, a $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ sor *konvergens*.

Bizonyítás. 1. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad (4.15)$$

teljesül. Ebből pedig következik a $\sum_n \frac{1}{n+1}$ sor divergenciája.

2. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad (4.16)$$

teljesül. Ezek alapján a $\sum_n \frac{1}{(n+1)^2}$ sor felülről korlátos és monoton növény, tehát konvergens. Sőt még a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 \quad (4.17)$$

becslés is adódik.

4.8. Tétel. Legyen $q \in \mathbb{R}$. A $\sum_n q^n$ sor

- *divergens, ha $|q| \geq 1$;*
- *abszolút konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \quad (4.18)$$

Bizonyítás. Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ha $|q| \geq 1$, akkor az $n \mapsto q^n$ sorozat nem tart a nullához, vagyis $\sum_n q^n$

sor a 4.2 konvergencia szükséges feltétele alapján a nem lehet konvergens.

Ha $|q| < 1$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (4.19)$$

teljesül, valamint a 3.23 tétel alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Ezekből az $n \rightarrow \infty$ határátmenet után

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \quad (4.20)$$

adódik.

4.2. Konvergenciakritériumok

4.9. Tétel. (Kondenzációs kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat. Ekkor ha $a \sum_n a_n$ és $a \sum_n 2^n a_{2^n}$ sor közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha(n) = \sum_{k=0}^n a_k$ és $\beta(n) = \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$. Az a sorozat monoton csökkenése miatt az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek.

$$\alpha(2^n - 1) = a_0 + \sum_{k=1}^{2^n - 1} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^k - 1} a_{2^k + j} \leq \quad (4.21)$$

$$\leq a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{2^k - 1} a_{2^k} = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} = a_0 + \beta(n-1) \quad (4.22)$$

$$\alpha(2^n) = a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{2^n} a_k = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k + j} \geq \quad (4.23)$$

$$\geq a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{2^k} a_{2^k + 2^k} = a_0 + a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^{k+1}} = a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} \beta(n) \quad (4.24)$$

Tekintsük az $n \mapsto \alpha(n)$ és $n \mapsto \beta(n)$ monoton növekvő sorozatokat. A fenti becslés azt mutatja, hogy ha az egyik nem korlátos, akkor a másik sem az. Vagyis ha az egyik sor divergens, akkor a másik is. Ebből pedig következik, hogy ha egyik sor konvergens, akkor a másik is.

Kiegészítés. A kondenzációs kritérium általánosabb formában is igaz.

4.10. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő sorozat és $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Ekkor ha $\sum_n a_n$ $\sum_n p^n a_{p^n}$ sorok közül valamelyik konvergens, akkor mindkettő konvergens; illetve, ha valamelyik divergens, akkor mindkettő divergens. \diamond

4.11. Tétel. Legyen $q \in \mathbb{Q}$. A $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $q > 1$.

Bizonyítás. A 4.9 kondenzációs kritérium alapján a $\sum_n \frac{1}{n^q}$ sor pontosan akkor konvergens, amikor a $\sum_n \frac{2^n}{(2^n)^q}$ sor konvergens. Ezt a sort a $\sum_n \left(\frac{1}{2^{q-1}}\right)^n$ alakban lehet felírni, ami a $\frac{1}{2^{q-1}}$ hányadosú geometriai sor összege. A geometriai sor konvergenciájára vonatkozó 4.8 tétel alapján, ez pontosan akkor konvergens, ha $\frac{1}{2^{q-1}} < 1$ teljesül, ez pedig a $q > 1$ feltétellel ekvivalens.

4.12. Tétel. (Cauchy-féle gyökkritérium.) Ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat esetén

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;
2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, akkor a $\sum a$ sor divergens.

Bizonyítás. 1. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$. Ekkor a \limsup definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup \left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \mid k \in \mathbb{N}, k > N \right\} < q$, ezért minden $k > N$ számra $|a(k)| < q^k$. A $\sum_k q^k$ geometriai sor konvergens, mert $q \in]0, 1[$, ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért konvergens is.

2. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > q > 1$. Ekkor a \limsup definíciója alapján minden $N \in \mathbb{N}$ esetén $\sup \left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \mid k \in \mathbb{N}, k > N \right\} > q$. Tehát minden $N \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén létezik olyan $k > N$, melyre $|a_k| > q^k$. Definiáljuk a $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ indexsorozatot az alábbi iterációval.

– Legyen $\sigma(0) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid |a_k| > q^0\}$.

– Ha $\sigma(n)$ már ismert, akkor legyen $\sigma(n+1) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < k \wedge |a_k| > q^{n+1}\}$.

Ekkor az $a \circ \sigma$ nem korlátos részsorozata az a sorozatnak. Ezek alapján az a sorozat sem korlátos, ezért konvergens sem lehet, emiatt pedig a $\sum a$ sor sem lehet konvergens.

4.13. Tétel. Minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}'$ sorozatra

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (4.25)$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}'$ tetszőleges sorozat.

1. Legyen $\alpha < \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ tetszőleges való szám. Ekkor a \liminf

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left(\inf \left\{ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \mid n \in \mathbb{N}, n \geq N \right\} \right) \quad (4.26)$$

definíciója miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\alpha < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ teljesül.

Tehát

$$|a_{N+1}| > \alpha \cdot |a_N|. \quad (4.27)$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_{N+k}| > \alpha^k \cdot |a_N|. \quad (4.28)$$

Vagyis minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \sqrt[n]{\alpha^{n-N}} \cdot \sqrt[n]{|a_N|} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}. \quad (4.29)$$

Amiből

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}} \right) = \alpha \quad (4.30)$$

adódik. Mivel minden valós α számra teljesül a

$$\alpha < \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \rightarrow \quad \alpha \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (4.31)$$

következtetés, ezért

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (4.32)$$

2. A 3.16 tétel szerint minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}'$ sorozatra teljesül az

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (4.33)$$

egyenlőtlenség.

3. Legyen $\alpha > \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ tetszőleges valós szám. Ekkor a \limsup

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \inf_{N \in \mathbb{N}} \left(\sup \left\{ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \mid n \in \mathbb{N}, n \geq N \right\} \right) \quad (4.34)$$

definíciója miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\alpha > \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ teljesül.

Tehát

$$|a_{N+1}| < \alpha \cdot |a_N|. \quad (4.35)$$

Ebből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_{N+k}| < \alpha^k \cdot |a_N|. \quad (4.36)$$

Vagyis minden $n > N$ természetes számra

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{\alpha^{n-N}} \cdot \sqrt[n]{|a_N|} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}}. \quad (4.37)$$

Amiből

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{\alpha^N}} \right) = \alpha \quad (4.38)$$

adódik. Mivel minden valós α számra teljesül a

$$\alpha > \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \rightarrow \quad \alpha \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (4.39)$$

következtetés, ezért

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (4.40)$$

4.14. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}'$ olyan, melyre létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \mathbb{R}$ határérték. Ekkor létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (4.41)$$

Bizonyítás. Az előző 4.13 állítás és a 3.17 tétel alapján nyilvánvaló.

4.15. Tétel. (*D'Alembert-féle hányadoskritérium.*) Ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}'$ sorozat esetén

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, akkor a $\sum a$ sor abszolút konvergens;
2. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, akkor a $\sum a$ sor divergens.

Bizonyítás. A 4.12 Cauchy-féle gyökkritérium és a 4.13 tétel alapján nyilvánvaló.

4.3. Definíció. A $\sum_n (-1)^n a_n$ sor *Leibniz-típusú* vagy *Leibniz-sor*, ha $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat.

4.16. Tétel. Ha $\sum_n (-1)^n a_n$ Leibniz-sor, akkor konvergens, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|H_n| \leq a_{n+1}. \quad (4.42)$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\alpha(2n) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{2k} - a_{2k+1}) + a_{2n} \geq 0 \quad (4.43)$$

$$\alpha(2n+1) = a_0 + \sum_{k=1}^n (-a_{2k-1} + a_{2k}) - a_{2n+1} \leq a_0 \quad (4.44)$$

$$\alpha(2(n+1)) = \alpha(2n) - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq \alpha(2n) \quad (4.45)$$

$$\alpha(2(n+1)+1) = \alpha(2n+1) + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq \alpha(2n+1) \quad (4.46)$$

egyenlőtlenségek alapján az $n \mapsto \alpha(2n)$ sorozat alulról korlátos és monoton csökkenő, ezért konvergens, valamint az $n \mapsto \alpha(2n+1)$ sorozat felülről korlátos és monoton növekvő, ezért szintén konvergens. A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha(2n+1) - \alpha(2n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} -a_{2n+1} = 0 \quad (4.47)$$

határérték alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(2n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(2n)$, vagyis létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n)$ határérték. Legyen $A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$. Mivel az $n \mapsto \alpha(2n)$ sorozat monoton csökkenő és az $n \mapsto \alpha(2n+1)$ sorozat monoton növvő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\alpha(2n+1) \leq A \leq \alpha(2n), \quad (4.48)$$

ezért

$$0 \leq A - \alpha(2n+1) \leq \alpha(2n+2) - \alpha(2n+1) = a_{2n+2} \quad \rightarrow \quad |A - \alpha(2n+1)| \leq a_{2n+2}, \quad (4.49)$$

$$0 \geq A - \alpha(2n) \geq \alpha(2n+1) - \alpha(2n) = -a_{2n+1} \quad \rightarrow \quad |A - \alpha(2n)| \leq a_{2n+1}, \quad (4.50)$$

ami bizonyítja a hibatagra vonatkozó $|H_n| \leq a_n$ becslést.

4.4. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat.

- A $\sum a$ sor *átrendezésének* nevezzük a $\sum a \circ \sigma$ sort, ahol $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekció. Tehát az átrendezett sor n -edik tagja $\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}$.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltétlen konvergens*, ha minden átrendezése konvergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

4.17. Tétel. Minden abszolút konvergens sor feltétlen konvergens, valamint az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges abszolút konvergens sorozat és $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció. Továbbá vezessük be az $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és a $B = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jelöléseket. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén legyen $n' = \max \{ \sigma(k) \mid k \in \{0, \dots, n\} \}$, ekkor

$$\sum_{k=0}^n |a \circ \sigma| = \sum_{k=0}^n |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{l=0}^{n'} |a_l| \leq B. \quad (4.51)$$

Ezért az $n \mapsto \sum_{k=0}^n |a_{\sigma(k)}|$ sorozat felülről korlátos és monoton növvő, tehát konvergens. Vagyis a $\sum a \circ \sigma$ sor abszolút konvergens, tehát konvergens.

Megmutatjuk, hogy $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért minden $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ természetes számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon_1. \quad (4.52)$$

Ekkor az $N_2 = \max \{ \sigma^{-1}(k) \mid k \in \{0, \dots, N_1\} \}$ számra igaz, hogy minden $n > N_2$ esetén

$$\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} = \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) \leq N_1}} a_{\sigma(k)} + \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{N_1+1} a_k + \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)}, \quad (4.53)$$

vagyis

$$\left| A - \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \right| = \left| A - \sum_{k=0}^{N_1} a_k - \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)} \right| \leq \left| \sum_{k=N_1+1}^{\infty} a_k \right| + \left| \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) > N_1}} a_{\sigma(k)} \right| \leq \quad (4.54)$$

$$\leq \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, n\} \\ \sigma(k) > N_1}} |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon_1. \quad (4.55)$$

Tehát a ε paraméterhez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex (például a $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ választáshoz kapott N_2 paraméter), hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\left| A - \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} \right| < \varepsilon \quad (4.56)$$

teljesül, ami bizonyítja a $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = A$ egyenlőséget.

4.3. Sorok szorzata

4.5. Definíció. Az a és $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat *konvolúciójának* nevezzük az

$$a * b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \quad (4.57)$$

sorozatot.

4.6. Definíció. A $\sum a$ és $\sum b$ sor *Cauchy-szorzatának* nevezzük az $a * b$ sorozat által meghatározott $\sum a * b$ sort.

4.18. Tétel. (Mertens tétele.) Ha a konvergens $\sum a$, $\sum b$ sorok közül legalább az egyik abszolút konvergens, akkor a $\sum a$ és $\sum b$ sorok Cauchy-szorzata konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right). \quad (4.58)$$

Továbbá, ha a $\sum a$ és $\sum b$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum(a * b)$ sor is abszolút konvergens.

Bizonyítás. Legyen a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $A_a = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ és $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, valamint legyen C olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $\left| \sum_{k=0}^n b_k - B \right| < C$ teljesül. Ekkor teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy

$$\sum_{k=0}^n (a * b)(k) - AB = \left(\sum_{j=0}^n a_j - A \right) B + \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B \right). \quad (4.59)$$

A jobb oldal első tagja nullához tart. Megmutatjuk, hogy a második tag is a nullához tart. Minden $\varepsilon' > 0$ számhoz létezik $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $\left| \sum_{k=0}^n b_k - B \right| < \varepsilon'$; valamint létezik $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon'$. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor $n > 2N$ esetén

$$\left| \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B \right) \right| \leq \sum_{j=0}^N |a_j| \left| \sum_{k=0}^{n-j} b_k - B \right| + \sum_{j=N+1}^n |a_j| \left| \sum_{k=0}^{n-j} b_k - B \right| \leq \quad (4.60)$$

$$\leq \sum_{j=0}^N |a_j| \varepsilon' + \sum_{j=N+1}^n |a_j| C \leq \varepsilon' \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| + C \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_j| \leq \varepsilon' A_a + C \varepsilon' = (C + A_a) \varepsilon'. \quad (4.61)$$

Vagyis tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(C + A_a)}$ és az ehhez választott N_1 és N_2 paraméterekhez tartozó $N' = 2 \max\{N_1, N_2\}$ küszöbindex olyan lesz, hogy minden $n > N'$ számra

$$\left| \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} b_k - B \right) \right| < \varepsilon, \quad (4.62)$$

vagyis a (4.59) képlet jobb oldalán lévő második tag is a nullához tart.

Most tegyük fel, hogy $\sum a$ és $\sum b$ is abszolút konvergens, és az eddigi jelöléseket egészítsük ki a $B_a = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ szimbólummal. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^n |a * b|(k) = \sum_{k=0}^n \left| \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right| \leq \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k |a_l| |b_{k-l}| = \sum_{k=0}^n |a_k| \sum_{l=0}^{n-k} |b_l| \leq \quad (4.63)$$

$$\leq \sum_{k=0}^n |a_k| \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| = \sum_{k=0}^n |a_k| B_a \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) B_a = A_a B_a, \quad (4.64)$$

vagyis a $\sum(a * b)$ sor abszolút konvergens.

4.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat

– *korlátos változású*, ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty \quad (4.65)$$

teljesül;

– *korlátos részletösszegű*, ha a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| < \infty \quad (4.66)$$

teljesül.

4.19. Tétel. (Abel-féle kritérium.) Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású zérussorozat és legyen $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos részletösszegű sorozat. Ekkor a $\sum_n a_n b_n$ sor konvergens, és

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \right) \quad (4.67)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású zérussorozat és

$$A = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right), \quad (4.68)$$

valamint legyen $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos részletösszegű sorozat és

$$B = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n b_k \right|. \quad (4.69)$$

A minden $n \in \mathbb{N}$ számra fennálló *Abel-átrendezés*

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^k b_j \right) + a_n \sum_{j=0}^n b_j \quad (4.70)$$

igazolható n szerinti teljes indukcióval. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^k b_j \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot \left| \sum_{j=0}^k b_j \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot B = AB, \quad (4.71)$$

ezért a $\sum_{k=0}^{n-1} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^k b_j \right)$ sor abszolút konvergens, vagyis konvergens is, és

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \left((a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^k b_j \right) \right| \leq AB. \quad (4.72)$$

Az $n \mapsto a_n \sum_{j=0}^n b_j$ sorozat zérussorozat, mert az $n \mapsto \sum_{j=0}^n b_j$ sorozat korlátos és a zérussorozat. Ebből már adódik a bizonyítandó állítás.

4.4. Elemi függvények

4.8. Definíció. (Elemi hatványsorok.)

– Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt a

$$\text{Dom } P_a \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{a } \sum_n a_n x^n \text{ sor konvergens} \right\} \quad (4.73)$$

halmazon, az alábbi módon.

$$P_a : \text{Dom } P_a \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4.74)$$

A P_a függvényt az a együtthatójú 0 középpontú hatványsornak nevezzük.

– Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha } 0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases} \quad (4.75)$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

4.20. Tétel. (Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat, és $x \in \mathbb{R}$.

1. Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens, tehát $x \in \text{Dom } P_a$.
2. Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens, tehát $x \notin \text{Dom } P_a$.

Bizonyítás. A 4.12 Cauchy-féle gyökkritérium közvetlen következménye.

4.21. Tétel. Az alábbi hatványsorok konvergenciasugara végtelen, vagyis minden $x \in \mathbb{C}$ esetén konvergensek a sorok.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (4.76)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (4.77)$$

4.9. Definíció. (Elemi függvények.)

– Az exponenciális függvény

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.78)$$

– A szinusz függvény

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.79)$$

– A koszinusz függvény

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (4.80)$$

– A tangens függvény

$$\text{tg} : \{z \in \mathbb{C} \mid \cos z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}. \quad (4.81)$$

– A kotangens függvény

$$\text{ctg} : \{z \in \mathbb{C} \mid \cos z \sin z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\text{tg } z}. \quad (4.82)$$

– A szinusz hiperbolikus függvény

$$\text{sh} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.83)$$

– A koszinusz hiperbolikus függvény

$$\operatorname{ch} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (4.84)$$

– A tangens hiperbolikus függvény

$$\operatorname{th} : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ch} z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}. \quad (4.85)$$

– A kotangens hiperbolikus függvény

$$\operatorname{cth} : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{\operatorname{th} z}. \quad (4.86)$$

4.22. Tétel. (Euler-tétel.) Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z. \quad (4.87)$$

Bizonyítás.

$$\cos z + i \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \quad (4.88)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} - \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} + i \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} - i \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!} = \quad (4.89)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{4n}}{(4n)!} + \frac{(iz)^{4n+1}}{(4n+1)!} + \frac{(iz)^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{(iz)^{4n+3}}{(4n+3)!} = \quad (4.90)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \exp(iz). \quad (4.91)$$

4.23. Tétel. (Az exponenciális függvény.)

1. Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $\overline{\exp(x)} = \exp(\bar{x})$.
2. Minden $x, y \in \mathbb{C}$ számra $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
3. Minden $x \in \mathbb{C}$ számra $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$.
4. Minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ számra $x_1 < x_2$ esetén $\exp(x_1) < \exp(x_2)$ teljesül, vagyis az

$$\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(x) \quad (4.92)$$

függvény injektív.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{C}$ és $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Mivel az a sorozat konvergens, ezért

$$\overline{\exp(x)} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\overline{x^k}}{k!} = \exp(\bar{x}). \quad (4.93)$$

2. Mivel a $\alpha_k = \frac{x^k}{k!}$ és $\beta_k = \frac{y^k}{k!}$ sorozatokból képzett sorok abszolút konvergensek, ezért Mertens-tétel alapján Cauchy-szorzatuk is konvergens lesz. Mivel

$$(\alpha * \beta)(n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}, \quad (4.94)$$

ezért

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}. \quad (4.95)$$

3. Az előző pont alapján minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1. \quad (4.96)$$

4. Az exponenciális függvény definíciója alapján ha $a \in \mathbb{R}^+$, akkor $\exp(a) > 1$. Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 < x_2$, akkor

$$\exp(x_2) = \exp(x_2 - x_1) \cdot \exp(x_1) > \exp(x_1). \quad (4.97)$$

4.10. Definíció. Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *valós természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük, jele \log vagy \ln . Tehát $\text{Dom log} = \text{Ran}(\exp|_{\mathbb{R}})$, és minden $x \in \text{Dom log}$ számra $\exp(\log x) = x$.

Megjegyzés. Később igazoljuk, hogy $\text{Dom log} = \mathbb{R}^+$. ◇

4.11. Definíció. Legyen $x \in \text{Dom log}$ és $z \in \mathbb{C}$. A

$$x^z \triangleq \exp(z \log(x)) \quad (4.98)$$

számot az x szám z -edik hatványának nevezzük.

4.12. Definíció. Az $\exp(1)$ számot a *természetes alapú logaritmus alapszámának* nevezzük és az e betűvel jelöljük, vagyis $e \triangleq \exp(1)$. (Értéke megközelítőleg $e \approx 2,71828182845904523536$.)

4.24. Tétel. Minden $z \in \mathbb{C}$ számra $\exp(z) = e^z$.

Bizonyítás. Az e szám és a hatványozás definíciója alapján nyilvánvaló.

4.25. Tétel. Legyen $x, y \in \text{Dom log}$ olyan szám, melyre $x^y \in \text{Dom log}$, és legyen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ekkor

$$x^0 = 1, \quad x^{z_1} \cdot x^{z_2} = x^{z_1+z_2}, \quad x^{-z_1} = \frac{1}{x^{z_1}}, \quad (x^y)^{z_1} = x^{yz_1} \quad (4.99)$$

teljesül.

Bizonyítás. Az állítások a hatványozás definíciójának és az exponenciális függvény multiplikatívitásának közvetlen következményei.

4.26. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ sorozatok határértéke megegyezik.

Bizonyítás. Adott $x \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük az $a(x), b(x) : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x)_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ és $b(x)_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ sorozatokat.

1. Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a 3.32 tétel alapján az $a(x)$ sorozat konvergens, valamint a 4.21 tétel alapján a $b(x)$ sorozat konvergens, és definíció szerint $\lim b(x) = \exp x$. A binomiális kifejtés alapján

$$b(x)_n - a(x)_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)\right) \cdot \frac{x^k}{k!}. \quad (4.100)$$

A teljes indukcióval könnyen bizonyítható $\sum_{i=0}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$ formula és a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt

$$\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \geq 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}. \quad (4.101)$$

Ezek alapján

$$1 - \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{k(k-1)}{2n}, \quad (4.102)$$

vagyis

$$0 \leq b(x)_n - a(x)_n \leq \frac{x^2}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{1}{n} \cdot x^2 \exp x, \quad (4.103)$$

amiből a rendőrelv értelmében $\lim(b(x) - a(x)) = 0$ következik.

2. Ha $x < 0$, akkor a 3.32 tétel miatt $\lim a(x) = \frac{1}{\lim a(-x)}$, a 4.23 tétel miatt $\lim b(x) = \frac{1}{\lim b(-x)}$. Mivel ekkor $-x > 0$, ezért az 1. pont alapján

$$\lim a(-x) = \lim b(-x), \quad (4.104)$$

amiből $\lim a(x) = \lim b(x)$ következik.

4.27. Tétel. (Elemi függvények alaptulajdonságai.)

– Minden $x \in \mathbb{C}$ számra az alábbiak teljesülnek.

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (4.105)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (4.106)$$

– Minden $x, y \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x) \quad (4.107)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \quad (4.108)$$

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y) \operatorname{ch}(x) \quad (4.109)$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y). \quad (4.110)$$

– Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\sin(ix) = i \operatorname{sh} x, \quad \cos(ix) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}(ix) = i \sin x, \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos x. \quad (4.111)$$

– Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \quad (4.112)$$

– Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $|e^{ix}| = 1$.

Bizonyítás. Az 4.22 Euler-tétel alapján minden $x \in \mathbb{C}$ számra

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{és} \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \quad (4.113)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\cos(x) = \cos(-x)$ és $\sin(x) = -\sin(-x)$. Ebből adódik a \sin és \cos függvényre vonatkozó egyenlőség.

Az sh és a ch függvényekre vonatkozó egyenlőség a függvények sorfejtésének közvetlen következménye. Az addíciós formulák, illetve a többi azonosság egyszerű számolással igazolható a \sin , \cos , sh és ch függvény exponenciális alakjából.

5 Valós függvények elemi vizsgálata

5.1. Függvények tulajdonságai

A függvények főbb tulajdonságait definiáljuk először.

5.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *páros*, ha minden $x \in \text{Dom } f$ elemre $-x \in \text{Dom } f$, és $f(x) = f(-x)$;
- *páratlan*, ha minden $x \in \text{Dom } f$ elemre $-x \in \text{Dom } f$, és $f(x) = -f(-x)$;
- *monoton növvő*, ha minden $x, y \in \text{Dom } f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \leq f(y)$;
- *monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \text{Dom } f$ elemre $x \leq y$ esetén $f(x) \geq f(y)$;
- *monoton*, ha monoton növvő, vagy monoton fogyó;
- *szigorúan monoton növvő*, ha minden $x, y \in \text{Dom } f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$;
- *szigorúan monoton fogyó*, ha minden $x, y \in \text{Dom } f$ elemre $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$;
- *szigorúan monoton*, ha szigorúan monoton növvő, vagy szigorúan monoton fogyó;
- *konvex az $I \subseteq \text{Dom } f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y) \quad (5.1)$$

teljesül;

- *konkáv az $I \subseteq \text{Dom } f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0, 1]$ esetén

$$f(ax + (1 - a)y) \geq af(x) + (1 - a)f(y) \quad (5.2)$$

teljesül;

- *periodikus*, ha f nem konstans függvény, és ha létezik $p \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \text{Dom } f$ esetén $x + p \in \text{Dom } f$ és $f(x) = f(x + p)$, amennyiben a legkisebb ilyen tulajdonságú p szám nagyobb mint nulla, azt az f függvény periódusának nevezzük;
- *zérushelye* vagy *gyöke* $x \in \text{Dom } f$, ha $f(x) = 0$.

5.1. Tétel. (*Jensen-egyenlőtlenség.*) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Az f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden

$(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i). \quad (5.3)$$

- Az f függvény pontosan akkor konkáv az I intervallumon, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett, minden

$(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i). \quad (5.4)$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Elég a konvex esetre bizonyítani az állítást, hiszen az $f \mapsto -f$ transzformációval egymásba alakíthatók az állítások. Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ mellett,

minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden olyan $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, melyre $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ az

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i). \quad (5.5)$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor nyilván $n = 2$ is igaz a következtetés, ami éppen a konvexitás definícióját jelenti.

Tegyük fel, hogy az f függvény konvex, és az A halmaz álljon azokból az n természetes számokból, melyre igaz, hogy minden $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ és minden olyan $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ esetén, ha $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, akkor

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i). \quad (5.6)$$

Nyilván $1 \in A$, az f függvény konvexitása miatt $2 \in A$, és célunk annak igazolása, hogy $A = \mathbb{N}^+$. Ezt úgy érzük el, hogy megmutatjuk ha $n \in A$, akkor $n + 1 \in A$. Legyen $n \in A$, $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in I^n$ és legyen $(a_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in [0, 1]^{n+1}$ olyan, melyre $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$. Ha $a_{n+1} = 1$, akkor nyilván teljesül az

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i). \quad (5.7)$$

egyenlőtlenség, ezért feltehető, hogy $a_{n+1} \neq 1$. Ebben az esetben azonban a

$$\frac{a_1}{1 - a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{1 - a_{n+1}} \in [0, 1] \quad (5.8)$$

számok összege 1, valamint

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - a_{n+1}} x_i \in I. \quad (5.9)$$

Ezért felhasználva az f függvény konvexitását, és az $n \in A$ feltételezést

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right) = f\left((1 - a_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - a_{n+1}} x_i + a_{n+1} x_{n+1}\right) \leq \quad (5.10)$$

$$\leq (1 - a_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - a_{n+1}} x_i\right) + a_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \quad (5.11)$$

$$\leq (1 - a_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - a_{n+1}} f(x_i) + a_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i f(x_i) \quad (5.12)$$

adódik, vagyis $n + 1 \in A$.

5.2. Függvény határértéke

5.2. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $\text{Dom } f$ értelmezési tartományának a torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az a pontban $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ (f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A)). \quad (5.13)$$

A fenti definíció szerint az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $\text{Dom } f$ halmaz $a \in \mathbb{R}$ torlódási torlódási pontjában $A \in \mathbb{R}$ a határértéke pontosan akkor, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \quad (5.14)$$

teljesül.

5.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen a torlódási pontja a $\text{Dom } f$ halmaznak.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az a pontban végtelen, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ (f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq [\varepsilon, \infty]). \quad (5.15)$$

- Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke az a pontban mínusz végtelen, ha $-f$ határértéke az a pontban végtelen.

5.4. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a végtelen torlódási pontja, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A (\varepsilon < x). \quad (5.16)$$

Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a mínusz végtelen torlódási pontja, ha a $-A$ halmaznak torlódási pontja a végtelen.

5.5. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen a $\text{Dom } f$ halmaznak a végtelen torlódási pontja. Az f függvény határértéke a végtelenben,

- $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ (f([\delta, \infty]) \subseteq B_\varepsilon(A)). \quad (5.17)$$

- végtelen, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ (f([\delta, \infty]) \subseteq [\varepsilon, \infty]). \quad (5.18)$$

- mínusz végtelen, ha $-f$ határértéke a végtelenben végtelen.

A mínusz végtelenben vett határértéket, mint az $x \mapsto f(-x)$ függvény végtelenben vett határértékét definiáljuk.

5.2. Tétel. (*A határérték egyértelműsége.*)

- Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{R}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Ekkor $A = B$.
- Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ legyen az f függvény határértéke az a helyen. Ekkor $A = B$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{R}$ legyen az f függvény határértéke az a pontban. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \text{Dom } f$ esetén

$$0 < |x - a| < \delta_A \rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A - B|}{2} \quad (5.19)$$

$$0 < |x - a| < \delta_B \rightarrow |f(x) - B| < \frac{|A - B|}{2} \quad (5.20)$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\text{Dom } f) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ számra az

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B| \quad (5.21)$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a = \infty$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja, és $A, B \in \mathbb{R}$ legyen az f függvény határértéke a végtelenben. Tegyük fel, hogy $A \neq B$. Ekkor létezik olyan $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \text{Dom } f$ esetén

$$\delta_A < x \rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A - B|}{2} \quad (5.22)$$

$$\delta_B < x \rightarrow |f(x) - B| < \frac{|A - B|}{2} \quad (5.23)$$

teljesül. Ami azt jelenti, hogy ha $\delta = \max\{\delta_A, \delta_B\}$, akkor minden $x \in (\text{Dom } f) \cap]\delta, \infty[$ számra az

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < |A - B| \quad (5.24)$$

ellentmondás teljesül, tehát $A = B$.

Ha $a = -\infty$, akkor a fentihez hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $A = B$.

A többi esetben is hasonló módon igazolható a határérték egyértelmősége.

5.6. Definíció. (A lim művelet.)

- Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, és legyen $a \in \mathbb{C}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ vagy $\lim_a f$ jelöli.
- Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, és legyen $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\text{Dom } f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ vagy $\lim_a f$ jelöli.

5.3. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ halmaz torlódási pontja. Ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim_a f = 0$, akkor $\lim_a fg = 0$.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $g(B_r(a) \setminus \{a\})$ korlátos és $\lim_a f = 0$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, és legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $x \in \text{Dom } g \cap (B_r(a) \setminus \{a\})$ esetén $|g(x)| < K$. Mivel $\lim_a f = 0$, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \text{Dom } f \cap (B_{\delta_1}(a) \setminus \{a\})$ esetén $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ha $\delta = \min\{r, \delta_1\}$, akkor minden $x \in (\text{Dom } f \cap \text{Dom } g) \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ elemre

$$|f(x)g(x)| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon. \quad (5.25)$$

Vagyis $\lim_a (fg) = 0$.

5.4. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ halmaznak. ($A \mathbb{R} = \mathbb{R}$ esetben $a = \pm\infty$ is lehet.) Tegyük fel, hogy létezik $\lim_a f$ és $\lim_a g$, valamint $\lim_a f, \lim_a g \notin \{\infty, -\infty\}$. Akkor az a pont

1. torlódási pontja a $\text{Dom}(f + g)$ halmaznak, $\lim_a (f + g)$ létezik, és

$$\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g; \quad (5.26)$$

2. torlódási pontja a $\text{Dom}(fg)$ halmaznak, $\lim_a (fg)$ létezik, és

$$\lim_a (fg) = \left(\lim_a f\right) \left(\lim_a g\right); \quad (5.27)$$

3. torlódási pontja a $\text{Dom}(\lambda f)$ halmaznak, $\lim_a (\lambda f)$ létezik, és

$$\lim_a (\lambda f) = \lambda \left(\lim_a f\right); \quad (5.28)$$

4. torlódási pontja a $\text{Dom}(|f|)$ halmaznak, $\lim_a |f|$ létezik, és

$$\lim_a |f| = \left|\lim_a f\right|; \quad (5.29)$$

5. torlódási pontja a $\text{Dom}(\bar{f})$ halmaznak, $\lim_a \bar{f}$ létezik, és

$$\lim_a \bar{f} = \overline{\lim_a f}. \quad (5.30)$$

6. Ha az a pont torlódási pontja a $\text{Dom}\left(\frac{1}{f}\right)$ halmaznak, és $\lim_a f \neq 0$, akkor $\lim_a \frac{1}{f}$ létezik, és

$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim_a f}. \quad (5.31)$$

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $K = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ halmaznak, legyen $F = \lim_a f \in \mathbb{R}$ és $G = \lim_a g$, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

1. Az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g , hogy

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.32)$$

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.33)$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (F + G)| \leq |f(x) - F| + |g(x) - G| < \varepsilon \quad (5.34)$$

teljesül, vagyis $\lim_a (f + g) = F + G$.

2. Legyen $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - F| < k, \quad (5.35)$$

vagyis minden $0 < |x - a| < \delta_1$ számra

$$|f(x)| < |F| + k. \quad (5.36)$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g , hogy

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - F| < \varepsilon' \quad (5.37)$$

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon'. \quad (5.38)$$

Ekkor a $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$ számra $0 < |x - a| < \delta$ esetén

$$|(fg)(x) - (FG)| = |f(x)g(x) - f(x)G + f(x)G - FG| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - G| + |G| \cdot |f(x) - F| \leq \quad (5.39)$$

$$\leq (|F| + k) \cdot \varepsilon' + |G| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (|F| + |G| + k) \leq \varepsilon, \quad (5.40)$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{|F| + |G| + k}$. Vagyis az ε , F , G és k számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd ahhoz választunk δ_f, δ_g mennyiségeket, és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.

3. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. Az $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in K$ számra, ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Vagyis ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor

$$|\lambda f(x) - \lambda F| = |\lambda| \cdot |f(x) - F| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon, \quad (5.41)$$

vagyis $\lim_a(\lambda f) = \lambda F$.

4, 5. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - F| < \varepsilon \quad (5.42)$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $0 < |x - a| < \delta$ esetén

$$||f(x)| - |F|| \leq |f(x) - F| < \varepsilon \quad (5.43)$$

$$\left| \overline{f(x)} - \overline{F} \right| = \left| \overline{f(x) - F} \right| = |f(x) - F| \leq |f(x) - F| < \varepsilon \quad (5.44)$$

teljesül, vagyis $\lim_a |f| = |F|$ és $\lim_a \overline{f} = \overline{F}$.

6. Legyen $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $0 < |x - a| < \delta_1$ esetén $|f(x) - F| < \frac{|F|}{2}$. Ekkor minden $0 < |x - a| < \delta_1$ számra $|f(x)| > \frac{|F|}{2}$. Legyen $\delta_f \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $0 < |x - a| < \delta_f$ esetén $|f(x) - F| < \frac{\varepsilon |F|^2}{2}$. Ekkor a $\delta = \min \{\delta_1, \delta_f\}$ olyan szám, hogy minden $x \in \text{Dom } f$ és $0 < |x - a| < \delta$ esetén

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{F} \right| = \frac{|f(x) - F|}{|f(x)| \cdot |F|} < \frac{|f(x) - F|}{\frac{|F|}{2} \cdot |F|} < \frac{2}{|F|^2} \cdot \frac{\varepsilon |F|^2}{2} = \varepsilon. \quad (5.45)$$

5.5. Tétel. *Ha az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\text{Dom } f = \text{Dom } g$ és minden $x \in \text{Dom } f$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\text{Dom } f$ halmaznak és létezik a $\lim_a f, \lim_a g$ határérték, akkor $\lim_a f \leq \lim_a g$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\text{Dom } f = \text{Dom } g$ és vezessük be a $H = \text{Dom } f$ jelölést. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a H halmaznak, minden $x \in H$ esetén $f(x) \leq g(x)$, valamint létezik a $\lim_a f, \lim_a g$ határérték. Legyen $F = \lim_a f, G = \lim_a g$, és tegyük fel, hogy $G < F$. Az $\varepsilon = \frac{F - G}{2}$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H$ esetén, ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - F| < \varepsilon$ és $|g(x) - G| < \varepsilon$. Vagyis $x \in H \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ esetén az $F - \varepsilon < f(x)$ egyenlőtlenség miatt $\frac{F + G}{2} < f(x)$, és a $g(x) < G + \varepsilon$ egyenlőtlenség miatt $g(x) < \frac{F + G}{2}$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $f(x) \leq g(x)$.

5.6. Tétel. *(Rendőr-elv függvények határértékére.) Ha az $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\text{Dom } f = \text{Dom } g = \text{Dom } h$ és minden $x \in \text{Dom } f$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\text{Dom } f$ halmaznak és valamely $A \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_a f = \lim_a h = A$ teljesül, akkor létezik a $\lim_a g$ határérték és $\lim_a g = A$.*

Bizonyítás. Legyen $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\text{Dom } f = \text{Dom } g = \text{Dom } h$ teljesül és vezessük be a $H = \text{Dom } f$ jelölést. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a H halmaznak, minden $x \in H$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ teljesül, valamint $A \in \mathbb{R}$ olyan szám, melyre $\lim_a f = \lim_a h = A$. Bevezetve az $\alpha = g - f$ és a $\beta = h - f$ függvényeket, minden $x \in H$ esetén $0 \leq \alpha(x) \leq \beta(x)$ teljesül. A $\lim_a \beta = 0$ határérték miatt minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in H \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ esetén $-\varepsilon < \beta(x) < \varepsilon$. A $0 \leq \alpha(x) \leq \beta(x)$ egyenlőtlenség alapján ekkor $|\alpha(x)| < \varepsilon$ is teljesül, vagyis $\lim_a \alpha = 0$. Ekkor a $g = \alpha + f$ függvénynek is létezik határértéke az a pontban és $\lim_a g = \lim_a \alpha + \lim_a f = A$.

5.7. Tétel. (Átviteli elv határértékre.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $z \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom}(f)$ halmaz torlódási pontja. A $\lim_{z} f$ határérték pontosan akkor létezik, ha $\lim_{z} f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f) \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $z \in \mathbb{R}$ a $\text{Dom}(f)$ halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim_{z} f = F \in \mathbb{R}$ határérték, és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f) \setminus \{z\}$ a z ponthoz konvergáló tetszőleges sorozat. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvény határértéke miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f : 0 < |x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - F| < \varepsilon. \quad (5.46)$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - z| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ számra $|f(a_n) - F| < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = F$.

Most tegyük fel, hogy $\lim_{z} f \circ a$ létezik minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f) \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló tetszőleges sorozat esetén. Legyen $b, c : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f) \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat, valamint

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f) \setminus \{z\} \quad n \mapsto \begin{cases} b_{\frac{n}{2}} & \text{ha } n \text{ páros;} \\ c_{\frac{n-1}{2}} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \quad (5.47)$$

Ekkor $f \circ b$ és $f \circ c$ is részsorozata a konvergens $f \circ a$ sorozatnak, tehát a határértékük is megegyezik. Vagyis létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f) \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén $\lim_{z} f \circ a = A$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim_{z} f = A$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim_{z} f \neq A$. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) \setminus \{z\} : f(x) \notin B_\varepsilon(A). \quad (5.48)$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{ x \in \text{Dom } f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}, |f(x) - A| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset, \quad (5.49)$$

ezért

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \text{Dom } f \setminus \{z\} \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z) \setminus \{z\}, |f(x) - A| \geq \varepsilon \right\} \neq \emptyset. \quad (5.50)$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f \setminus \{z\}$ sorozat, melynek határértéke z . Ekkor $\lim_{z} f \circ a = A$ nem teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|f(a_n) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|f(a_n) - A| \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f) \setminus \{z\}$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim_{z} f \circ a = A$.

5.3. Függvény folytonossága

5.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Dom } f$.

– Az f függvény folytonos az a pontban, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \left(f(B_\delta(a)) \subseteq B_\varepsilon(f(a)) \right). \quad (5.51)$$

– Az f függvény folytonos, ha minden $a \in \text{Dom } f$ pontban folytonos.

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$. Az A halmazon értelmezett folytonos függvények halmazára a

$$C(A, \mathbb{R}) \triangleq \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\} \quad (5.52)$$

jelölést használjuk.

5.8. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$, $c \in \mathbb{R}$. Ha az f és g függvény folytonos az a pontban, akkor az

$$f + g, fg, cf, |f|, \bar{f} \quad (5.53)$$

függvények is folytonosak az a pontban, valamint ha $f(a) \neq 0$, akkor az $\frac{1}{f}$ függvény is folytonos az a pontban.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in K = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$, $c \in \mathbb{R}$, továbbá legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g , hogy

$$\forall x \in K : |x - a| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.54)$$

$$\forall x \in K : |x - a| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.55)$$

Ekkor a $\delta = \min \{\delta_f, \delta_g\}$ számra

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (f + g)(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon \quad (5.56)$$

teljesül, vagyis az $(f + g)$ függvény folytonos az a pontban.

2. Legyen $k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám. Ekkor létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < k, \quad (5.57)$$

vagyis minden $|x - a| < \delta_1$ számra

$$|f(x)| < |f(a)| + k. \quad (5.58)$$

Minden $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan δ_f, δ_g , hogy

$$\forall x \in K : |x - a| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon' \quad (5.59)$$

$$\forall x \in K : |x - a| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon'. \quad (5.60)$$

Ekkor a $\delta = \min \{\delta_f, \delta_g, \delta_1\}$ számra $|x - a| < \delta$ esetén

$$|(fg)(x) - (fg)(a)| = |f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)| \leq \quad (5.61)$$

$$\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(a)| + |g(a)| \cdot |f(x) - f(a)| \leq \quad (5.62)$$

$$\leq (|f(a)| + k) \cdot \varepsilon' + |g(a)| \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot (|f(a)| + |g(a)| + k) \leq \varepsilon, \quad (5.63)$$

teljesül, ha $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{|f(a)| + |g(a)| + k}$. Vagyis az ε , $f(a)$, $g(a)$ és k számokhoz választunk olyan ε' paramétert, melyre teljesül a fenti egyenlőtlenség, majd ahhoz választunk δ_f, δ_g mennyiségeket, és ezekből kapjuk meg a ε számhoz tartozó δ mennyiséget.

3. Ha $\lambda = 0$, akkor nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 0$. A $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in K$ számra, ha $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Vagyis ha $|x - a| < \delta$, akkor

$$|\lambda f(x) - \lambda f(a)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(a)| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon, \quad (5.64)$$

Vagyis a λf függvény folytonos az a pontban.

4, 5. Az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in K : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (5.65)$$

Ekkor a δ számra igaz, hogy minden $|x - a| < \delta$ esetén

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (5.66)$$

$$\left| \overline{f(x)} - \overline{f(a)} \right| = \left| \overline{f(x) - f(a)} \right| = |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (5.67)$$

teljesül, vagyis az $|f|$ és a \overline{f} függvény folytonos az a pontban.

6. Legyen $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $|x - a| < \delta_1$ esetén $|f(x) - f(a)| < \frac{|f(a)|}{2}$. Ekkor minden $|x - a| < \delta_1$ számra $|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}$. Legyen $\delta_f \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $|x - a| < \delta_f$ esetén $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon |f(a)|^2}{2}$. Ekkor a $\delta = \min\{\delta_1, \delta_f\}$ olyan szám, hogy minden $x \in \text{Dom } \frac{1}{f}$ és $|x - a| < \delta$ esetén

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} \right| = \frac{|f(x) - f(a)|}{|f(x)| \cdot |f(a)|} < \frac{|f(x) - f(a)|}{\frac{|f(a)|}{2} \cdot |f(a)|} < \frac{2}{|f(a)|^2} \cdot \frac{\varepsilon |f(a)|^2}{2} = \varepsilon. \quad (5.68)$$

5.9. Tétel. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor minden $f, g \in C(A, \mathbb{R})$ elemre és minden $c \in \mathbb{R}$ számra

$$f + g, fg, cf, |f|, \overline{f} \in C(A, \mathbb{R}). \quad (5.69)$$

Bizonyítás. Az előző állítás kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

5.10. Tétel. Folytonos függvények kompozíciója folytonos függvény.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $a \in \text{Dom } f$ olyan pont, melyre $f(a) \in \text{Dom } g$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény folytonos az a pontban.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel a g függvény folytonos az $f(a)$ pontban, ezért létezik olyan $\delta_g \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall y \in \text{Dom } g \quad |y - f(a)| < \delta_g \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon. \quad (5.70)$$

Mivel az f függvény folytonos az a pontban, ezért a δ_g számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_g. \quad (5.71)$$

Egymás után írva a fenti két egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy minden $x \in \text{Dom}(g \circ f)$ esetén

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon. \quad (5.72)$$

5.11. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Dom } f$ a $\text{Dom}(f)$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim_a f$ létezik, és $\lim_a f = f(a)$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Dom } f$ a $\text{Dom}(f)$ halmaz torlódási pontja.

Egymás alá írva a $\lim_a f = f(a)$ és az f függvény a pontbeli folytonosságának a jelentését

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : \quad 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (5.73)$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : \quad |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (5.74)$$

$$(5.75)$$

rögtön adódik, hogy az $a \in \text{Dom } f$ esetben a két formula ekvivalens.

5.12. Tétel. (Függvénykompozíció határértéke.) Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\text{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Ha a

1. $b \notin \text{Dom } g$;

2. $b \in \text{Dom } g$ és g folytonos a b pontban;

feltételek valamelyike teljesül, akkor $\lim_a (g \circ f) = c$.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $\lim_a f = b$, $\lim_b g = c$ és a torlódási pontja a $\text{Dom}(g \circ f)$ halmaznak. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges.

Először tegyük fel, hogy $b \notin \text{Dom } g$. A $\lim_b g = c$ miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) \subseteq B_\varepsilon(c). \quad (5.76)$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_{\delta'}(b). \quad (5.77)$$

Ekkor az előző egyenletek és $g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) = g(B_{\delta'}(b))$ miatt

$$(g \circ f)(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) = g(B_{\delta'}(b) \setminus \{b\}) \subseteq B_\varepsilon(c) \quad (5.78)$$

teljesül, vagyis $\lim_a (g \circ f) = c$.

Most tegyük fel, hogy $b \in \text{Dom } g$ és g folytonos a b pontban. A g függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c). \quad (5.79)$$

A $\lim_a f = b$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_{\delta'}(b). \quad (5.80)$$

Ekkor az előző egyenletek alapján

$$(g \circ f)(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq g(B_{\delta'}(b)) \subseteq B_\varepsilon(c) \quad (5.81)$$

teljesül, vagyis $\lim_a (g \circ f) = c$.

5.13. Tétel. (Átviteli elv folytonosságra.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $z \in \text{Dom}(f)$. Az f függvény pontosan akkor folytonos a z pontban, ha minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f)$, z ponthoz konvergáló sorozatra létezik a $\lim f \circ a$ határérték és $\lim f \circ a = f(z)$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \in \text{Dom}(f)$, tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az z pontban, és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f)$, z ponthoz konvergáló sorozat. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f : |x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \varepsilon. \quad (5.82)$$

Ehhez a δ számhoz az a sorozat konvergenciája miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ számra $|a_n - z| < \delta$. Ekkor minden $n > N$ számra $|f(a_n) - f(z)| < \varepsilon$, vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(z)$.

Visszafelé úgy bizonyítjuk az implikációt hogy feltesszük, hogy f nem folytonos a z pontban. Ekkor

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists x \in B_\delta(z) : f(x) \notin B_\varepsilon(f(z)). \quad (5.83)$$

Rögzítsünk egy ilyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\{x \in \text{Dom } f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z), |f(x) - f(z)| \geq \varepsilon\right\} \neq \emptyset, \quad (5.84)$$

ezért

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in \text{Dom } f \mid x \in B_{\frac{1}{n+1}}(z), |f(x) - f(z)| \geq \varepsilon\right\} \neq \emptyset. \quad (5.85)$$

Ha a egy tetszőleges eleme a fenti halmaznak, akkor $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f$ sorozat, melynek határértéke z . Ekkor $\lim f \circ a = f(z)$ nem teljesül, ugyanis az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz nem létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ számra $|f(a_n) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, ugyanis az a sorozat konstrukciója miatt minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|f(a_n) - f(z)| \geq \varepsilon$. Tehát azt az ellentmondást kaptuk, hogy nem minden $a : \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom}(f)$, z ponthoz konvergáló sorozat esetén teljesül, hogy $\lim f \circ a = f(z)$.

5.14. Tétel. (A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az f függvény folytonos.

2. Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazhoz létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = U \cap \text{Dom } f$ teljesül.

3. Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = Z \cap \text{Dom } f$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $K = \text{Dom } f$.

$1 \Rightarrow 2$ Legyen $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Ekkor minden $z \in f^{-1}(A)$ esetén létezik olyan $\varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_{\varepsilon(z)}(f(z)) \subseteq A$. Ekkor az f függvény z pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$, melyre $f(K \cap B_{\delta(z)}(z)) \subseteq B_{\varepsilon(z)}(f(z))$. Ezekből $K \cap B_{\delta(z)}(z) \subseteq f^{-1}(A)$ adódik. Tehát az $U = \bigcup_{z \in f^{-1}(A)} B_{\delta(z)}(z)$ nyílt halmazra $K \cap U = f^{-1}(A)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 1$ Legyen $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz esetén létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(A) = U \cap K$ teljesül. Legyen $z \in K$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $B_{\varepsilon}(f(z))$ nyílt halmaz, ezért létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(B_{\varepsilon}(f(z))) = U \cap K$ teljesül. A $z \in U$ miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_{\delta}(z) \subseteq U$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in K$ pontra $x \in B_{\delta}(z)$ esetén $f(x) \in B_{\varepsilon}(f(z))$ teljesül, ebből pedig következik az f függvény z pontbeli folytonossága, abból pedig folytonossága.

$2 \Rightarrow 3$ Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz. Ekkor $\mathbb{R} \setminus A$ nyílt halmaz, így létezik olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, hogy $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = U \cap K$. Ezért

$$f^{-1}(A) = K \cap \left(\mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{R} \setminus (U \cap K)) = K \cap ((\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus K)) = K \cap (\mathbb{R} \setminus U) \quad (5.86)$$

teljesül, ahol felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{R}$ halmazra $f^{-1}(A') \subseteq K$. Vagyis a $Z = \mathbb{R} \setminus U$ halmaz zárt és $f^{-1}(A) = Z \cap K$.

$3 \Rightarrow 2$ Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz. Ekkor $\mathbb{R} \setminus A$ zárt halmaz, így létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, hogy $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = Z \cap K$. Ezért

$$f^{-1}(A) = K \cap \left(\mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A)\right) = K \cap (\mathbb{R} \setminus (Z \cap K)) = K \cap ((\mathbb{R} \setminus Z) \cup (\mathbb{R} \setminus K)) = K \cap (\mathbb{R} \setminus Z) \quad (5.87)$$

teljesül, ahol ugyancsak felhasználtuk, hogy minden $A' \subseteq \mathbb{R}$ halmazra $f^{-1}(A') \subseteq K$. Vagyis az $U = \mathbb{R} \setminus Z$ halmaz nyílt és $f^{-1}(A) = U \cap K$.

5.15. Tétel. (A folytonosság topologikus jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az f függvény folytonos.
2. Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazra $f^{-1}(A)$ nyílt.
3. Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmazra $f^{-1}(A)$ zárt.

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

5.8. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathbb{R}$.

- Ha a torlódási pontja az $]a, \infty[\cap \text{Dom } f$ halmaznak, és az $f|_{]a, \infty[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]a, \infty[} = A \quad (5.88)$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény jobb oldali határértéke az a pontban A , és az A határértéket a $\lim_a f$ vagy a $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

- Ha a torlódási pontja a $]-\infty, a[\cap \text{Dom } f$ halmaznak, és az $f|_{]-\infty, a[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]-\infty, a[} = A \quad (5.89)$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény bal oldali határértéke az a pontban A , és az A határértéket a $\lim_a f$ vagy a $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a, A \in \mathbb{R}$. A fenti definíció szerint az f függvénynek a jobb oldali határértéke az a pontban A , pontosan akkor, ha a torlódási pontja a $\text{Dom } f \cap]a, \infty[$ halmaznak és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \quad (5.90)$$

teljesül. Hasonlóan, az f függvénynek a bal oldali határértéke az a pontban A , pontosan akkor, ha a torlódási pontja a $\text{Dom } f \cap]-\infty, a[$ halmaznak és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (a - \delta < x < a \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \quad (5.91)$$

teljesül.

5.16. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \text{Int Dom } f$. Pontosán akkor létezik az f függvénynek határértéke az a pontban, ha ott létezik jobb, illetve bal oldali határértéke, és $\lim_a f = \lim_{a+} f = \lim_{a-} f$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int Dom } f$ és tegyük fel, hogy az a pontban létezik az f függvénynek határértéke. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_a f \right| < \varepsilon \quad (5.92)$$

teljesül. Ekkor minden $x \in]a - \delta, a[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_a f \right| < \varepsilon, \quad (5.93)$$

vagyis létezik $\lim_{a^-} f$ és $\lim_{a^-} f = \lim_a f$. Hasonlóan igazolható, hogy létezik $\lim_{a^+} f$ és $\lim_{a^+} f = \lim_a f$.

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int Dom } f$ és tegyük fel, hogy az f függvénynek az a pontban létezik jobb, illetve bal oldali határértéke, és $\lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f$ teljesül. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a - \delta_1, a[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_{a^-} f \right| < \varepsilon \quad (5.94)$$

teljesül, és létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, melyre minden $x \in]a, a + \delta_2[$ esetén

$$\left| f(x) - \lim_{a^+} f \right| < \varepsilon. \quad (5.95)$$

Legyen $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$. Ekkor $A = \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f$ olyan szám, hogy minden $x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus \{a\}$ esetén

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad (5.96)$$

vagyis létezik $\lim_a f$ határérték és $\lim_a f = A$.

5.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Dom } f$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban elsőfajú szakadása van, ha létezik $\lim_{a^\pm} f$, de $\lim_{a^-} f \neq f(a)$ vagy $\lim_{a^+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban megszüntethető szakadása van, ha létezik $\lim_{a^\pm} f$, és $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f \neq f(a)$.
- Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban másodfajú szakadása van, f nem folytonos az a pontban, és nincs elsőfajú szakadása az a pontban.

5.4. Függvény folytonosságának elemi következményei

5.17. Tétel. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és tekintsük az $f(K)$ halmaz

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \quad (5.97)$$

nyílt fedését. Ekkor a 5.14 folytonosság topologikus jellemzése alapján, minden $i \in I$ esetén létezik olyan V_i nyílt halmaz, melyre $f^{-1}(U_i) = V_i \cap K$ teljesül. Vagyis

$$K \subseteq f^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap K) = \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i \quad (5.98)$$

a K kompakt halmaz nyílt fedése. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{i \in J} V_i \quad (5.99)$$

teljesül, ezért

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in J} f(V_i) \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i \quad (5.100)$$

az $f(K)$ halmaz véges nyílt fedése.

5.18. Tétel. (Weierstrass tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik $x, y \in K$ melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző 5.17 tétel alapján $f(K)$ kompakt halmaz, vagyis a valós számokra vonatkozó 2.20 Borel–Lebesgue-tétel miatt korlátos és zárt részhalmaza a valós számoknak. Az $f(K)$ halmaz korlátossága miatt létezik infimuma és szuprémuma, valamint az $f(K)$ halmaz zártága miatt $\inf f(K), \sup f(K) \in f(K)$. Ezért létezik olyan $x, y \in K$, melyre $f(x) = \inf f(K)$ és $f(y) = \sup f(K)$.

5.19. Tétel. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos injektív függvény. Ekkor az f^{-1} függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos injektív függvény. Ekkor a 5.17 tétel alapján a $K' = f(K)$ halmaz is kompakt. A 5.14 tétel felhasználásával úgy igazoljuk, hogy a $g = f^{-1}$ függvény folytonos. Megmutatjuk, hogy minden $A \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmazhoz létezik olyan $Z \subseteq \mathbb{R}$ zárt halmaz, melyre $\bar{g}^{-1}(A) = Z \cap \text{Dom } g$ teljesül. Az f függvény injektivitása miatt $\bar{g}^{-1}(A) = f(A)$. Az $A \cap K$ halmaz zárt és korlátos, ezért kompakt, valamint az f függvény folytonossága miatt $f(A \cap K)$ is kompakt halmaz, vagyis zárt. Legyen $Z = f(A \cap K)$. Mivel $\text{Dom } g = K'$ és $Z \subseteq K'$, ezért $\bar{g}^{-1}(A) = f(A) = f(A \cap K) = Z \cap \text{Dom } g$.

5.20. Tétel. (Bolzano-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a)f(b) < 0$. Ekkor létezik $c \in]a, b[$, melyre $f(c) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Legyen

$$H = \{z \in [a, b] \mid \forall x \in [a, z] : f(x) < 0\}. \quad (5.101)$$

Ekkor H korlátos halmaz, tehát létezik szuprémuma, legyen $c = \sup H$.

Megmutatjuk, hogy $c \notin \{a, b\}$. Ha $c = a$, akkor az f függvény folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ esetén $f(x) < 0$, vagyis c nem a felső korlátja a H halmaznak. Ha $c = b$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]b - \delta, b[$ esetén $f(x) > 0$, vagyis c nem a legkisebb felső korlátja a H halmaznak.

Végül igazoljuk, hogy $f(c) = 0$. Ha $f(c) < 0$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]c - \delta, c + \delta[$ esetén $f(x) < 0$, vagyis c nem a felső korlátja a H halmaznak. Ha $f(c) > 0$, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]c - \delta, c + \delta[$ esetén $f(x) > 0$, vagyis c nem a legkisebb felső korlátja a H halmaznak. Mivel $f(c) > 0$ és $f(c) < 0$ is lehetetlen, ezért $f(c) = 0$.

5.21. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény. Ekkor $\text{Ran } f$ nyílt intervallum és f^{-1} folytonos függvény.

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növekvő függvény. Szigorúan monoton csökkenő függvényre teljesen hasonló a bizonyítás.

Először megmutatjuk, hogy $\text{Ran } f$ intervallum. Ehhez legyen $y_1, y_2 \in \text{Ran } f$ tetszőleges olyan pont, melyre $y_1 < y_2$. Legyen $x_1, x_2 \in I$ olyan, hogy $f(x_1) = y_1$ és $f(x_2) = y_2$. Ha $c \in]y_1, y_2[$, akkor a

$$h : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) - c \quad (5.102)$$

folytonos függvényre $h(x_1)h(x_2) < 0$ teljesül, tehát a Bolzano-tétel alapján létezik olyan $x \in]x_1, x_2[$, hogy $f(x) = c$, vagyis $c \in \text{Ran } f$. Ezért minden $y_1, y_2 \in \text{Ran } f$, $y_1 \leq y_2$ esetén $[y_1, y_2] \subseteq \text{Ran } f$ teljesül, amiből már következik, hogy $\text{Ran } f$ intervallum.

Most megmutatjuk, hogy $\text{Ran } f$ nyílt halmaz. Ehhez legyen $y_0 \in \text{Ran } f$ tetszőleges pont, és legyen $x_0 \in I$ az a pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel I nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(x_0) \subseteq$

I . Legyen $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$, $y_1 = f(a)$ és $y_2 = f(b)$. Mivel f szigorúan monoton növény, ezért $y_1 < y_0 < y_2$. Legyen $r = \min\{y_2 - y_0, y_0 - y_1\}$. Ekkor $B_r(y_0) \subseteq]y_1, y_2[$, és az előbbi megállapítás alapján $\text{Ran } f$ intervallum, ezért $B_r(y_0) \subseteq \text{Ran } f$, vagyis y_0 belső pontja a $\text{Ran } f$ halmaznak. Végül megmutatjuk, hogy f^{-1} folytonos. Ehhez legyen $y_0 \in \text{Ran } f$ tetszőleges pont, és legyen $x_0 \in I$ az a pont, melyre $f(x_0) = y_0$. Mivel I nyílt halmaz, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\delta(x_0) \subseteq I$. Legyen $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$, $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$ és tekintsük az

$$f|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow [y_1, y_2] \quad x \mapsto f(x) \quad (5.103)$$

függvényt. Mivel ez folytonos bijekció, ezért a 5.19 tétel alapján az inverze is folytonos. Mivel $y_0 \in \text{Int } [y_1, y_2] = \text{Int } \text{Dom } (f|_{[a,b]})^{-1}$, valamint $f^{-1}|_{[y_1, y_2]} = (f|_{[a,b]})^{-1}$ ezért az $f^{-1}|_{[y_1, y_2]}$ függvény is folytonos az y_0 pontban, vagyis az f^{-1} függvény is folytonos az y_0 pontban.

5.5. Függvény egyenletes folytonossága

5.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A \subseteq \text{Dom } f$ és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x, y \in A : (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \quad (5.104)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\text{Dom } f$ halmazon.

5.22. Tétel. Minden egyenletesen folytonos függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvény, és $x \in \text{Dom } f$. Ekkor az f függvény egyenletes folytonossága alapján

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \text{Dom } f : (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon), \quad (5.105)$$

ami az f függvény x pontbeli folytonosságát jelenti. Vagyis az f minden $x \in \text{Dom } f$ pontban folytonos, tehát folytonos.

5.23. Tétel. (Heine tétele.) Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz és $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges rögzített paraméter. Az f függvény folytonossága alapján minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $\delta(x) \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre

$$f(B_{\delta(x)}(x)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x)) \quad (5.106)$$

teljesül. Ekkor

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x), \quad (5.107)$$

vagyis a K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, melyre

$$K \subseteq \bigcup_{x \in H} B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x). \quad (5.108)$$

Legyen $\delta = \min \left\{ \frac{\delta(x)}{2} \mid x \in H \right\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $x, y \in K$ pontra $|x - y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in K$ miatt létezik olyan $p \in H$, melyre $x \in B_{\frac{\delta(p)}{2}}(p)$ teljesül. A "háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|y - p| \leq |y - x| + |x - p| < \delta + \frac{\delta(p)}{2} \leq \delta(p), \quad (5.109)$$

ezért

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(p)| + |f(p) - f(y)| < \varepsilon. \quad (5.110)$$

5.6. Hatványsorok határértéke

5.24. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat, és tekintsük az R_a konvergenciasugarú P_a hatványsort. Ekkor $R_a > 0$ esetén, minden $z \in B_{R_a}(0)$ elemre $\lim_{x \rightarrow z} P_a(x) = P_a(z)$ teljesül, vagyis a hatványsor folytonos a $B_{R_a}(0)$ halmazon.

5.7. Elemi függvények folytonossága

5.25. Tétel. Az \exp , \sin , \cos , tg , ctg , sh , ch , th és cth függvény folytonos.

Bizonyítás. Az előző állítás és a 4.14 tétel miatt nyilvánvaló.

5.26. Tétel. (Nevezetes határértékek.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (5.111)$$

Bizonyítás. Az exponenciális és a szinusz függvény hatványsorából adódik.

5.27. Tétel. Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvényre $\operatorname{Ran} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ teljesül, valamint a \log függvényre $\operatorname{Dom} \log = \mathbb{R}^+$ teljesül.

Bizonyítás. Csak a $\operatorname{Ran} \exp|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ állítást kell igazolni, hiszen a \log függvény az \exp függvény inverze. Legyen $a > 1$. Ekkor tekintsük a folytonos

$$\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \exp(x) - a \quad (5.112)$$

függvényt. Mivel $\varphi(0) = 1 - a < 0$ és $\varphi(a) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!} > a$ ezért a 5.20 Bolzano-tétel miatt létezik

olyan $x_0 \in [0, a]$ pont, melyre $\varphi(x_0) = 0$, vagyis $\exp(x_0) = a$ teljesül. Tehát $a \in \operatorname{Ran} \exp$.

Ha $0 < a < 1$, akkor $1 < \frac{1}{a} \in \operatorname{Ran} \exp$, tehát létezik olyan x_0 , melyre $\exp(x_0) = \frac{1}{a}$. Mivel $\exp(-x_0) = \frac{1}{\exp(x_0)} = a$, ezért $a \in \operatorname{Ran} \exp$.

5.28. Tétel. (A logaritmus függvény.) A $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, szigorúan monoton növvő bijektív függvény.

Bizonyítás. A 5.27 tétel alapján $\text{Dom log} = \mathbb{R}^+$, valamint mivel $\text{Dom exp}|_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, és $(\text{exp}|_{\mathbb{R}})^{-1} = \text{log}$, ezért $\text{Ran log} = \mathbb{R}$. A 4.23 tétel alapján az $\text{exp}|_{\mathbb{R}}$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért a log függvény is szigorúan monoton növekvő vagyis injektív függvény. Ezek alapján a $\text{log} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény bijekció.

Mivel $\text{exp}|_{\mathbb{R}}$ nyílt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 5.21 tétel alapján az inverze is folytonos, vagyis a log függvény folytonos.

5.29. Tétel. (A hatványfüggvény folytonossága.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\text{id}_{\mathbb{R}^+}^{\alpha} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^{\alpha} \quad (5.113)$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges paraméter. Mivel a $\text{log} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, az

$$M_{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \alpha x \quad (5.114)$$

és az $\text{exp}|_{\mathbb{R}}$ függvény folytonos, ezért az $\text{exp} \circ M_{\alpha} \circ \text{log}$ függvény is folytonos, ami pedig éppen az $\text{id}_{\mathbb{R}^+}^{\alpha}$ függvény.

5.30. Tétel. (A π szám bevezetése.)

1. Minden $x \in]0, \sqrt{3}[$ esetén $\sin x > 0$.
2. A \cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $]0, \sqrt{3}[$ intervallumon.
3. $\cos \sqrt{3} < -\frac{1}{8}$
4. Létezik egyetlen olyan $x \in]0, \sqrt{3}[$ szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in]0, \sqrt{3}[$, ekkor

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \left(\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}\right) + \dots = \quad (5.115)$$

$$= x \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^5}{5!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{10 \cdot 11}\right) + \dots \geq \quad (5.116)$$

$$\geq x \left(1 - \frac{3}{6}\right) + \frac{x^5}{5!} \cdot \left(1 - \frac{3}{6 \cdot 7}\right) + \frac{x^9}{9!} \cdot \left(1 - \frac{3}{10 \cdot 11}\right) + \dots \geq \quad (5.117)$$

$$\geq x \left(1 - \frac{3}{6}\right) = \frac{x}{2} > 0. \quad (5.118)$$

2. A 4.27 tételben szereplő addíciós formulák alapján minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2 \sin \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right). \quad (5.119)$$

Tehát elég azt megmutatni, hogy az $x_1, x_2 \in]0, \sqrt{3}[$, $x_1 < x_2$ esetben $\sin \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$ és $\sin \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Mivel $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2} \in]0, \sqrt{3}[$, ezért az első pont alapján $\sin \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$, valamint $\sin \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$.

3. A \cos függvény definíciója alapján

$$\cos \sqrt{3} = 1 - \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{4!} - \left(\frac{3^3}{6!} - \frac{3^4}{8!}\right) - \left(\frac{3^5}{10!} - \frac{3^6}{12!}\right) - \dots = \quad (5.120)$$

$$= -\frac{1}{8} - \frac{3^3}{6!} \left(1 - \frac{3}{7 \cdot 8}\right) - \frac{3^5}{10!} \left(1 - \frac{3}{11 \cdot 12}\right) - \dots < -\frac{1}{8} \quad (5.121)$$

adódik.

4. A \cos függvény folytonossága miatt a Bolzano-tétel alapján adódik, hogy létezik olyan $x \in]0, \sqrt{3}[$ szám, melyre $\cos x = 0$, valamint a \cos függvény $[0, \sqrt{3}]$ intervallumon való szigorú monotonitásából adódik, hogy legfeljebb egy ilyen x szám létezhet ebben az intervallumban.

5.11. Definíció. Legyen $x \in]0, \sqrt{3}[$ az a szám, melyre $\cos x = 0$ teljesül, ekkor a $\pi \triangleq 2x$ számot *Ludolf-féle számnak* vagy *pi-nek* nevezzük és a görög π (pi) betűvel jelöljük. (Értéke megközelítőleg $\pi \approx 3.1415926535897932385$.)

Megjegyzés. A fenti tételben szereplő számoláshoz hasonlóan igazolható, hogy $\cos \frac{3}{2} > 0$, és egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\sqrt{3} < 1,74$. Tehát eddigi eredményeink alapján $3 < \pi < 3,48$ adódik. \diamond

5.31. Tétel. (Nevezetes szögek.)

– A $\frac{\pi}{2}$ és a π szögfüggvényei.

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \cos \pi = -1 \quad \sin \pi = 0 \quad (5.122)$$

– Minden $x \in \mathbb{C}$ esetén

$$\begin{aligned} \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x & \sin(x + \pi) &= -\sin x & \sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \cos(x + \pi) &= -\cos x & \cos(x + 2\pi) &= \cos x \end{aligned} \quad (5.123)$$

– Minden $x \in \mathbb{C}$ számra

$$e^{x+2\pi i} = e^x, \quad \operatorname{sh}(x + 2\pi i) = \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(x + 2\pi i) = \operatorname{ch} x. \quad (5.124)$$

– A $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ és a $\frac{\pi}{3}$ szögfüggvényei.

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.125)$$

Bizonyítás. 1. A $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ a π szám definíciója alapján teljesül. Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ezért $\sin \frac{\pi}{2} \in \{-1, 1\}$. A 5.30 tétel alapján $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, ezért $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. A $\sin \pi$ és a $\cos \pi$ érték a 4.27 tételben szereplő addíciós formulával igazolható.

2–3. Az egyenlőségek a 4.27 tételben szereplő addíciós formulákkal igazolhatók.

4. Legyen $a = \sin \frac{\pi}{6}$ és $b = \cos \frac{\pi}{6}$. Az addíciós formulák alapján

$$\sin \frac{2\pi}{6} = 2ab \quad \text{és} \quad \cos \frac{2\pi}{6} = b^2 - a^2, \quad (5.126)$$

valamint

$$\sin \frac{3\pi}{6} = 3ab^2 - a^3 \quad \text{és} \quad \cos \frac{3\pi}{6} = b^3 - 3a^2b. \quad (5.127)$$

A $\frac{\pi}{2}$ szinusztát és koszinuszát az 1. pont alapján beírva az

$$1 = 3ab^2 - a^3 \quad \text{és} \quad 0 = b^3 - 3a^2b. \quad (5.128)$$

egyenletrendszer adódik. Ha a $b = 0$ teljesülne, akkor az első egyenlet alapján $a < 0$ teljesülne, azonban $\frac{\pi}{6} \in]0, \sqrt{3}[$, ezért a 5.30 tétel alapján $a > 0$. Tehát $b \neq 0$. A második egyenlet miatt ekkor $b^2 = 3a^2$, amit az első egyenletbe írva $1 = 8a^3$ adódik. Innen már a és b értéke egyszerűen számolható. A $\sin \frac{\pi}{3}$ és a $\cos \frac{\pi}{3}$ értéke számolható a $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$ összefüggésre alkalmazott addíciós formulákból. Legyen $a = \sin \frac{\pi}{4}$ és $b = \cos \frac{\pi}{4}$. Az addíciós formulák alapján

$$\sin \frac{2\pi}{4} = 2ab \quad \text{és} \quad \cos \frac{2\pi}{4} = b^2 - a^2, \quad (5.129)$$

tehát

$$1 = 2ab \quad \text{és} \quad 0 = b^2 - a^2. \quad (5.130)$$

Mivel $\sin \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4} > 0$, ezért a második egyenletből $a = b$ adódik, amiből pedig $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kiegészítés. Az iménti tétel bizonyításából, illetve a tétel iterálásából egyszerűen adódik, hogy ha valamilyen $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin x$ és $\cos x$ ismert, akkor $\sin \left(\frac{x}{2^k 3^n} \right)$ és $\cos \left(\frac{x}{2^k 3^n} \right)$ is meghatározható tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $n \in \{0, 1\}$ esetén. Ennek a megfigyelésnek egy messzemenő általánosítása az alábbi.

5.12. Definíció. Fermat-prímeknek nevezzük az $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) alakú prímszámokat.

Az eddig ismert Fermat-prímek: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ és $F_4 = 65537$. Nem ismert, hogy létezik-e ezeken kívül Fermat-prím.

5.32. Tétel. Pontosan azon $x \in \mathbb{R}$ számok esetén fejezhető ki $\sin x$ és $\cos x$ értéke az összeadás, a szorzás, az osztás és a négyzetgyökvonás műveletek véges kombinációjával, ha

$$x = \frac{m\pi}{k \cdot \prod_{i=0}^{n-1} F_i^{n_i}} \quad (5.131)$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{Z}$, $n, k \in \mathbb{N}$, F_i az i -edik Fermat-prím, és minden $i = 0, \dots, k$ esetén $n_i \in \{0, 1\}$.

A függelékben a nevezetes szögekről szóló 5.31 tétel bizonyításához hasonló gondolatmenettel igazoljuk még az

$$\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \quad \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}. \quad (5.132)$$

egyenlőséget (9.6 tétel) egyéb nevezetes szögek szögfüggvényeit is megadva. ◇

5.33. Tétel. (Euler képlet.) $e^{i\pi} = -1$

Bizonyítás. A 5.31 és a 4.22 Euler-tétel következménye.

5.34. Tétel. (Trigonometrikus függvények periódusa.)

1. Minden $x \in]0, \pi[$ esetén $\sin x > 0$, minden $x \in]\pi, 2\pi[$ esetén $\sin x < 0$.
2. A $\sin x = 0$ egyenletnek $x \in [0, 2\pi[$ esetén $x \in \{0, \pi\}$ az összes megoldása.
3. A \sin függvény periódusa 2π .
4. Minden $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ esetén $\cos x > 0$, minden $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ esetén $\cos x < 0$.
5. A $\cos x = 0$ egyenletnek $x \in [0, 2\pi[$ esetén $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ az összes megoldása.
6. A \cos függvény periódusa 2π .

Bizonyítás. 1. A 5.31 tétel alapján minden $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ számra $\sin x > 0$. Ha $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, akkor az előző megállapítás és a $\sin x = \sin(\pi - x)$ azonosság miatt $\sin x > 0$. Mivel $\sin \frac{\pi}{2} = 1 > 0$, ezért minden $x \in]0, \pi[$ esetén $\sin x > 0$. Ha $x \in]\pi, 2\pi[$, akkor a $\sin x = -\sin(x - \pi)$ azonosság és az előző megállapítás alapján $\sin x < 0$.

2. Az 1. pont és a 5.31 tétel alapján nyilvánvaló.

3. Tegyük fel, hogy létezik a \sin függvénynek a 2π számnál kisebb periódusa, legyen ez p . Ekkor $p \in]0, 2\pi[$, valamint $0 = \sin 0 = \sin(0 + p)$. A 2. pont alapján ekkor $p = \pi$. Azonban

$$1 = \sin \frac{\pi}{2} \neq \sin \left(\frac{\pi}{2} + p \right) = -1 \quad (5.133)$$

miatt π sem lehet a periódus. Tehát a \sin függvény legkisebb periódusa 2π .

4. A 5.31 tétel alapján minden $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ esetén $\cos x > 0$, továbbá a \cos függvény párossága és $\cos 0 = 1$ miatt minden $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ esetén $\cos x > 0$. Ha $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, akkor a $\cos x = -\cos(x - \pi)$ azonosság és az előző megállapítás alapján $\cos x < 0$.

5. Az előző pont alapján ha $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, akkor $\cos x > 0$; ha $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, akkor $\cos x < 0$; ha $x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, akkor $\cos x = -\cos(x - \pi)$ miatt $\cos x > 0$. Tehát a $\cos x = 0$ egyenletnek a $[0, 2\pi[$ intervallumon csak $\frac{\pi}{2}$ és $\frac{3\pi}{2}$ lehet a megoldása, és a 5.31 tétel alapján ezek valóban megoldások.

6. Tegyük fel, hogy létezik a \cos függvénynek a 2π számnál kisebb periódusa, legyen ez p . Ekkor $p \in]0, 2\pi[$, valamint $0 = \cos -\frac{\pi}{2} = \cos \left(-\frac{\pi}{2} + p \right)$. A 4. pont alapján ekkor $p = \pi$. Azonban $1 = \cos 0 \neq \cos(0 + p) = -1$ miatt π sem lehet a periódus. Tehát a \cos függvény legkisebb periódusa 2π .

5.35. Tétel. Elemi trigonometrikus függvények monotonitása.

1. A \cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \pi]$ intervallumon és

$$\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \quad x \mapsto \cos x \quad (5.134)$$

bijekció.

2. A \sin függvény szigorúan monoton növekvő a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon és

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \quad x \mapsto \sin x \quad (5.135)$$

bijekció.

3. A tg függvény értelmezési tartománya a $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz, valamint szigorúan monoton növekvő a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ intervallumon és

$$\operatorname{tg} |_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \operatorname{tg} x \quad (5.136)$$

bijekció.

Bizonyítás. 1. Ha $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$, akkor $0 < \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2} < \pi$ miatt a 5.34 tétel alapján $\sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Vagyis a

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \quad (5.137)$$

trigonometrikus azonosság alapján a \cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \pi]$ halmazon. Mivel $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$ és a \cos függvény folytonos, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\operatorname{Ran} \cos |_{[0, \pi]} = [-1, 1]. \quad (5.138)$$

A $\cos |_{[0, \pi]}$ függvény injektivitása pedig szigorú monotonitásából következik.

2. Ha $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, akkor $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$ miatt a 5.34 tétel alapján $\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$, valamint $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \pi$ miatt $\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) > 0$. Vagyis a

$$\sin x_1 - \sin x_2 = -2 \cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \quad (5.139)$$

trigonometrikus azonosság alapján a \sin függvény szigorúan monoton növekvő a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ halmazon.

Mivel $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ és a \sin függvény folytonos, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\operatorname{Ran} \sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} = [-1, 1]. \quad (5.140)$$

A $\sin |_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ függvény injektivitása pedig szigorú monotonitásából következik.

3. A $\cos z = 0$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásához legyen $z = a + ib$ alakú, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. A $\cos(a + ib) = 0$ egyenlet a 4.27 tétel alapján

$$e^{2ia - 2b} = -1 \quad (5.141)$$

alakban írható fel, ami a 4.22 alapján az

$$e^{-2b} (\cos(2a) + i \sin(2a)) = -1 \quad (5.142)$$

egyenlethez vezet. A két oldal abszolútértékét véve $e^{-2b} = 1$ adódik, vagyis $b = 0$. A fenti egyenlet valós és képzetes részét véve az

$$\cos(2a) = -1 \quad \sin(2a) = 0 \quad (5.143)$$

egyenleteket kapjuk. Keressük ennek a megoldását a $2a \in [0, 2\pi[$ feltétel mellett. Ekkor a 5.34 tétel második pontja alapján a $\sin(2a) = 0$ egyenletből $2a = 0$ vagy $2a = \pi$ következik. A $2a = 0$ esetben

$\cos(2a) \neq -1$, a $2a = \pi$ esetben azonban $\cos(2a) = -1$. Tehát a $[0, 2\pi[$ intervallumban egyetlen megoldás van $a = \frac{\pi}{2}$. A trigonometrikus függvények 2π szerinti periodicitása miatt a $\cos z = 0$ egyenlet megoldása

$$z \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (5.144)$$

vagyis $\text{Dom tg} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Legyen $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Ekkor $0 < x_2 - x_1 < \pi$, tehát a 5.34 tétel 1. pontja alapján $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Vagyis a

$$\text{tg } x_1 - \text{tg } x_2 = \frac{-1}{\cos x_1 \cos x_2} \sin(x_2 - x_1) \quad (5.145)$$

trigonometrikus azonosság alapján a tg függvény szigorúan monoton növekvő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazon.

A tg függvény páratlan és $\text{tg } 0 = 0$ ezért $\text{Ran tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} = \mathbb{R}$ igazolásához elég megmutatni, hogy minden $y \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, melyre $\text{tg } x = y$ teljesül. Legyen $y \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ és a sin függvény folytonos, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \left] \frac{\pi}{2} - \delta_1, \frac{\pi}{2} \right[$ esetén $\sin x > \frac{1}{2}$. Mivel $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ és a cos függvény folytonos, ezért létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \left] \frac{\pi}{2} - \delta_2, \frac{\pi}{2} \right[$ esetén $\cos x < \frac{1}{2y}$. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ és $x_0 \in \left] \frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} \right[$ tetszőleges pont. Ekkor $\sin x_0 > \frac{1}{2}$ és $\cos x_0 < \frac{1}{2y}$, tehát

$$\text{tg } x_0 = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2y}} = y. \quad (5.146)$$

A folytonos tg függvényre a $[0, x_0]$ intervallumon $\text{tg } 0 < y < \text{tg } x_0$ teljesül, vagyis a Bolzano-tétel miatt létezik olyan $x \in]0, x_0[$, melyre $\text{tg } x = y$, ezért $y \in \text{Ran tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

5.13. Definíció. Elemi függvények inverzei.

1. A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ függvény inverzét *arkusz szinusz függvénynek* nevezzük, jele arcsin, vagyis

$$\arcsin \triangleq \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}. \quad (5.147)$$

2. A $\cos|_{[0, \pi]}$ függvény inverzét *arkusz koszinusz függvénynek* nevezzük, jele arccos, vagyis

$$\arccos \triangleq \left(\cos|_{[0, \pi]} \right)^{-1}. \quad (5.148)$$

3. A $\text{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ függvény inverzét *arkusz tangens függvénynek* nevezzük, jele arctg, vagyis

$$\text{arctg} \triangleq \left(\text{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \right)^{-1}. \quad (5.149)$$

5.36. Tétel. Az arcsin az arccos és az arctg függvény folytonos.

Bizonyítás. Az arcsin és az arccos függvény a 5.19 tétel alapján folytonos. A $\text{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ függvény nyílt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 5.21 tétel alapján az inverze is folytonos.

5.37. Tétel. *Hiperbolikus függvények monotonitása.*

1. A ch függvény szigorúan monoton növény a $[0, \infty[$ halmazon és

$$\operatorname{ch}|_{[0, \infty[} : [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[\quad x \mapsto \operatorname{ch} x \quad (5.150)$$

bijekció.

2. Az sh függvény szigorúan monoton növény az \mathbb{R} halmazon és

$$\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \operatorname{sh} x \quad (5.151)$$

bijekció.

3. A th függvény értelmezési tartománya a $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi i}{2} + k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz, szigorúan monoton növény az \mathbb{R} halmazon és

$$\operatorname{th}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\quad x \mapsto \operatorname{th} x \quad (5.152)$$

bijekció.

Bizonyítás. 1. Megmutatjuk, hogy $0 < x$ esetén $0 < \operatorname{sh} x$. Ekkor a $q = e^x$ jelöléssel $1 < q$ adódik, és az igazolandó

$$\frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) > 0 \quad (5.153)$$

egyenlőtlenség következik az $1 < q^2$ egyenlőtlenségből. Ha $0 \leq x_1 < x_2$, akkor $0 < \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2}$, ezért a

$$\operatorname{ch} x_1 - \operatorname{ch} x_2 = -2 \operatorname{sh} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) \quad (5.154)$$

azonosság alapján a ch függvény szigorúan monoton növény a $[0, \infty[$ halmazon. Most igazoljuk, hogy $0 < x$ esetén $\operatorname{ch} x > 1$. A $q = e^x$ jelöléssel $1 < q$, és ekkor

$$\operatorname{ch} x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad q + \frac{1}{q} - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (q - 1)^2 > 0. \quad (5.155)$$

Legyen $q \in [1, \infty[$. Ahhoz, hogy $q \in \operatorname{Ran} \operatorname{ch}|_{[0, \infty[}$ teljesüljön igazolni kell, hogy létezik olyan $x \in [0, \infty[$, melyre $\operatorname{ch} x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$e^x + e^{-x} = 2q \quad (5.156)$$

$$(e^x)^2 - 2qe^x + 1 = 0 \quad (5.157)$$

$$e^x = \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 - 4}}{2} = q \pm \sqrt{q^2 - 1} \quad (5.158)$$

Mivel $q + \sqrt{q^2 - 1} \geq 1$, ezért $q + \sqrt{q^2 - 1} \in \operatorname{Dom} \log$, sőt $\log(q + \sqrt{q^2 - 1}) \geq 0$, vagyis az

$$x = \log(q + \sqrt{q^2 - 1}) \in [0, \infty[\quad (5.159)$$

számra $\operatorname{ch} x = q$ teljesül.

A ch függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.

2. Mivel minden $x \in [0, \infty[$ esetén $\operatorname{ch} x > 0$ és a ch függvény páros, ezért minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch} x > 0$. Ha $0 \leq x_1 < x_2$, akkor $0 < \frac{x_2 - x_1}{2}$, vagyis az 1. pont bizonyítása alapján $\operatorname{sh} \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) > 0$, ezért a

$$\operatorname{sh} x_1 - \operatorname{sh} x_2 = -2 \operatorname{ch} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) \quad (5.160)$$

azonosság alapján az sh függvény szigorúan monoton növekvő a valós számok halmazán.

Legyen $q \in \mathbb{R}$. Ahhoz, hogy $q \in \text{Ran sh}|_{\mathbb{R}}$ teljesüljön igazolni kell, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, melyre $\text{sh } x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$e^x - e^{-x} = 2q \quad (5.161)$$

$$(e^x)^2 - 2qe^x - 1 = 0 \quad (5.162)$$

$$e^x = \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 + 4}}{2} = q \pm \sqrt{1 + q^2} \quad (5.163)$$

Mivel $q + \sqrt{1 + q^2} > 0$, ezért $q + \sqrt{1 + q^2} \in \text{Dom log}$, vagyis az

$$x = \log \left(q + \sqrt{1 + q^2} \right) \in \mathbb{R} \quad (5.164)$$

számra $\text{sh } x = q$ teljesül.

Az sh függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.

3. A $\text{ch } z = 0$ egyenlet a 4.27 tétel alapján a $\cos(iz) = 0$ egyenlettel ekvivalens, vagyis a 5.35 tétel alapján a $\text{ch } z = 0$ egyenlet megoldása

$$z \in \left\{ \frac{\pi i}{2} + k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (5.165)$$

vagyis $\text{Dom th} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi i}{2} + k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Legyen $x_1 < x_2$. Ekkor $0 < x_2 - x_1$, tehát az 1. pont bizonyítása alapján $\text{sh}(x_2 - x_1) > 0$. Vagyis a

$$\text{th } x_1 - \text{th } x_2 = \frac{-1}{\text{ch } x_1 \text{ch } x_2} \text{sh}(x_2 - x_1) \quad (5.166)$$

azonosság alapján a th függvény szigorúan monoton növekvő a valós számok halmazán.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a

$$\text{th } x < 1 \iff e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} \iff 0 < e^{-x} \quad (5.167)$$

ekvivalencia alapján $\text{th } x < 1$, valamint a

$$-1 < \text{th } x \iff -e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x} \iff 0 < e^x \quad (5.168)$$

ekvivalencia alapján $\text{th } x < -1$.

A fenti bizonyításokhoz hasonlóan adott $q \in]-1, 1[$ megkeressük azt az $x \in \mathbb{R}$ számot, melyre $\text{th } x = q$. Ennek az egyenlőségnek ekvivalens alakjai az alábbiak.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = q \quad (5.169)$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = q \quad (5.170)$$

$$e^{2x} - 1 = q e^{2x} + q \quad (5.171)$$

$$e^{2x} = \frac{1 + q}{1 - q} \quad (5.172)$$

Mivel $\frac{1 + q}{1 - q} > 0$, ezért $\frac{1 + q}{1 - q} \in \text{Dom log}$, vagyis az

$$x = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + q}{1 - q} \right) \quad (5.173)$$

számra $\text{th } x = q$ teljesül.

Az th függvény injektivitása szigorú monotonitásából következik.

5.14. Definíció. *Hiperbolikus függvények inverzei.*

1. Az $\text{sh}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area szinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arsh , vagyis

$$\text{arsh} \triangleq (\text{sh}|_{\mathbb{R}})^{-1}. \quad (5.174)$$

2. A $\text{ch}|_{[0, \infty[}$ függvény inverzét *area koszinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arch , vagyis

$$\text{arch} \triangleq (\text{ch}|_{[0, \infty[})^{-1}. \quad (5.175)$$

3. A $\text{th}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area tangens hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arth , vagyis

$$\text{arth} \triangleq (\text{th}|_{\mathbb{R}})^{-1}. \quad (5.176)$$

5.38. Tétel. *Area hiperbolikus függvények.*

1. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\text{arsh } x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
2. Minden $x \in [1, \infty[$ esetén $\text{arch } x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
3. Minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\text{arth } x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Bizonyítás. Az előző 5.37 tétel bizonyításban már levezettük ezeket a formulákat.

5.39. Tétel. *Az arsh az arch és az arth függvény folytonos.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján ezek a függvények folytonos függvények kompozíció, ezért folytonosak.

6 Differenciálszámítás I.

6.1. Differenciálhatóság

6.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható, vagy deriválható az a pontban ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A \quad (6.1)$$

teljesül. Ezt az A számot az f függvény a pontbeli differenciáljának vagy deriváltjának nevezzük.

- Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény deriváltjának vagy derivált függvényének nevezzük a

$$f' : \left\{ a \in \text{Int Dom } f \mid \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (6.2)$$

függvényt.

- Az f differenciálható, ha $\text{Dom } f = \text{Dom } f'$.
- Az f folytonosan differenciálható, ha differenciálható és f' folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett, \mathbb{R} értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R})$ jelöli.

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény deriváltjára használjuk még a $\frac{df(x)}{dx}$ jelölést is.

6.2. Definíció. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : I \rightarrow J$ függvény diffeomorfizmus, ha bijekció, differenciálható és az inverze is differenciálható.

6.1. Tétel. (*A differenciálhatóság általános jellemzése.*) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0. \quad (6.3)$$

Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f$. Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az a pontban, és legyen $c = f'(a)$. Ekkor a derivált definíciója alapján

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} = 0, \quad (6.4)$$

vagyis

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{x - a} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} \right|, \quad (6.5)$$

amiből

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0 \quad (6.6)$$

következik.

Most tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f$ olyan szám, melyhez létezik $c \in \mathbb{R}$, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0. \quad (6.7)$$

Ekkor

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{|x-a|} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{x-a} \right|, \quad (6.8)$$

vagyis

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x-a)}{x-a} = 0, \quad (6.9)$$

amiből

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - c = 0, \quad (6.10)$$

következik, tehát f differenciálható az a pontban és $f'(a) = c$.

6.2. Tétel. (A differenciálhatóság jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (|x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a) - c(x-a)| < \varepsilon \cdot |x-a|). \quad (6.11)$$

Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

Bizonyítás. Az előző állításból és a határérték definíciójából következik.

6.3. Tétel. Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos is abban a pontban.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int Dom } f$, $f'(a) = A$, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a differenciálhatóság jellemzése alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\forall x \in \text{Dom } f : (|x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a) - A(x-a)| < \varepsilon \cdot |x-a|). \quad (6.12)$$

Vagyis minden $|x-a| < \delta$ számra

$$|f(x) - f(a)| < (|A| + \varepsilon) |x-a|, \quad (6.13)$$

amiből $\lim_a f = f(a)$ adódik. Ez pedig az f függvény folytonosságát jelenti.

6.4. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int Dom } f \cap \text{Int Dom } g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor

- $f + g$ differenciálható az a pontban, és $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
- minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban, és $(cf)'(a) = cf'(a)$;
- fg differenciálható az a pontban, és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
- ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ differenciálható az a pontban, és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int Dom } f \cap \text{Int Dom } g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. A számolás folyamán a határértékekre vonatkozó 5.4 tételt fogjuk többször felhasználni.

1.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a) \quad (6.14)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x-a} = c \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = cf'(a) \quad (6.15)$$

3. Mivel az f függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is, vagyis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ teljesül.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} = \quad (6.16)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f(a)g'(a) + g(a)f'(a) \quad (6.17)$$

4. Mivel a g függvény folytonos az a pontban, ezért annak létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a)$ számra $g(x) \neq 0$. A továbbiakban az a pontnak ezt a környezetét fogjuk csak tekinteni. Továbbá a g függvény differenciálható az a pontban, ezért ott folytonos is, vagyis $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ teljesül. Ezek alapján

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} = \quad (6.18)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)} - \frac{f(a)}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{(x - a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \quad (6.19)$$

6.5. Tétel. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmaz, $f, g \in C^1(A, \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$f + g, fg, cf \in C^1(A, \mathbb{R}) \quad (6.20)$$

teljesül, vagyis $C^1(A, \mathbb{R})$ algebra.

Bizonyítás. Az előző állítást kell minden egyes $a \in A$ pontra alkalmazni.

6.6. Tétel. (Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a). \quad (6.21)$$

Bizonyítás. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a g függvény differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban. Mivel az f függvény differenciálható a $g(a)$ pontban, ezért $g(a) \in \text{Int Dom } f$, tehát

$$\forall \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \mathbb{R} : \quad (6.22)$$

$$|y - g(a)| < \delta_1 \rightarrow |f(y) - f(g(a)) - f'(g(a))(y - g(a))| < \varepsilon_1 |y - g(a)|. \quad (6.23)$$

Mivel a g függvény differenciálható az a pontban, ezért $a \in \text{Int Dom } g$, tehát

$$\forall \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} : \quad (6.24)$$

$$|x - a| < \delta_2 \rightarrow |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| < \varepsilon_2 |x - a|. \quad (6.25)$$

Továbbá a g függvény folytonos is az a pontban, ezért

$$\forall \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+ \exists \delta_3 \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} : \quad |x - a| < \delta_3 \rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon_3. \quad (6.26)$$

Legyen $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ rögzített paraméter. Ekkor a ε_1 számhoz tartozó δ_1 paramétert választva ε_3 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x - a| < \delta_3 \rightarrow |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| < \varepsilon_1 |g(x) - g(a)|. \quad (6.27)$$

Az ε_1 számot választva ε_2 paraméternek kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x - a| < \delta_2 \rightarrow |g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| < \varepsilon_1 |x - a|. \quad (6.28)$$

Legyen $\delta' = \min\{\delta_2, \delta_3\}$. Ekkor az eddigieket összegezve mondhatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra, ha $|x - a| < \delta'$, akkor

$$|f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| < \varepsilon_1 |g(x) - g(a)| \quad (6.29)$$

$$|g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)| < \varepsilon_1 |x - a|. \quad (6.30)$$

Ezek alapján, ha $|x - a| < \delta'$, akkor

$$|f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))g'(a)(x - a)| = \quad (6.31)$$

$$= |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a)) + \quad (6.32)$$

$$+ f'(g(a))(g(x) - g(a)) - f'(g(a))g'(a)(x - a)| \leq \quad (6.33)$$

$$\leq |f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))| + \quad (6.34)$$

$$+ |f'(g(a))| \cdot |(g(x) - g(a)) - g'(a)(x - a)| < \quad (6.35)$$

$$< \varepsilon_1 |g(x) - g(a)| + |f'(g(a))| \varepsilon_1 |x - a| \leq \quad (6.36)$$

$$\leq \varepsilon_1 (\varepsilon_1 |x - a| + |g'(a)| |x - a|) + |f'(g(a))| \varepsilon_1 |x - a| = \quad (6.37)$$

$$= \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + |g'(a)| + |f'(g(a))|) |x - a| \quad (6.38)$$

Vagyis bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + |g'(a)| + |f'(g(a))|) < \varepsilon \quad (6.39)$$

teljesül, ehhez a ε_1 számhoz pedig létezik olyan $\delta' \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $|x - a| < \delta'$ esetén

$$|f(g(x)) - f(g(a)) - (f'(g(a)) \cdot g'(a))(g(x) - g(a))| < \varepsilon \cdot |x - a|, \quad (6.40)$$

ezért a $f \circ g$ függvény deriváltja az a pontban $f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és tegyük fel, hogy a végtelen torlódási pontja a Dom f halmaznak, és léteznek az alábbi határértékek.

$$a \triangleq \lim_{\infty} f' \quad b \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \quad (6.41)$$

Ekkor az $x \mapsto ax + b$ függvényt az f függvény végtelenben vett aszimptotájának nevezzük. Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben vett aszimptota.

6.2. Hatványsorok deriválása

6.7. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény deriváltja $f'(x) = nx^{n-1}$, és $a g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-n}$ függvény deriváltja $g'(x) = -nx^{-n-1}$. (Vagyis $(\text{id}_{\mathbb{R}}^n)' = n \text{id}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ és $(\text{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^{-n})' = -n \text{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^{-n-1}$.)

Bizonyítás. Az $n = 0, 1$ esetben a deriválás definíciójából rögtön adódik az állítás. Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + nx^n = (n+1)x^n. \quad (6.42)$$

A függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}. \quad (6.43)$$

6.8. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Ekkor a $B_{R_a}(0)$ halmazon

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k z^k)' \quad (6.44)$$

teljesül, amit úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a hatványsort a konvergenciasugáron belül lehet tagonként deriválni.

6.9. Tétel. (Elemi függvények deriváltja.) $\exp' = \exp$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.

Bizonyítás. Az előző állítás alkalmazása a megfelelő hatványsorokra. Például

$$\sin' z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)z^{2k}}{(2k+1)!} = \cos z. \quad (6.45)$$

6.3. Közéértéktételek

6.10. Tétel. (Rolle-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon, és melyre $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in]a, b[$, hogy

$$f'(\xi) = 0. \quad (6.46)$$

Bizonyítás. A 5.18 Weierstrass-tétel értelmében az f függvény valamely $\alpha, \beta \in [a, b]$ pontokban felveszi a minimumát és maximumát. Ha $\{\alpha, \beta\} = \{a, b\}$, akkor az f függvény állandó, vagyis minden $\xi \in]a, b[$ pontban $f'(\xi) = 0$ teljesül.

Tegyük fel, hogy az f függvény a minimumát az α pontban veszi fel, melyre $\alpha \in]a, b[$ teljesül. Mivel az f függvény differenciálható az α pontban, ezért

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \begin{cases} = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0; \\ = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0, \end{cases} \quad (6.47)$$

ahol felhasználtuk, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \geq f(\alpha)$. A fenti egyenlőtlenségekből $f'(\alpha) = 0$ adódik.

Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy $f'(\beta) = 0$, ha azt tesszük fel, hogy az f függvény a maximumát a β pontban veszi fel, melyre $\beta \in]a, b[$ teljesül.

6.11. Tétel. (Cauchy-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c). \quad (6.48)$$

Bizonyítás. Elég Rolle-tételt alkalmazni a

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) \quad (6.49)$$

függvényre.

6.12. Tétel. (Lagrange-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor létezik olyan $c \in]a, b[$, hogy

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \quad (6.50)$$

Bizonyítás. Cauchy-tételt kell alkalmazni a $g = \text{id}_{\mathbb{R}}$ függvényre.

6.13. Tétel. (Véges növekmények formulája.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor

$$|f(b) - f(a)| \leq \left(\sup_{x \in]a, b[} |f'(x)| \right) \cdot |b - a|. \quad (6.51)$$

Bizonyítás. A Lagrange-féle középérték tétel közvetlen következménye.

6.14. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

1. Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) = 0$, akkor f állandó az I intervallumon.
2. Az f függvény pontosan akkor monoton növekvő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$.
3. Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f szigorúan monoton növekvő az I intervallumon.
4. Az f függvény pontosan akkor monoton csökkenő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \leq 0$.
5. Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$ olyan, hogy $a < b$. A Lagrange-tétel értelmében létezik $c \in]a, b[$, melyre

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \quad (6.52)$$

teljesül. Ebből egyszerűen kapjuk az állításokat.

1. Ha $f' = 0$, akkor $f(b) - f(a) = 0$.
2. Ha f monoton növekvő és $c \in I$, akkor az f függvény differenciálhatósága miatt

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \quad (6.53)$$

Ha $f' \geq 0$, akkor $f(b) - f(a) \geq 0$, vagyis f monoton növekvő.

3. Ha $f' > 0$, akkor $f(b) - f(a) > 0$, vagyis f szigorúan monoton növekvő.

A 4. és 5. pont a fentiekhez hasonlóan igazolható.

A következő tétel segítségével az inverzfüggvények deriváltjait határozhatjuk meg.

6.15. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' folytonos és $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^+$ vagy $f'(I) \subseteq \mathbb{R}^-$. Ekkor $f(I)$ nyílt intervallum, f^{-1} folytonos, differenciálható, és minden $b \in f(I)$ pontra

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \quad (6.54)$$

teljesül.

6.16. Tétel. (Elemi függvények inverzének a deriváltja.)

1. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ számra $\log'(x) = \frac{1}{x}$.
2. Minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Minden $x \in]-1, 1[$ esetén $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
5. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{arsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. Minden $x \in]1, \infty[$ esetén $\operatorname{arch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
7. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{arth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Bizonyítás. 1. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$. Az 6.15 tételt alkalmazva az $f = \exp$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x} \quad (6.55)$$

teljesül.

2. Legyen $x \in]-1, 1[$. Az 6.15 tételt alkalmazva az $f = \sin$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \quad (6.56)$$

teljesül. Mivel

$$1 = \cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = \cos^2(\arcsin x) + x^2, \quad (6.57)$$

ezért

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}. \quad (6.58)$$

Abból, hogy a \sin függvény szigorúan monoton növekvő a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ intervallumon következik, hogy az \arcsin függvény is szigorúan monoton növekvő, vagyis $\arcsin' > 0$. Ezek alapján

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (6.59)$$

3. Az \arcsin függvénynél bemutatott gondolatmenet alapján bizonyítható.

4. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az 6.15 tételt alkalmazva az $f = \operatorname{tg}$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2 \operatorname{arctg} x \quad (6.60)$$

teljesül. Mivel

$$1 = \cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x) \quad (6.61)$$

$$\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) \quad (6.62)$$

$$\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = 1 + x^2 \quad (6.63)$$

$$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (6.64)$$

ezért

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (6.65)$$

5–7. A 6.15 tétel és a 5.38 tételben szereplő formulák segítségével könnyen igazolható.

6.17. Tétel. *A táblázatban szereplő f függvényeknek értelmezhető az f^{-1} inverze a $\operatorname{Ran} f$ halmazon, és az f^{-1} függvény értékészletére és deriváltjára a táblázatban szereplők teljesülnek, minden $x \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f^{-1}$ elemre.*

f	$\operatorname{Dom} f$	$\operatorname{Ran} f$	f'	f^{-1}	$\operatorname{Dom} f^{-1}$	$\operatorname{Ran} f^{-1}$	$(f^{-1})'(x)$
exp	\mathbb{R}	\mathbb{R}^+	exp	log	\mathbb{R}^+	\mathbb{R}	$\frac{1}{x}$
sin	\mathbb{R}	$[-1, 1]$	cos	arcsin	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
cos	\mathbb{R}	$[-1, 1]$	$-\sin$	arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
tg	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	\mathbb{R}	$\frac{1}{\cos^2}$	arctg	\mathbb{R}	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{1}{1+x^2}$
sh	\mathbb{R}	\mathbb{R}	ch	arsh	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
ch	\mathbb{R}	$[1, \infty[$	sh	arch	$[1, \infty[$	\mathbb{R}^+	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
th	\mathbb{R}	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$	arth	$] -1, 1[$	\mathbb{R}	$\frac{1}{1-x^2}$

(6.66)

Bizonyítás. Az eddigiek alapján nyilvánvaló.

6.18. Tétel. *(A hatványozás deriválása.)*

- Ha $a \in [1, \infty[$, akkor az $\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^a$ függvény deriváltja a $\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^{a-1}$.
- Ha $a \in]-\infty, 1[$, akkor az $\operatorname{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^a$ függvény deriváltja a $\operatorname{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^{a-1}$.

Bizonyítás. Legyen $a \in [1, \infty[$ és $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ az $f(x) = x^a$ függvény. Ekkor

$$f'(x) = (\exp(a \log(x)))' = \exp(a \log(x)) a \frac{1}{x} = ax^{a-1} \quad (6.67)$$

teljesül a hatványozás definíciója, a láncszabály és az exponenciális valamint a logaritmus függvény deriválási szabálya alapján.

6.19. Tétel. (*L'Hospital szabály.*) Legyen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, $a < b$ és $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $0 \notin g' (]a, b[)$.

1. Ha $\lim_{b^-} f = \lim_{b^-} g \in \{-\infty, 0, \infty\}$ és létezik a $\lim_{b^-} \frac{f'}{g'}$ határérték, akkor létezik a $\lim_{b^-} \frac{f}{g}$ határérték is, és

$$\lim_{b^-} \frac{f}{g} = \lim_{b^-} \frac{f'}{g'}. \quad (6.68)$$

2. Ha $\lim_{a^+} f = \lim_{a^+} g \in \{-\infty, 0, \infty\}$ és létezik a $\lim_{a^+} \frac{f'}{g'}$ határérték, akkor létezik a $\lim_{a^+} \frac{f}{g}$ határérték is, és

$$\lim_{a^+} \frac{f}{g} = \lim_{a^+} \frac{f'}{g'}. \quad (6.69)$$

Bizonyítás. Arra az esetre fogjuk bizonyítani, amikor $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy $0 \notin g' (]a, b[)$, valamint $\lim_{a^+} f = \lim_{a^+} g \in \{0, \infty\}$. Ennek a bizonyításnak a mintájára igazolható a többi eset is.

1. Tegyük fel, hogy $\lim_{a^+} f = \lim_{a^+} g = 0$ és

$$\lim_{a^+} \frac{f'}{g'} = A \in \mathbb{R}. \quad (6.70)$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon \quad (6.71)$$

teljesül, ami igazolja a $\lim_{a^+} \frac{f}{g} = A$ határértéket. Terjesszük ki az f és g függvényt az a pontra is a 0 értékkel, és jelölje \tilde{f} és \tilde{g} ezeket a függvényeket. Legyen $c \in]a, b[$ tetszőleges pont. Ekkor az \tilde{f} és \tilde{g} függvényre alkalmazva a Cauchy-féle középértéktételt az $[a, c]$ intervallumon az adódik, hogy létezik olyan $\xi \in]a, c[$, melyre

$$\frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (6.72)$$

Tehát ha $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $\xi \in]a, a + \delta[$ esetén

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon, \quad (6.73)$$

akkor az $x \in]a, a + \delta[$ számokra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \varepsilon \quad (6.74)$$

teljesül.

2. Most tegyük fel, hogy $\lim_{a^+} f = \lim_{a^+} g = \infty$ és

$$\lim_{a^+} \frac{f'}{g'} = A \in \mathbb{R}. \quad (6.75)$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon \quad (6.76)$$

teljesül, ami igazolja a $\lim_{a^+} \frac{f}{g} = A$ határértéket.

Mivel $\lim_{a^+} \frac{f'}{g'} = A$, ezért létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta_1[$ esetén $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < 1$, vagyis minden $x \in]a, a + \delta_1[$ számra

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| < 1 + |A| \quad (6.77)$$

teljesül, tehát az $\frac{f'}{g'}$ függvény korlátos a $]a, a + \delta_1[$ halmazon.

Mivel $\lim_{a^+} f = \lim_{a^+} g = \infty$, ezért létezik olyan $c \in]a, a + \delta_1[$, hogy minden $x \in]a, c[$ esetén $f(x), g(x) > 0$. Mégegyszer alkalmazva ezt az elvet, azt kapjuk, hogy létezik olyan $d \in]a, c[$, hogy minden $x \in]a, d[$ esetén $f(x) > f(c)$ és $g(x) > g(c)$. Vezessük be a

$$T :]a, d[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}} \quad (6.78)$$

függvényt. Legyen $z \in]a, d[$ tetszőleges pont. Ekkor az f és g függvényre alkalmazva a Cauchy-féle középpértéktételt a $[z, c]$ intervallumon, az adódik, hogy létezik olyan $\xi \in]z, c[$, melyre

$$\frac{f(z) - f(c)}{g(z) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad (6.79)$$

vagyis az

$$\frac{f(z) - f(c)}{g(z) - g(c)} = \frac{f(z)}{g(z)} \cdot \frac{1}{T(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (6.80)$$

egyenlőség alapján

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} T(z) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} (T(z) - 1), \quad (6.81)$$

tehát

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - A \right| \leq \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} (T(z) - 1) \right|. \quad (6.82)$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $\lim_{a^+} \frac{f'}{g'} = A$, ezért létezik olyan $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta_2[$ esetén

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.83)$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow a^+} T(x) = 1$ és az $\frac{f'}{g'}$ korlátos a $]a, d[$ halmazon, ezért létezik olyan $\delta_3 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a, a + \delta_3[$ esetén

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} (T(x) - 1) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (6.84)$$

teljesül minden $z \in]a, d[$ számra. Ekkor a $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2, \delta_3 \}$ olyan szám, hogy minden $x \in]a, a + \delta[$ számra

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon. \quad (6.85)$$

6.4. Többszörös deriváltak

6.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, és teljes indukcióval értelmezzük a következő függvényeket. Legyen $f^{(0)} \triangleq f$, és minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f^{(i)} \triangleq (f^{(i-1)})'$.

- Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{R}$. Az f függvény n -szer differenciálható az a pontban, ha $a \in \text{Dom } f^{(n)}$.
- Az f függvény végtelenszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \in \text{Dom } f^{(n)}$ teljesül.
- Az f függvény n -szer ($n \in \mathbb{N}^+$) differenciálható, ha $\text{Dom } f^{(n)} = \text{Dom } f$.
- Az f függvény végtelenszer differenciálható, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\text{Dom } f^{(n)} = \text{Dom } f$ teljesül. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett \mathbb{R} értékű végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R})$ jelöli.
- Az f függvény n -szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható, ha f n -szer differenciálható és $f^{(n)}$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett \mathbb{R} értékű n -szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, \mathbb{R})$ jelöli.

Megjegyzés. A fenti definícióban minden függvényre értelmeztük az $(f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatot, azonban könnyen lehet, hogy valamely $i \in \mathbb{N}$ esetén $\text{Dom } f^{(i)} = \emptyset$, és ekkor természetesen minden $\mathbb{N} \ni j > i$ esetén is $\text{Dom } f^{(j)} = \emptyset$.

◇

6.20. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

1. Az f függvény pontosan akkor konvex, ha f' monoton növekvő.
2. Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha f' monoton csökkenő.

Bizonyítás. 1. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex differenciálható függvény és legyen $a, b \in I$, $a < b$. Megmutatjuk, hogy ekkor $f'(a) \leq f'(b)$. Minden $x \in]a, b[$ esetén

$$x = \frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a, \quad (6.86)$$

valamint $\frac{x-a}{b-a}, \frac{b-x}{b-a} \in [0, 1]$ és $\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} = 1$. Tehát az f függvény konvexitása alapján

$$f(x) = f\left(\frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a\right) \leq \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a). \quad (6.87)$$

Rövid számolással ebből az egyenlőtlenségből

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x-b} \quad (6.88)$$

adódik, amiből

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \quad (6.89)$$

$$\leq \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x-b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x-b} = f'(b) \quad (6.90)$$

következik.

Megfordítva, legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, hogy f' monoton növekvő és legyen $a, b \in I$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden $t \in [0, 1]$ számra

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (6.91)$$

teljesül, vagy másképp, hogy a

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto f(ta + (1-t)b) - tf(a) - (1-t)f(b) \quad (6.92)$$

függvényre $g \leq 0$ teljesül. A g függvény a folytonossága és a $[0, 1]$ kompaktsága miatt felveszi a maximumát valamely $t_0 \in [0, 1]$ pontban. Tegyük fel, hogy $g(t_0) = c > 0$. Ekkor a Rolle-tétel bizonyítása alapján $g'(t_0) = 0$. Mivel f' monoton növény és

$$g'(t) = f'(t(a-b) + b)(a-b) - f(a) + f(b), \quad (6.93)$$

ezért g' is monoton növény. Tehát minden $z \in]t_0, 1[$ esetén $g'(z) \geq 0$. A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva a $[t_0, 1]$ intervallumra, azt kapjuk, hogy létezik olyan $z \in]t_0, 1[$, melyre

$$g(1) - g(t_0) = g'(z)(1 - t_0), \quad (6.94)$$

azonban $g(1) - g(t_0) = 0 - c < 0$ és $g'(z)(1 - t_0) \geq 0$. Mivel ellentmondást kaptunk így a $g(t_0) = c > 0$ feltételezés nem helytálló, vagyis a g függvény maximuma nem lehet szigorúan pozitív.

2. A konkáv eset a -1 számmal való szorzással visszavezethető a konvex esetre.

6.21. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény.

1. Az f függvény pontosan akkor konvex, ha $f'' \geq 0$.
2. Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha $f'' \leq 0$.

Bizonyítás. A 6.20 előző állítás és a 6.14 tétel alapján nyilvánvaló.

6.22. Tétel. (Súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha_i \in [0, 1]$ olyan, melyre $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ teljesül. Ekkor

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k}. \quad (6.95)$$

Bizonyítás. Az exponenciális függvény konvexitásából és a Jensen-egyenlőtlenségből adódik.

$$\exp \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \log x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k \exp(\log x_k) \quad (6.96)$$

6.23. Tétel. (Hölder-egyenlőtlenség.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $\alpha, \beta \in]0, 1[$ olyan, hogy $\alpha + \beta = 1$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n x_i^\alpha y_i^\beta \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^\beta. \quad (6.97)$$

Bizonyítás. Legyen $x = \sum_{i=1}^n x_i$ és $y = \sum_{i=1}^n y_i$. Ha $0 < x, y$, akkor a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján minden $i \in \{1, \dots, n\}$ számra

$$\left(\frac{x_i}{x} \right)^\alpha \left(\frac{y_i}{y} \right)^\beta \leq \alpha \left(\frac{x_i}{x} \right) + \beta \left(\frac{y_i}{y} \right) \quad (6.98)$$

teljesül, melyet összegezve az i indexre

$$\frac{1}{x^\alpha y^\beta} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha y_i^\beta \leq \alpha \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n x_i + \beta \frac{1}{y} \sum_{i=1}^n y_i = \alpha + \beta = 1 \quad (6.99)$$

adódik. Ennek átrendezése a bizonyítandó egyenlőtlenség.

6.24. Tétel. (*Minkowski-egyenlőtlenség.*) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. Ekkor

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (6.100)$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és $x_i, y_i \in \mathbb{R}_0^+$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, valamint $p \in [1, \infty[$. A Hölder-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} x_i + \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} y_i = \quad (6.101)$$

$$= \sum_{i=1}^n ((x_i + y_i)^p)^{1-\frac{1}{p}} (x_i^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^n ((x_i + y_i)^p)^{1-\frac{1}{p}} (y_i^p)^{\frac{1}{p}} \leq \quad (6.102)$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \quad (6.103)$$

adódik, aminek az átrendezése a bizonyítandó tétel.

6.5. Taylor-sorfejtés

6.25. Tétel. (*Taylor-formula.*) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$, és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \text{Int Dom } f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n -szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$ -szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon. Ekkor minden $p \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} (b-\xi)^{n+1-p} (b-a)^p. \quad (6.104)$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter esetén definiáljuk a

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - \lambda (b-x)^p. \quad (6.105)$$

függvényt. Ekkor a

$$g(a) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k - \lambda (b-a)^p \quad (6.106)$$

$$g(b) = 0 \quad (6.107)$$

egyenlőségből látszik, hogy a

$$\lambda = \frac{1}{(b-a)^p} \left(f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) \quad (6.108)$$

választás esetén $g(a) = g(b) = 0$ teljesül. Mivel a g függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és differenciálható az intervallum belsejében, valamint $g(a) = g(b) = 0$, ezért a Rolle-tétel értelmében létezik olyan $\xi \in]a, b[$ pont, melyre $g'(\xi) = 0$ teljesül.

Most meghatározzuk a g' függvényt.

$$g'(x) = - \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k \right)' + p\lambda(b-x)^{p-1} = \quad (6.109)$$

$$= - \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{k!} k(b-x)^{k-1} \right) + p\lambda(b-x)^{p-1} = \quad (6.110)$$

$$= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} + p\lambda(b-x)^{p-1} = \quad (6.111)$$

$$= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k + p\lambda(b-x)^{p-1} = \quad (6.112)$$

$$= - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + p\lambda(b-x)^{p-1}. \quad (6.113)$$

Vagyis a $g'(\xi) = 0$ egyenletből

$$- \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (b-x)^n + p\lambda(b-x)^{p-1} = 0 \quad (6.114)$$

adódik, amibe beírva λ értékét és átrendezve a bizonyítani kívánt egyenlőséghez jutunk.

Külön definiáljuk a fenti tétel két speciális esetét.

6.5. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a, b] \subseteq \text{Int Dom } f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n -szer folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon és $(n+1)$ -szer differenciálható az $]a, b[$ intervallumon.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \quad (6.115)$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$ kifejezést *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a, b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (b-\xi)^n (b-a) \quad (6.116)$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (b-\xi)^n (b-a)$ kifejezést *Cauchy-féle maradéktagnak* nevezzük.

6.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, és $a \in \text{Dom } f^{(n)}$. Az f függvény a pontbeli n -ed fokú Taylor-polinomjának nevezzük a

$$T_{n,a}^f(x) \triangleq \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (6.117)$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és $a \in \text{Dom } f$, akkor az f függvény a pontbeli Taylor-sorának nevezzük a

$$T_a^f(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (6.118)$$

hatványsort.

6.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{Int Dom } f'$. Az f függvény a pontbeli érintőjének nevezzük a $T_{1,a}^f$ polinomot, vagyis az érintő egyenlete

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a). \quad (6.119)$$

6.8. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, és $a \in \text{Int}(\text{Dom } f^{(n)} \cap \text{Dom } g^{(n)})$. Azt mondjuk, hogy az f és g függvények az a pontban n -ed rendben érintkeznek, ha minden $n \geq k \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ teljesül.

6.26. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, és $a \in \text{Int Dom } f^{(n)}$, és legyen P_n olyan n -ed fokú polinom, mely n -ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Ekkor $P_n = T_{n,a}^f$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, és $a \in \text{Int Dom } f^{(n)}$, és legyen P_n olyan n -ed fokú polinom, mely n -ed rendben érintkezik az f függvénnyel az a pontban. Az $n = 0$ esetben nyilvánvaló az állítás, ezért tegyük fel, hogy $n \geq 1$. Legyen

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k \quad (6.120)$$

olyan polinom, mely n -ed rendben érintkezik az f függvénnyel. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $j \in \{0, \dots, n\}$ esetén

$$P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^n b_k \frac{k!}{(k-j)!} (x-a)^{k-j} \quad (6.121)$$

teljesül. Az n -ed rendben való érintkezés miatt minden $j \in \{0, \dots, n\}$ számra

$$f^{(j)}(a) = P_n^{(j)}(a) \quad \rightarrow \quad f^{(j)}(a) = j! \cdot b_j \quad (6.122)$$

teljesül, vagyis $b_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!}$, ezért

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = T_{n,a}^f(x). \quad (6.123)$$

6.27. Tétel. (Infinitézimális Taylor-formula.) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \text{Dom } f^{(n)}$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_{n,a}^f(x)}{|x-a|^n} = 0. \quad (6.124)$$

6.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$.

- Az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
- Az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
- Az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az a pontban.
- Az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$ esetén $f(a) < f(x)$. f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az a pontban.

6.28. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \text{Dom } f^{(n)}$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$, valamint $f^{(n)}(a) \neq 0$.

1. Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális maximuma az a pontban, ha n páros, és $f^{(n)}(a) < 0$.
2. Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális minimuma az a pontban, ha n páros, és $f^{(n)}(a) > 0$.
3. Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincsen lokális szélsőértéke az a pontban.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \text{Dom } f^{(n)}$ és tegyük fel, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$ teljesül, valamint $f^{(n)}(a) \neq 0$. Az 1. pontot igazoljuk, a második pont a -1 számmal való szorzással visszavezethető az elsőre.

Mivel $a \in \text{Dom } f^{(n)}$ ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $]a - r, a + r[\subseteq \text{Dom } f$. Az infinitezimális Taylor-formula alapján (6.27 tétel) a

$$\varphi :]a - r, a + r[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - T_{n,a}^f(x)}{|x - a|^n}, & \text{ha } x \neq a; \\ 0, & \text{ha } x = a \end{cases} \quad (6.125)$$

függvény folytonos, továbbá a deriváltakra vonatkozó feltételek miatt

$$T_{n,a}^f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad (6.126)$$

vagyis az $x \neq a$ esetben

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{|x - a|^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \frac{(x - a)^n}{|x - a|^n}, \quad (6.127)$$

amiből

$$f(x) - f(a) = |x - a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot \frac{(x - a)^n}{|x - a|^n} + \varphi(x) \right) \quad (6.128)$$

következik.

1. Tegyük fel, hogy az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban. Ekkor létezik olyan δ_1 , hogy minden $x \in]a - \delta_1, a + \delta_1[\setminus \{a\}$ esetén $f(x) < f(a)$. Legyen $\delta = \min\{r, \delta_1\}$. Ha n páros, akkor 6.128 képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x - a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right), \quad (6.129)$$

vagyis minden $x \in]a - \delta, a + \delta[$ számra

$$0 > \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \quad \rightarrow \quad -n!\varphi(x) > f^{(n)}(a), \quad (6.130)$$

amiből a $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt $0 \geq f^{(n)}(a)$ adódik, azonban feltettük, hogy $f^{(n)}(a) \neq 0$, ezért $0 > f^{(n)}(a)$.

Ha n páratlan, akkor a $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in]a - \delta_1, a + \delta_1[$ esetén

$$\varphi(x) < \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right|. \quad (6.131)$$

Legyen $\delta = \min \{r, \delta_1\}$.

Ha $0 < f^{(n)}(a)$ és $x \in]a, a + \delta[$, akkor $a < x$, $\frac{(x-a)^n}{|x-a|^n} = 1$, tehát a 6.128 képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) > 0, \quad (6.132)$$

vagyis $f(x) > f(a)$ miatt az f függvénynek nem lehet lokális maximuma az a pontban.

Ha $0 > f^{(n)}(a)$ és $x \in]a - \delta, a[$, akkor $x < a$, $\frac{(x-a)^n}{|x-a|^n} = -1$, tehát a 6.128 képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(-\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) > 0, \quad (6.133)$$

vagyis $f(x) > f(a)$ miatt az f függvénynek nem lehet lokális maximuma az a pontban.

2. Tegyük fel, hogy n páros és $f^{(n)}(a) < 0$. A 6.128 képlet alapján

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right). \quad (6.134)$$

A $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ határérték miatt létezik olyan $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $]a - \delta_1, a + \delta_1[$ esetén

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) < 0. \quad (6.135)$$

Ekkor a $\delta = \min \{r, \delta_1\}$ számra teljesül az, hogy minden $x \in]x - \delta, x + \delta[\setminus \{a\}$ elemre

$$f(x) - f(a) = |x-a|^n \cdot \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \varphi(x) \right) < 0, \quad (6.136)$$

vagyis $f(x) < f(a)$.

6.29. Tétel. Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f$. Tegyük fel, hogy

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \left(|f^{(n)}(x)| \leq K \right) \quad (6.137)$$

teljesül, ekkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad \forall x \in B_r(a). \quad (6.138)$$

Bizonyítás. Legyen $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f$, továbbá legyen $K \in \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : \left(|f^{(n)}(x)| \leq K \right) \quad (6.139)$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ rögzített szám. A Taylor-formula alapján, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $y \in B_r(a)$, hogy

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!} r^{n+1}. \quad (6.140)$$

Mivel az $n \mapsto \frac{K}{(n+1)!} r^{n+1}$ sorozat a nullához tart, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| = 0 \quad (6.141)$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

6.30. Tétel. Legyen $c \in \mathbb{R}$ és $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, melyre létezik $r \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in B_r(0)$ esetén

$$P_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = P_b(x) \quad (6.142)$$

teljesül. Ekkor $a = b$.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$. A hatványsorok n -edik deriváltja

$$P_a^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n} = P_b^{(n)}(x). \quad (6.143)$$

Amiből az $x = 0$ helyettesítés után $a_n = b_n$ adódik. Mivel ez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, ezért $a = b$.

6.31. Tétel. Ha $x \in]-1, 1[$, akkor

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}. \quad (6.144)$$

Bizonyítás. Az $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$ hatványsor konvergenciasugara $R = 1$, ezért minden $x \in]-1, 1[$ esetén jól értelmezett az

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad (6.145)$$

függvény. Valamint $\text{Dom } \log = \mathbb{R}^+$ miatt minden $x \in]-1, 1[$ esetén jól értelmezett az

$$f(x) = \log(1+x) \quad (6.146)$$

függvény. A hatványsor illetve a logaritmus függvény deriválási szabály alapján

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x)} \quad (6.147)$$

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k. \quad (6.148)$$

Mivel $|x| < 1$, ezért a geometriai sor összegképlete alapján $(f-g)' = 0$ a $] -1, 1[$ intervallumon. Vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $x \in] -1, 1[$ esetén $f(x) = C + g(x)$. Mivel $f(0) = g(0) = 0$, ezért $C = 0$. Vagyis minden $x \in] -1, 1[$ számra $f(x) = g(x)$.

6.10. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$, ekkor

$$\binom{z}{n} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 0, \\ \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-k}{k+1} & \text{ha } n \neq 0. \end{cases} \quad (6.149)$$

6.32. Tétel. (Binomiális-sorfejtés.) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in] -1, 1[$ esetén

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k. \quad (6.150)$$

Bizonyítás. Legyen $f(x) = (1+x)^\alpha$, és $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$. A

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - k + 1}{k - 1} \right| = 1, \quad (6.151)$$

határérték alapján a hatványsor konvergenciasugara 1, vagyis minden $x \in] -1, 1[$ esetén a $P(x)$ hatványsor konvergens.

Megmutatjuk, hogy $\left(\frac{P}{f}\right)' = 0$. Ez az

$$P'(x)f(x) - f'(x)P(x) = (1+x)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} - \alpha(1+x)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \quad (6.152)$$

$$= (1+x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{k} x^k \right) = \quad (6.153)$$

$$= (1+x)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(k \binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} \right) x^k - \alpha \right) = \quad (6.154)$$

$$= (1+x)^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} \right) x^k = 0 \quad (6.155)$$

egyenlőségből következik, ahol felhasználtuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{C}$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$(k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} - \alpha \binom{\alpha}{k} = 0. \quad (6.156)$$

Mivel $\left(\frac{P}{f}\right)' = 0$, ezért létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, melyre $f = cP$ teljesül a $] -1, 1[$ halmazon. Továbbá az $f(0) = P(0)$ miatt $c = 1$, vagyis $f = P$.

7 Határozatlan integrál

7.1. Primitív függvény és tulajdonságai

7.1. Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. A differenciálható $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az f primitív függvényének nevezzük, ha $F' = f$ teljesül. Az f függvény határozatlan integráljának nevezzük az

$$\{F : I \rightarrow \mathbb{R} \mid F' = f\} \quad (7.1)$$

halmazt, melyre az $\int f$ vagy $\int f(x) dx$ szimbólumot használjuk. Az integrál jel után álló függvényt gyakran *integrandusnak* nevezzük.

7.1. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ és $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ az f bármelyik primitív függvénye. Ekkor

$$\int f = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}. \quad (7.2)$$

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ és $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ az f primitív függvénye.

Ha $G \in (F + C \mid C \in \mathbb{R})$, akkor létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, melyre $G = F + C$. Ekkor $G' = F' = f$, vagyis a G függvény is az f primitívfüggvénye.

Ha $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ az f primitív függvénye, akkor $G' = f$, tehát $(G - F)' = 0$. Ebből a 6.14 tétel alapján következik, hogy létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, szám, hogy $G - F = C$, vagyis $G \in (F + C \mid C \in \mathbb{R})$.

Megjegyzés. A fenti tétel nem igaz, ha I nem összefüggő halmaz! ◇

A fenti tétel miatt, ha F az f függvény egy primitív függvénye, akkor az

$$\int f = F + C \quad (7.3)$$

rövidebb, de pontatlanabb jelölést is használjuk.

7.2. Tétel. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy mindkettőnek létezik primitív függvénye. Ekkor minden $c \in \mathbb{R}$ számra

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{és} \quad \int (cf) = c \int f. \quad (7.4)$$

Bizonyítás. Az $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényre vonatkozó

$$(F + G)' = F' + G' \quad (cF)' = cF' \quad (7.5)$$

deriválási szabályból következik.

7.3. Tétel. (Elemi határozatlan integrálok.) Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ekkor az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{array}{lll} \int \exp = \exp + C & \int \sin = -\cos + C & \int \cos = \sin + C \\ \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C & \int \operatorname{sh} = \operatorname{ch} + C & \int \operatorname{ch} = \operatorname{sh} + C \\ \int x^a dx = \frac{x^{1+a}}{1+a} + C & & \end{array} \quad (7.6)$$

7.2. Integrálási módszerek

7.4. Tétel. (Parciális integrálás.) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye. Ekkor az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f'g) = fg - \int (fg') \quad (7.7)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ pedig olyan, hogy f és g differenciálható, valamint az fg' függvénynek létezik primitív függvénye.

Legyen $F \in fg - \int (fg')$. Ekkor

$$fg - F \in \int (fg') \rightarrow (fg - F)' = fg' \rightarrow f'g + fg' - F' = fg' \rightarrow F' = f'g, \quad (7.8)$$

vagyis $F \in \int (f'g)$, ezért az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye, valamint

$$fg - \int (fg') \subseteq \int (f'g) \quad (7.9)$$

teljesül.

Most megmutatjuk, hogy $\int (f'g) \subseteq fg - \int (fg')$. Ehhez legyen $F \in \int (f'g)$. Ekkor a bizonyítandó $F \in fg - \int (fg')$ kifejezés ekvivalens alakja az alábbi.

$$fg - F \in \int (fg') \quad (7.10)$$

Ez viszont egyszerűen adódik az

$$(fg - F)' = f'g + fg' - f'g = fg' \quad (7.11)$$

deriválásból.

7.5. Tétel. (Helyettesítéses integrálás.) Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye, és legyen $\varphi : J \rightarrow I$ diffeomorfizmus. Ekkor az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye és

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = \left(\int f \right) \circ \varphi. \quad (7.12)$$

Bizonyítás. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye, és legyen $\varphi : J \rightarrow I$ diffeomorfizmus.

Megmutatjuk, hogy az $(f \circ \varphi)\varphi' : J \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye. Legyen $F \in \int f$ és legyen $G = F \circ \varphi$. A közvetett függvény deriválási szabálya alapján

$$G' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi', \quad (7.13)$$

vagyis $G \in \int (f \circ \varphi)\varphi'$. A fenti gondolatmenetből

$$\left(\int f \right) \circ \varphi \subseteq \int (f \circ \varphi)\varphi' \quad (7.14)$$

is következik.

Most igazoljuk, hogy

$$\int (f \circ \varphi) \varphi' \subseteq \left(\int f \right) \circ \varphi \quad (7.15)$$

teljesül. Legyen $F \in \int (f \circ \varphi) \varphi'$, ami azt jelenti, hogy $F' = (f \circ \varphi) \varphi'$. Azt kell igazolni, hogy $F \circ \varphi^{-1} \in \int f$, ami ekvivalens azzal, hogy $(F \circ \varphi^{-1})' = f$. A függvénykompozíció deriválására vonatkozó láncszabály, és az inverzfüggvény deriválására vonatkozó

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}. \quad (7.16)$$

szabály felhasználásával a bizonyítandó

$$(F \circ \varphi^{-1})' = (F' \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})' = \quad (7.17)$$

$$= ((f \circ \varphi) \cdot \varphi') \circ \varphi^{-1} \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = \quad (7.18)$$

$$= (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi' \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = f \quad (7.19)$$

egyenlőség adódik.

Megjegyzés. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amelynek létezik primitív függvénye, és legyen $\varphi : J \rightarrow I$ differenciálható homeomorfizmus. Ekkor a fenti képlet az

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = \int f(x) \, dx \quad (7.20)$$

az alakban írható fel az $x = \varphi(t)$ helyettesítéssel. ◇

7.6. Tétel. (Az elemi függvények inverzének az integrálja.) Az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.

$$\int \arcsin(x) \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad x \in]-1, 1[\quad (7.21)$$

$$\int \arccos(x) \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \quad x \in]-1, 1[\quad (7.22)$$

$$\int \operatorname{arctg}(x) \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C \quad x \in \mathbb{R} \quad (7.23)$$

$$\int \operatorname{arsh}(x) \, dx = x \operatorname{arsh} x - \sqrt{1+x^2} + C \quad x \in \mathbb{R} \quad (7.24)$$

$$\int \operatorname{arch}(x) \, dx = x \operatorname{arch} x - \sqrt{x^2-1} + C \quad x \in]1, \infty[\quad (7.25)$$

$$\int \operatorname{arth}(x) \, dx = x \operatorname{arth} x + \frac{1}{2} \log(1-x^2) + C \quad x \in]-1, 1[\quad (7.26)$$

$$\int \log(x) \, dx = x \log(x) - x + C \quad x \in]0, \infty[\quad (7.27)$$

Bizonyítás. Mindegyik formula a parciális integrálás következménye.

Az első integrált megmutatjuk részletesen. Legyen

$$f :]-1, 1[\quad x \mapsto x \quad (7.28)$$

$$g :]-1, 1[\quad x \mapsto \arcsin x \quad (7.29)$$

$$\varphi :]-1, 1[\quad x \mapsto \sqrt{1-x^2}. \quad (7.30)$$

Ekkor f, g és φ differenciálható függvény, valamint

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7.31)$$

formula felhasználásával azt kapjuk, hogy az fg' függvénynek létezik primitív függvénye, hiszen

$$(-\varphi)' = fg' \quad \rightarrow \quad -\varphi \in \int (fg'). \quad (7.32)$$

A 7.4 parciális integrálás tétele alapján az $f'g$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\int (f'g) = fg - \int (fg') \quad (7.33)$$

teljesül, ami ebben az esetben az alábbi egyenlőséget jelenti.

$$\int \arcsin(x) \, dx = \int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx = \quad (7.34)$$

$$= x \arcsin x - (-\varphi(x)) + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad (7.35)$$

A parciális integrálás segítségével számolható az alábbi típusú integrál.

$$\int \left\{ \begin{array}{l} \text{polinom} \\ \text{exp, log} \\ \text{sin, cos} \\ \text{sh, ch} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{polinom} \\ \text{exp, log} \\ \text{sin, cos} \\ \text{sh, ch} \end{array} \right\} \quad (7.36)$$

7.7. Tétel. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor az \mathbb{R} bármely nyílt intervallumán az

$$\int \sin^n x \cos^m x \quad (7.37)$$

integrált az alábbi módszerek rekurzív alkalmazásával lehet kiszámolni.

1. Ha $m = 0$, akkor

$$\int \sin^n x \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+1}} \int (1 - \cos t)^k \, dt, & t = 2x \quad \text{ha } n = 2k \quad (k \in \mathbb{N}), \\ - \int (1 - t^2)^k \, dt, & t = \cos x \quad \text{ha } n = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (7.38)$$

2. Ha $n = 0$, akkor

$$\int \cos^m x \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+1}} \int (1 + \cos t)^k \, dt, & t = 2x \quad \text{ha } m = 2k \quad (k \in \mathbb{N}), \\ \int (1 - t^2)^k \, dt, & t = \sin x \quad \text{ha } m = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (7.39)$$

3. Ha n páratlan, akkor a $t = \cos x$, ha m páratlan, akkor a $t = \sin x$ helyettesítés egyszerűsíti az integrált.

4. Ha n és m páros, valamint $n = 2k$, $m = 2l$ ($k, l \in \mathbb{N}$), akkor

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+l+1}} \int (\sin^{2k} t)(1 + \cos t)^{l-k} \, dt, & t = 2x \text{ ha } n \leq m, \\ \frac{1}{2^{k+l+1}} \int (\sin^{2l} t)(1 - \cos t)^{k-l} \, dt, & t = 2x \text{ ha } n > m. \end{cases} \quad (7.40)$$

Bizonyítás. A helyettesítéssel integrálás alapján egyszerűen igazolható.

7.8. Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^+$.

1. Ekkor az $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$ halmaz nyílt intervallumain

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \log |ax+b| + C, & \text{ha } n = 1; \\ \frac{1}{a(1-n)} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C, & \text{ha } n > 1. \end{cases} \quad (7.41)$$

teljesül.

2. Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor az \mathbb{R} halmazon

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + C, \quad (7.42)$$

és ha $b^2 - 4ac > 0$ akkor az $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \neq 0\}$ halmaz nyílt intervallumain

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C \quad (7.43)$$

teljesül.

3. Ha $n > 1$ és $b^2 - 4ac \neq 0$, akkor az $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \neq 0\}$ halmazon

$$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} \, dx = \frac{2ax + b}{(1-n)(b^2 - 4ac)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{2(2n-3)a}{(1-n)(b^2 - 4ac)} \int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \, dx. \quad (7.44)$$

4. Az $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \neq 0\}$ halmazon

$$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} \, dx = \frac{1}{2a} \log |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \, dx. \quad (7.45)$$

5. Ha $n > 1$ és $b^2 - 4ac \neq 0$, akkor az $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c \neq 0\}$ halmazon

$$\int \frac{x}{(ax^2 + bx + c)^n} \, dx = \frac{bx + 2c}{(n-1)(b^2 - 4ac)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{(2n-3)b}{(n-1)(b^2 - 4ac)} \int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \, dx. \quad (7.46)$$

Bizonyítás. Deriválással egyszerűen adódik.

A következő tétel szerint bármely két polinomnak a hányadosa integrálható az előző tételben szereplő formulák segítségével. Azt a módszert, ahogy visszavezetjük a polinomok hányadosát a fenti tételben szereplő integrandusokra *parciális törtekre bontásnak* nevezik. Mivel a tétel bizonyítása bizonyos lineáris egyenletrendszerek egyértelmű megoldhatóságának a vizsgálatáról szól, és számos tételt felhasznál a lineáris algebra témaköréből, ezért nem ismertetjük.

7.9. Tétel. (Parciális törtekre bontás.) Legyen $P_n(x)$ egy tetszőleges n -ed fokú-, $Q_m(x)$ pedig egy olyan m -ed fokú polinom, melynek a főegyütthatója 1.

1. Ha $n \geq m$, akkor létezik egyetlen olyan $\bar{P}(x)$ ($n - m$ -ed fokú- és m -nél kisebb fokú $\tilde{P}(x)$ polinom, hogy

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \bar{P}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)} \quad (7.47)$$

teljesül.

2. A Q_m polinomhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott $(\lambda_i)_{i=1,\dots,k}$, $(p_i, q_i)_{i=1,\dots,l}$ páronként különböző valós számok és számpárok, valamint $(z_i)_{i=1,\dots,k}$, $(v_i)_{i=1,\dots,l}$ természetes számok, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$Q_m(x) = \left(\prod_{i=1}^k (x + \lambda_i)^{z_i} \right) \left(\prod_{i=1}^l (x^2 + p_i x + q_i)^{v_i} \right) \quad (7.48)$$

teljesül, továbbá egyetlen $1 \leq i \leq l$ esetén sem létezik valós gyöke az $x^2 + p_i x + q_i$ polinomnak. Ha $n < m$, akkor egyértelműen léteznek olyan $(\mu_{ij})_{i=1,\dots,k; j=1,\dots,z_i}$, $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})_{i=1,\dots,l; j=1,\dots,v_i}$ valós számok, hogy

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{z_i} \frac{\mu_{ij}}{(x + \lambda_i)^j} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{v_i} \frac{\alpha_{ij} x + \beta_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j} \quad (7.49)$$

teljesül minden $x \in \text{Dom} \frac{P_n}{Q_m}$ elemre.

8 Határozott integrál

8.1. A majdnem mindenütt tulajdonság

8.1. Definíció. Az \mathbb{R} korlátos intervallumainak a halmazát jelölje

$$\mathfrak{J}_0 \triangleq \bigcup_{\substack{a, b \in \mathbb{R} \\ a \leq b}} \{[a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[\}, \quad (8.1)$$

és az \mathfrak{J}_0 halmazban szereplő intervallumok *hossza* legyen

$$\mu_0 : \mathfrak{J}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad [a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[\mapsto b - a. \quad (8.2)$$

Adott $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ esetén sokszor fogjuk tekinteni az a és b pontok által meghatározott intervallumokat. Azokban az esetekben, mikor mondanivalónk érvényes az $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ és $]a, b[$ intervallumok mindegyikére, az $\lambda a, b\lambda$ szimbólummal fogunk élni.

8.1. Tétel. Ha $A_1, A_2 \in \mathfrak{J}_0$ olyan halmazok, melyre $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ teljesül, akkor $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{J}_0$ és

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) \leq \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2). \quad (8.3)$$

Bizonyítás. Legyen $A_1 = \lambda a_1, b_1\lambda$ és $A_2 = \lambda a_2, b_2\lambda$.

Ha $b_1 = a_2$, akkor az $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ feltétel miatt $A_1 = \lambda a_1, b_1]$ és $A_2 = [a_2, b_2\lambda$, tehát $A_1 \cup A_2 = \lambda a_1, b_2\lambda \in \mathfrak{J}_0$, továbbá

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) = b_2 - a_1 = b_2 - a_2 + b_1 - a_1 = \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2). \quad (8.4)$$

Ha $b_1 > a_2$, akkor $A_1 \cup A_2 = \lambda \min\{a_1, a_2\}, \max\{b_1, b_2\}\lambda \in \mathfrak{J}_0$, továbbá

$$\mu_0(A_1 \cup A_2) = \max\{b_1, b_2\} - \min\{a_1, a_2\} \leq b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = \mu_0(A_1) + \mu_0(A_2), \quad (8.5)$$

ahol felhasználtuk az $a_1 \leq b_1$ és $a_2 \leq b_2$ egyenlőtlenséget.

8.2. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *Lebesgue nulla mértékű*, vagy rövidebben *nulla mértékű*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan \mathfrak{J}_0 -ban haladó $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(A_i) < \varepsilon. \quad (8.6)$$

8.2. Tétel. (Nulla mértékű halmazok alaptulajdonságai.)

1. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor nulla mértékű, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan \mathfrak{J}_0 -ban haladó nyílt halmazokból álló $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \varepsilon \quad (8.7)$$

teljesül.

2. Nulla mértékű halmaz minden részhalmaza nulla mértékű.

3. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű, akkor $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ is nulla mértékű.

4. Minden megszámlálható halmaz nulla mértékű.

Bizonyítás. 1. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \in \mathfrak{J}_0$,

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (8.8)$$

teljesül. Legyen

$$N_p = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists c_n \in \mathbb{R} : A_n = \{c_n\}\} \quad (8.9)$$

$$N_r = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists a_n, b_n \in \mathbb{R} : a_n < b_n \wedge A_n =]a_n, b_n[\}. \quad (8.10)$$

Ekkor $N_p \cap N_r = \emptyset$ és $N_p \cup N_r = \mathbb{N}$. Minden $n \in N_r$ számhoz létezik olyan $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, hogy $A_n =]a_n, b_n[$ teljesül, ekkor legyen

$$U_n = \left] \frac{3a_n - b_n}{2}, \frac{3b_n - a_n}{2} \right[. \quad (8.11)$$

Az $U_n \in \mathfrak{J}_0$ halmaz nyilván nyílt, $A_n \subseteq U_n$ és $\mu_0(U_n) = 2\mu_0(A_n)$. Minden $n \in N_p$ számhoz létezik olyan $c_n \in \mathbb{R}$, hogy $A_n = \{c_n\}$ teljesül, ekkor legyen

$$U_n = \left] c_n - \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2^n}, c_n + \frac{\varepsilon}{8 \cdot 2^n} \right[. \quad (8.12)$$

Az $U_n \in \mathfrak{J}_0$ halmaz nyilván nyílt, $A_n \subseteq U_n$ és $\mu_0(U_n) = \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n}$. Az így definiált nyílt halmazokból álló $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszerre

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \quad \text{és} \quad (8.13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(U_n) = \sum_{n \in N_r} \mu_0(U_n) + \sum_{n \in N_p} \mu_0(U_n) < 2 \sum_{n \in N_r} \mu_0(A_n) + \sum_{n \in N_p} \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n} \leq \quad (8.14)$$

$$\leq 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_0(A_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^n} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (8.15)$$

teljesül.

2. A definíció alapján nyilvánvaló.

3. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nulla mértékű halmaz és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $n \in \mathbb{N}$ paraméterhez tartozó A_n halmaz nulla mértékű, ezért létezik olyan $(U_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $U_{n,i} \in \mathfrak{J}_0$, $A_n \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{n,i}$ és $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(U_{n,i}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Legyen

$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tetszőleges bijekció. Ekkor

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{n,i} = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_{\sigma(k)}, \quad (8.16)$$

valamint

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(U_{\sigma(k)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(U_{n,i}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon. \quad (8.17)$$

4. Mivel az egy elemű halmaz nulla mértékű, ezért az előző pont alapján nyilvánvaló.

8.3. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ekkor az $[a, b]$, $[a, b[,]a, b]$, $]a, b[$ halmazok közül egyik sem nulla mértékű.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és ehhez definiáljuk az $\alpha = \frac{3a+b}{4}$ és $\beta = \frac{a+3b}{4}$ számokat. Mivel

$$[\alpha, \beta] \subseteq [a, b], [a, b[,]a, b],]a, b[, \quad (8.18)$$

ezért elég igazolni, hogy $[\alpha, \beta]$ nem nulla mértékű. Indirekt, tegyük fel, hogy $[\alpha, \beta]$ nulla mértékű. Ekkor az 8.2 tétel alapján létezik olyan $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nyílt halmazokból álló halmazrendszer, melyre

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(U_n) < \frac{\beta - \alpha}{2} \quad (8.19)$$

teljesül, továbbá feltehetjük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[\alpha, \beta] \cap U_n \neq \emptyset$, hiszen egyébként kihagyhatjuk az $[\alpha, \beta]$ halmaz lefedéséből. Mivel az $[\alpha, \beta]$ halmaz kompakt, ezért véges sok nyílt halmazzal is lefedhető, vagyis létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{n=0}^N U_n. \quad (8.20)$$

Ezek után tekintsük az alábbi konstrukciót.

– Mivel $\alpha \in \bigcup_{n=0}^N U_n$, ezért létezik olyan $r_0 \in \{0, \dots, N\}$ szám, melyre $\alpha \in U_{r_0}$ teljesül, és legyen $L_0 = U_{r_0}$.

– Ha már valamilyen $i \in \mathbb{N}$ esetén r_i és L_i definiált, akkor ha $\beta < \sup L_i$ teljesül, akkor ne definiáljunk több elemet, ha pedig $\beta \geq \sup L_i$, akkor a

$$\sup L_i \in \left(\bigcup_{n=0}^N U_n \right) \setminus \left(\bigcup_{k=0}^i U_{r_k} \right) \quad (8.21)$$

tartalmazás miatt létezik olyan $m \in \{0, \dots, N\} \setminus \{r_k \mid k = 0, \dots, i\}$ elem, melyre $\sup L_i \in U_m$ teljesül. Ekkor legyen $r_{i+1} = m$ és legyen $L_{i+1} = L_i \cup U_{r_{i+1}}$.

Tegyük fel, hogy a fenti konstrukcióval $M+1$ elemet definiáltunk, vagyis ismert az $(L_i)_{i \in \{0, \dots, M\}}$ halmazrendszer. A konstrukció miatt $[\alpha, \beta] \subseteq L_M$ teljesül, valamint minden $i \in \{0, \dots, M-1\}$ esetén $L_i \cap U_{r_{i+1}} \neq \emptyset$, tehát a 8.1 tétel miatt $L_{i+1} = L_i \cup U_{r_{i+1}} \in \mathfrak{I}_0$ és

$$\mu_0(L_{i+1}) = \mu_0(L_i \cup U_{r_{i+1}}) \leq \mu_0(L_i) + \mu_0(U_{r_{i+1}}) \quad (8.22)$$

teljesül. Ebből az

$$\beta - \alpha = \mu_0([\alpha, \beta]) \leq \mu_0(L_M) \leq \sum_{k=0}^M \mu_0(U_{r_k}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu_0(U_k) < \frac{\beta - \alpha}{2} \quad (8.23)$$

ellentmondás adódik.

8.3. Definíció. A

$$C \triangleq [0, 1] \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{3^m-1} \left[\frac{3k+1}{3^{m+1}}, \frac{3k+2}{3^{m+1}} \right] \quad (8.24)$$

halmazt *Cantor-halmaznak* nevezzük.

8.4. Tétel. (A Cantor-halmaz tulajdonságai.) A Cantor-halmaz kompakt és nulla mértékű.

Bizonyítás. 1. A Cantor-halmaz korlátos és zárt, tehát kompakt.
2. Definiáljuk rekurzív módon a

$$\rho : \mathcal{P}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{P}([0, 1]) \quad J \mapsto \left(\frac{1}{3}J\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}J\right) \quad (8.25)$$

leképezéssel és az $I_0 = [0, 1]$ kezdőelemmel az $n \mapsto I_n$ sorozatot, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $I_{n+1} = \rho(I_n)$. Ha $J \in \mathcal{P}([0, 1])$ az \mathcal{I}_0 halmaz véges sok elemének az uniója, akkor $\rho(I)$ is ilyen tulajdonságú, vagyis mindegyik I_n halmaz véges sok intervallum uniója. A ρ definíciója alapján minden $i \in \mathbb{N}$ elemre $\mu_0(I_{n+1}) = \frac{2}{3}\mu_0(I_n)$ is teljesül, vagyis $\mu_0(I_0) = 1$ miatt $\mu_0(I_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Rövid számolással igazolható, hogy minden $i \in I$ esetén $C \subseteq I_n$ teljesül, ahol C jelöli a Cantor-halmazt. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, ezért minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$, és ekkor I_n intervallumoknak olyan véges rendszere, melyre

$$C \subseteq \cup I_n \quad \text{és} \quad \sum_{J \in I_n} \mu_0(J) < \varepsilon. \quad (8.26)$$

8.4. Definíció. Legyen minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $p(x)$ egy-egy igaz vagy hamis formula. Azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* $p(x)$, ha az $\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \text{ hamis}\}$ halmaz nulla mértékű. Ezt úgy rövidítjük, hogy m.m. p .

8.5. Tétel. Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényre m.m. $f = 0$ teljesül, akkor $f = 0$.

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ majdnem mindenütt nulla folytonos függvény, és tegyük fel, hogy létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ pont, melyre $f(a) \neq 0$. Ekkor a folytonosság miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in]a - \delta, a + \delta[$ pontra $|f(x)| \geq \frac{|f(a)|}{2}$. Mivel a $]a - \delta, a + \delta[$ halmaz a 8.3 tétel alapján nem nulla mértékű, ezért a

$$]a - \delta, a + \delta[\subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\} \quad (8.27)$$

a tartalmazás miatt az $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ halmaz sem lehet nulla mértékű.

8.2. A Riemann-integrál

8.5. Definíció. Az $[a, b]$ korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ szám n -est értünk melyre $x_0 = a$, $x_n = b$, és minden $0 \leq i \leq n - 1$ esetén $x_i < x_{i+1}$ teljesül. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}^{[a, b]}$ jelöli, azaz

$$\mathcal{F}^{[a, b]} = \left\{ x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}(n, [a, b]) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, x_0 = a, x_{n-1} = b, \forall i \in (n-1) : x_i < x_{i+1} \right\}. \quad (8.28)$$

Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás *finomabb*, mint az $y \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás, ha $\text{Ran } y \subseteq \text{Ran } x$, melyet az $y \leq x$ szimbólummal jelölünk.

Vagyis az $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás pontosan akkor finomabb, mint az $y = (y_0, \dots, y_m) \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás, ha

$$\{y_0, \dots, y_m\} \subseteq \{x_0, \dots, x_n\} \quad (8.29)$$

teljesül, és ezt az $y \leq x$ vagy másképp a $(y_i)_{i=0, \dots, m} \leq (x_i)_{i=0, \dots, n}$ szimbólummal jelöljük.

8.6. Definíció. Legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\dots,m}$ az $[a, b]$ korlátos intervallum egy-egy felosztása. Legyen

$$L = \{x_i \mid 0 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \mid 0 \leq i \leq m\}, \quad k = |L| - 1, \quad (8.30)$$

és definiáljuk a $(z_i)_{i=0,\dots,k}$ számokat az alábbi rekurzióval.

- Legyen $z_0 = a$.
- Ha z_i ismert és $i < k$, akkor legyen

$$z_{i+1} = \min(L \setminus \{z_0, \dots, z_i\}). \quad (8.31)$$

Ekkor a $z = (z_i)_{i=0,\dots,k}$ felosztást az x és az y felosztás egyesítésének nevezzük és a $z = x \sqcup y$ szimbólummal jelöljük.

8.7. Definíció. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény és $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ egy felosztás. Ekkor az f függvény $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege

$$s_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i), \quad (8.32)$$

és felső közelítő összege

$$S_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i). \quad (8.33)$$

Továbbá definiáljuk az alsó- és felső közelítő összegek értékeinek a halmazát.

$$s(f) = \left\{ s_x(f) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\} \quad (8.34)$$

$$S(f) = \left\{ S_x(f) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\} \quad (8.35)$$

8.6. Tétel. Minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény esetén az

1. Minden $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_x(f) \leq S_x(f)$.
2. Ha z jelöli az $[a, b]$ intervallum triviális felosztását, azaz $z = (a, b)$, akkor minden más $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén $s_z(f) \leq s_x(f)$ és $S_x(f) \leq S_z(f)$.
3. Ha az $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $x \leq y$ teljesül, akkor $s_x(f) \leq s_y(f)$ és $S_y(f) \leq S_x(f)$.
4. Bármely $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $s_x(f) \leq S_y(f)$ teljesül.
5. Az $s(f)$ halmaz felülről korlátos, valamint az $S(f)$ halmaz alulról korlátos.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, jelölje z a $z_0 = a$ és $z_1 = b$ triviális felosztást továbbá legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\dots,m}$ az $[a, b]$ intervallum olyan felosztása, melyre $x \leq y$ teljesül.

1. A definíció alapján nyilvánvaló.
2. Az $s_z(f) \leq s_x(f)$ egyenlőtlenséget

$$s_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [a,b]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) = \quad (8.36)$$

$$= \left(\inf_{t \in [a,b]} f(t) \right) (b - a) = s_z(f) \quad (8.37)$$

igazolja, ehhez hasonlóan mutatható meg, hogy $S_x(f) \leq S_z(f)$ teljesül.

3. Tegyük fel, hogy az x felosztást oly módon finomítjuk, hogy valamely $j \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén az $[x_j, x_{j+1}]$ szakasz belsejéből hozzáveszünk még egy c osztópontot. Jelölje x' az így kapott felosztást. Mivel

$$\left(\inf_{t \in [x_j, c]} f(t) \right) (c - x_j) + \left(\inf_{t \in [c, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) \geq \quad (8.38)$$

$$\geq \left(\inf_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\inf_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j) \quad (8.39)$$

$$\left(\sup_{t \in [x_j, c]} f(t) \right) (c - x_j) + \left(\sup_{t \in [c, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) \leq \quad (8.40)$$

$$\leq \left(\sup_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\sup_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j), \quad (8.41)$$

ezért $s_x(f) \leq s_{x'}(f)$ és $S_x(f) \geq S_{x'}(f)$.

Mivel az y felosztást megkaphatjuk az x felosztásból véges sok új osztópont hozzávételével, ezért $s_x(f) \leq s_y(f)$ és $S_x(f) \geq S_y(f)$ teljesül.

4. Legyen x, y tetszőleges felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, és tekintsük a $z = x \sqcup y$ felosztást. Ekkor $x \leq z$ és $y \leq z$, amiből az előző pont alapján $s_x(f) \leq s_z(f)$ és $S_z(f) \leq S_y(f)$ adódik. Mivel az 1. pont alapján $s_z(f) \leq S_z(f)$, ezért $s_x(f) \leq S_y(f)$.

5. Mivel minden x felosztásra $z \leq x$ teljesül, ezért

$$s_z(f) \leq s_x(f) \leq S_x(f) \leq S_z(f), \quad (8.42)$$

ami igazolja, hogy az $s(f)$ halmaz felülről, az $S(f)$ halmaz pedig alulról korlátos.

8.8. Definíció. Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény

- alsó integráljának nevezzük a $\sup s(f)$ mennyiséget, melynek jele $\int_a^b f$;
- felső integráljának nevezzük a $\inf S(f)$ mennyiséget, melynek jele $\int_a^b f$;
- Riemann-integrálható, ha $\int_a^b f = \int_a^b f$, ekkor $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x) dx$ jelöli az $\int_a^b f = \int_a^b f$ értéket.

Továbbá bevezetjük az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis

$$\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \triangleq \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ korlátos és Riemann-integrálható}\}. \quad (8.43)$$

- Ha $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor bevezetjük a

$$\int_b^a f \triangleq - \int_a^b f \quad (8.44)$$

jelölést.

- Továbbá minden $a \in \mathbb{R}$ pontra, és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $a \in \text{Dom } f$ esetén legyen

$$\int_a^a f \triangleq 0. \quad (8.45)$$

- Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, valamint $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor a $\int_a^b f$ és a $\int_b^a f$ mennyiséget az f függvény határozott integráljának nevezzük.

8.7. Tétel. Minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f \quad (8.46)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Azt kell megmutatni, hogy $\alpha \leq \beta$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\beta < \alpha$. Ekkor legyen $\varepsilon = \alpha - \beta$. Legyen x és y az a felosztás, melyre $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f)$ és $S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel a 8.6 tétel szerint minden x, y felosztás esetén $s_x(f) \leq S_y(f)$, ezért

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (8.47)$$

vagyis $\alpha - \beta < \varepsilon$, ami lehetetlen, hiszen $\alpha - \beta = \varepsilon$.

8.3. A Riemann-integrálhatóság kritériumai

Ebben a fejezetben először csak elégséges feltételeket adunk függvények Riemann-integrálhatóságára. A fejezet végén közelebbről is megvizsgáljuk a Riemann-integrálhatóságra vonatkozó Lebesgue-tételt, mely szükséges és elégséges feltételt ad korlátos függvény Riemann-integrálhatóságára.

8.8. Tétel. Minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a, b]} : S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon. \quad (8.48)$$

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $c = \int_a^b f$, valamint $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan x, y felosztása az $[a, b]$ halmaznak, melyre

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \quad S_y < c + \frac{\varepsilon}{2} \quad (8.49)$$

teljesül. Legyen $z = x \sqcup y$. Mivel $x \leq z$ és $y \leq z$, ezért $s_x(f) \leq s_z(f)$ és $S_z(f) \leq S_y(f)$, vagyis

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq s_z(f) \leq c \quad (8.50)$$

$$c \leq S_z(f) \leq S_y \leq c + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (8.51)$$

ezért

$$c - c \leq S_z(f) - s_z(f) < c + \frac{\varepsilon}{2} - \left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon. \quad (8.52)$$

Ezzel igazoltuk az állítás egyik irányú következtetését.

Most tegyük fel, hogy f olyan függvény, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Megmutatjuk, hogy $\alpha = \beta$. A 8.7 tétel alapján $\alpha \leq \beta$.

Tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$. Ekkor legyen $\varepsilon = \beta - \alpha$. A feltételezésünk alapján ehhez a ε paraméterhez létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Ekkor

$$\beta \leq S_x(f) < s_x(f) + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon, \quad (8.53)$$

vagyis a $\varepsilon = \beta - \alpha < \varepsilon$ ellentmondást kapjuk.

Mivel $\alpha \leq \beta$ és $\alpha < \beta$ lehetetlen, ezért $\alpha = \beta$, ami azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

8.9. Definíció. A korlátos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *oszcillációja*

$$\omega(f, [a, b]) \triangleq \left(\sup_{t \in [a, b]} f(t) \right) - \left(\inf_{t \in [a, b]} f(t) \right). \quad (8.54)$$

Az f függvény $x = (x_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztáshoz tartozó *oszcillációs összege*

$$\Omega_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i). \quad (8.55)$$

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden korlátos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $x \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás esetén

$$\Omega_x(f) = S_x(f) - s_x(f) \quad (8.56)$$

teljesül.

8.9. Tétel. Minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a, b]} : \Omega_x(f) < \varepsilon. \quad (8.57)$$

Bizonyítás. A 8.8 tétel alapján nyilvánvaló.

8.10. Tétel. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor

$$\omega(f, [a, b]) = \sup_{u, v \in [a, b]} |f(u) - f(v)| \quad (8.58)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, és legyen

$$\alpha = \sup_{u, v \in [a, b]} |f(u) - f(v)|, \quad (8.59)$$

$$\beta = \omega(f, [a, b]) = \sup_{u \in [a, b]} f(u) - \inf_{v \in [a, b]} f(v). \quad (8.60)$$

1. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $u_0, v_0 \in [a, b]$, melyre

$$\sup_{u \in [a, b]} f(u) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(u_0) \quad \text{és} \quad \inf_{v \in [a, b]} f(v) + \frac{\varepsilon}{2} \geq f(v_0) \quad (8.61)$$

teljesül. Ekkor

$$\sup_{u \in [a, b]} f(u) - \inf_{v \in [a, b]} f(v) - \varepsilon \leq f(u_0) - f(v_0), \quad (8.62)$$

tehát

$$\beta - \varepsilon \leq f(u_0) - f(v_0) \leq \sup_{u,v \in [a,b]} |f(u) - f(v)| = \alpha. \quad (8.63)$$

2. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $u_0, v_0 \in [a, b]$, melyre

$$\alpha - \varepsilon \leq |f(u_0) - f(v_0)|. \quad (8.64)$$

Ha $f(u_0) \geq f(v_0)$, akkor legyen $u_1 = u_0$ és $v_1 = v_0$, valamint, ha $f(u_0) < f(v_0)$, akkor legyen $u_1 = v_0$ és $v_1 = u_0$. Ezzel elértük, hogy

$$f(u_1) - f(v_1) = |f(u_0) - f(v_0)| \quad (8.65)$$

teljesül. Vagyis létezik olyan $u_1, v_1 \in [a, b]$, melyre

$$\alpha - \varepsilon \leq f(u_1) - f(v_1), \quad (8.66)$$

ebből pedig

$$\alpha - \varepsilon \leq f(u_1) - f(v_1) \leq \sup_{u \in [a,b]} f(u) - \inf_{v \in [a,b]} f(v) = \beta \quad (8.67)$$

következik.

3. Mivel minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterre az eddigiek alapján fennáll az

$$\alpha - \varepsilon \leq \beta \leq \alpha + \varepsilon \quad (8.68)$$

egyenlőtlenség, ezért $\alpha = \beta$.

8.11. Tétel. Minden $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $f + g, cf, fg \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, vagyis az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ algebra, valamint

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f \quad \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g) \quad (8.69)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, melyre

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{4} < s_x(f) \leq S_x(f) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{4} \quad (8.70)$$

$$\int_a^b g - \frac{\varepsilon}{4} < s_y(g) \leq S_y(g) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{4} \quad (8.71)$$

teljesül. A továbbiakban felhasználjuk, hogy bármely $z = (z_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás esetén

$$s_z(f) + s_z(g) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} f(t) + \inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} g(t) \right) (z_{i+1} - z_i) \leq \quad (8.72)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} (f(t) + g(t)) \right) (z_{i+1} - z_i) = s_z(f + g) \quad (8.73)$$

$$S_z(f) + S_z(g) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} f(t) + \sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} g(t) \right) (z_{i+1} - z_i) \geq \quad (8.74)$$

$$\geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} (f(t) + g(t)) \right) (z_{i+1} - z_i) = S_z(f + g). \quad (8.75)$$

Legyen $z = x \sqcup y$, azaz z az x és az y felosztás egyesítése, ekkor az

$$s_x(f) + s_x(g) \leq s_x(f + g) \leq s_z(f + g) \leq S_z(f + g) \leq S_y(f + g) \leq S_y(f) + S_y(g) \quad (8.76)$$

egyenlőtlenségek miatt

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} < s_z(f + g) \leq S_z(f + g) < \int_a^b f + \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (8.77)$$

vagyis $\Omega_z(f + g) < \varepsilon$. Ez pedig a 8.9 tétel alapján azt jelenti, hogy $f + g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Továbbá a fenti egyenlőtlenség alapján

$$\sup s(f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{és} \quad \inf S(f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \quad (8.78)$$

teljesül, vagyis

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \quad (8.79)$$

A számmal való szorzásra vonatkozó szabály egyszerűen igazolható a definíció alapján.

Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre minden $t \in [a, b]$ esetén $|f(t)| < K$ teljesül. Ekkor minden $u, v \in [a, b]$ elemre

$$|f^2(u) - f^2(v)| = |f(u) + f(v)| \cdot |f(u) - f(v)| \leq 2K \cdot |f(u) - f(v)|. \quad (8.80)$$

Vagyis bármely $x = (x_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztásra a 8.10 tétel alapján

$$\Omega_x(f^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f^2, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \quad (8.81)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} |f^2(u) - f^2(v)| \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \quad (8.82)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| \right) \cdot 2K \cdot (x_{i+1} - x_i) = 2K \Omega_x(f) \quad (8.83)$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f^2 \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Ha $g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor az $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ egyenlőség alapján $fg \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ teljesül.

8.12. Tétel. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$, valamint ebben az esetben

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad (8.84)$$

Bizonyítás. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

1. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a, c]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x' felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_{x'}(f) < \varepsilon$. Legyen x_0 az x' és az (a, c, b) felosztás egyesítése. Ekkor $x' \leq x_0$, ezért a 8.6 tétel alapján

$$s_{x'}(f) \leq s_{x_0}(f) \quad \text{és} \quad S_{x'}(f) \geq S_{x_0}(f), \quad (8.85)$$

vagyis

$$\Omega_{x_0}(f) = S_{x_0}(f) - s_{x_0}(f) \leq S_{x'}(f) - s_{x'}(f) = \Omega_{x'}(f) < \varepsilon. \quad (8.86)$$

Ha az $x_0 = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztásból csak azokat az x_i pontokat hagyjuk meg, melyekre $x_i \leq c$ teljesül, akkor az $[a, c]$ intervallumnak kapjuk x egy felosztását, melyre $\Omega_x(f) \leq \Omega_{x'}(f) < \varepsilon$ teljesül.

A fenti gondolatmenethez hasonlóan igazolható, hogy az f függvény Riemann-integrálható a $[c, b]$ intervallumon is.

2. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$. Legyen $\alpha = \int_a^c f$ és $\beta = \int_c^b f$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) < \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2} \quad (8.87)$$

teljesül.

Ebből ugyanis egyrészt $\Omega_I(f) < \varepsilon$ következik, vagyis $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, másrészt $\int_a^b f = \alpha + \beta$ adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_1 felosztása az $[a, c]$ intervallumnak, melyre

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_1}(f) \leq S_{x_1}(f) < \alpha + \frac{\varepsilon}{4} \quad (8.88)$$

teljesül, és mivel $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_2 felosztása a $[c, b]$ intervallumnak, melyre

$$\beta - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_2}(f) \leq S_{x_2}(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (8.89)$$

Legyen x az x_1 és x_2 felosztások osztópontjainak az egyesítéséből nyert felosztása az $[a, b]$ intervallumnak. Ekkor a közelítő összegek definíciója alapján

$$s_x(f) = s_{x_1}(f) + s_{x_2}(f) \quad \text{és} \quad S_x(f) = S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f), \quad (8.90)$$

vagyis a fenti egyenlőtlenségek összeadásából

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) < \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2} \quad (8.91)$$

adódik.

8.13. Tétel. Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számra $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Mivel f folytonos függvény és $[a, b]$ kompakt halmaz, ezért a 5.23 Heine-tétel alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $u, v \in [a, b]$ számra

$$|u - v| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \quad (8.92)$$

Legyen $n = \left\lceil \frac{b-a}{\delta} \right\rceil + 1$, és minden $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén legyen

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \quad (8.93)$$

és jelölje x az $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztást. Ekkor a 8.10 tétel alapján

$$\Omega_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \quad (8.94)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) < \quad (8.95)$$

$$< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} = \varepsilon. \quad (8.96)$$

8.14. Tétel. *Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Ha $f(b) = f(a)$, akkor a függvény állandó, tehát folytonossága miatt integrálható. Ezért feltesszük, hogy $f(a) < f(b)$.

Legyen $c \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter, és vegyünk egy olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztást, melyre minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_{i+1} - x_i < c$ teljesül. (Ilyen felosztás létezik, hiszen ehhez hasonlókat konstruáltunk a 8.13 tétel bizonyításában.) Ekkor

$$\Omega_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) - \inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \quad (8.97)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \cdot c = c(f(b) - f(a)) \quad (8.98)$$

teljesül, vagyis ha $c = \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))}$ paraméterhez választjuk meg a felosztást, akkor $\Omega_x(f) < \varepsilon$.

8.15. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor $|f| \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Mivel minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|, \quad (8.99)$$

ezért minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ indexre a 8.10 tétel alapján

$$\omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) = \sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} ||f(u)| - |f(v)|| \leq \sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| = \omega(f, [x_i, x_{i+1}]). \quad (8.100)$$

Ebből pedig

$$\Omega_x(|f|) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \Omega_x(f) < \varepsilon \quad (8.101)$$

adódik, amiből $|f| \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ következik.

8.16. Tétel. Minden $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ függvényre

1. ha $f \geq 0$, akkor $\int_a^b f \geq 0$;
2. ha $f \geq g$, akkor $\int_a^b f \geq \int_a^b g$;
3. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

1. Ha $f \geq 0$, akkor az $[a, b]$ intervallum bármely I felosztása esetén $s_I(f), S_I(f) \geq 0$, ezért a közös határértékükre is $\int_a^b f \geq 0$ teljesül.

2. Ha $f \geq g$, akkor a $h = f - g$ függvényre $h \geq 0$ teljesül, valamint h a 8.11 tétel értelmében szintén Riemann-integrálható, és

$$\int_a^b h = \int_a^b f - \int_a^b g. \quad (8.102)$$

A tétel 1. pontja alapján $\int_a^b h \geq 0$, ezért $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

3. Mivel $f \leq |f|$, ezért a 2. pont alapján $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Továbbá a $-|f| \leq f$ egyenlőtlenség miatt $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f$. Ezek alapján $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

8.17. Tétel. (Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $F \in C([a, b], \mathbb{R})$ olyan függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon, és itt $F' = f$. Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \quad (8.103)$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, $F \in C([a, b], \mathbb{R})$ legyen olyan függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon, és itt $F' = f$ teljesül rá, valamint tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy tetszőleges $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztását. Minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén alkalmazzuk az F függvényre a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon. Ekkor azt kapjuk, hogy létezik olyan $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ szám, melyre

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (8.104)$$

teljesül. Ezeket az egyenleteket összeadva

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (8.105)$$

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (8.106)$$

adódik. Mivel $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén

$$\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \leq f(c_i) \leq \sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t), \quad (8.107)$$

ezért

$$s_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) (x_{i+1} - x_i) = \quad (8.108)$$

$$= F(b) - F(a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \right) (x_{i+1} - x_i) = S_x(f). \quad (8.109)$$

Tehát minden x felosztásra

$$s_x(f) \leq F(b) - F(a) \leq S_x(f) \quad (8.110)$$

teljesül, amiből f integrálhatósága miatt $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ következik.

8.18. Tétel. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon, akkor

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'. \quad (8.111)$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon. Ekkor f' folytonos az $[a, b]$ halmazon, tehát $f' \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és innen már a 8.17 Newton–Leibniz-tétel alapján következik az állítás.

8.10. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ függvény *integrálfüggvénye*

$$I_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_a^x f. \quad (8.112)$$

8.19. Tétel. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

1. Az I_f függvény folytonos.
2. Ha f folytonos az $x_0 \in]a, b[$ pontban, akkor I_f differenciálható az x_0 pontban és $I'_f(x_0) = f(x_0)$.
3. Ha $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, akkor létezik primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, $x_0 \in]a, b[$ és jelölje I_f az f integrálfüggvényét. Mivel f korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $|f(x)| < K$.

1. Legyen $x, y \in [a, b]$. Ekkor a 8.12 tétel alapján

$$I_f(x) - I_f(y) = \int_a^x f - \int_a^y f = \int_y^x f, \quad (8.113)$$

vagyis felhasználva a 8.16 tételt

$$|I_f(x) - I_f(y)| < K |x - y| \quad (8.114)$$

adódik, amiből az $y \rightarrow x$ határértékkel kapjuk az

$$\lim_x I_f = I_x \quad (8.115)$$

egyenletet, ami az I_f függvény x pontbeli folytonosságát garantálja.

2. Tegyük fel, hogy f folytonos az x_0 pontban és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\forall z \in [a, b] : |z - x_0| < \delta \quad \rightarrow \quad |f(z) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (8.116)$$

Tegyük fel, hogy $z \in]x_0, x_0 + \delta[\cap [a, b]$. Ekkor a 8.12 tétel és a fenti egyenlőtlenség alapján

$$I_f(z) - I_f(x_0) = \int_a^z f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^z f \quad (8.117)$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)(z - x_0) \leq \int_{x_0}^z f \leq (f(x_0) + \varepsilon)(z - x_0), \quad (8.118)$$

melyek kombinációjából

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon \quad (8.119)$$

adódik. Vagyis

$$\lim_{z \rightarrow x_0+0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0). \quad (8.120)$$

Teljesen hasonlóan igazolható, hogy az x_0 pontban vett bal oldali határérték is létezik és értéke $f(x_0)$. Tehát

$$I'_f(x_0) = \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0). \quad (8.121)$$

3. Ha f folytonos, akkor a 2. pont alapján I_f az f egy primitív függvénye.

8.20. Tétel. (Lebesgue-tétel.) Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha majdnem mindenütt folytonos.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, és legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre minden $x \in [a, b]$ számra $|f(x)| < K$ teljesül.

1. Az, hogy az f függvény nem folytonos az $x \in [a, b]$ pontban azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists y \in [a, b] : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \quad (8.122)$$

Mivel minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\varepsilon > \frac{1}{n}$ teljesül, ezért az, hogy az f függvény nem folytonos az $x \in [a, b]$ pontban az

$$\exists n \in \mathbb{N}^+ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists y \in [a, b] : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \frac{1}{n}. \quad (8.123)$$

alakban is felírható. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$D_n = \left\{ x \in [a, b] \mid \forall \delta > 0 \exists y \in [a, b] : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \frac{1}{n} \right\}, \quad (8.124)$$

valamint legyen $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Ekkor $x \in D$ pontosan akkor teljesül, ha f nem folytonos az x pontban.

2. Ha f majdnem mindenütt folytonos, akkor a D halmaz nulla mértékű, ezért a 8.2 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a D_n halmaz is nulla mértékű. Fordítva, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a D_n halmaz nulla mértékű, akkor a 8.2 tétel alapján D is nulla mértékű. Tehát elég az alábbi következtetéseket igazolni.

$$D \text{ nulla mértékű} \rightarrow f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ : D_n \text{ nulla mértékű} \quad (8.125)$$

3/a. Tegyük fel, hogy a D halmaz nulla mértékű, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 8.2 tétel alapján létezik olyan $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nyílt intervallumokból álló halmazrendszer, melyre

$$D \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < \varepsilon' \quad (8.126)$$

teljesül. Ha $z \in [a, b] \setminus D$, akkor az f függvény folytonos az z pontban, vagyis létezik olyan $\delta_z \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy

$$\forall y \in]z - \delta_z, z + \delta_z[\cap [a, b] : |f(z) - f(y)| < \varepsilon' \quad (8.127)$$

teljesül. Ekkor

$$[a, b] \subseteq D \cup ([a, b] \setminus D) \subseteq \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{z \in [a, b] \setminus D}]z - \delta_z, z + \delta_z[\right) \quad (8.128)$$

az $[a, b]$ kompakt halmaz egy nyílt halmazokkal való lefedését adja meg, melyből kiválasztható véges sok, mely szintén lefedi az $[a, b]$ halmazt. Tehát létezik olyan $F \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz és véges sok $z_1, \dots, z_m \in [a, b] \setminus D$ pont, melyre

$$[a, b] \subseteq \left(\bigcup_{n \in F} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^m]z_i - \delta_{z_i}, z_i + \delta_{z_i}[\right) \quad (8.129)$$

teljesül.

3/b. Most elkészítjük ezen lefedés végpontjai által meghatározott felosztást. Ehhez legyen

$$\mathcal{G}' = \left(\bigcup_{n \in F} \{\inf A_n, \sup A_n\} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^m \{z_i - \delta_{z_i}, z_i + \delta_{z_i}\} \right) \cup \{a, b\}, \quad (8.130)$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cap [a, b], \quad (8.131)$$

és az alábbi rekurzióval definiáljunk egy sorozatot.

- Legyen $x_0 = a$ és $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \setminus \{x_0\}$.
- Ha valamilyen $i \in \mathbb{N}$ esetén x_i és \mathcal{G}_i már definiált és $x_i < b$, akkor legyen $x_{i+1} = \min \mathcal{G}_i$ és $\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i \setminus \{x_{i+1}\}$, ha pedig $x_i = b$, akkor legyen vége a sorozatnak.

Mivel a véges elemszámú \mathcal{G} halmazból válogatunk elemeket így egy véges hosszúságú $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ sorozatot kapunk, mely egy felosztása az $[a, b]$ intervallumnak.

3/c. Az x felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget két részre bontjuk, az egyikben az intervallumok hossza kicsi, a másikban az oszcillációs összeg kicsi. Ehhez definiáljuk a

$$J_1 = \{j \in \{0, \dots, n-1\} \mid \exists n \in F :]x_j, x_{j+1}[\subseteq A_n\} \quad (8.132)$$

$$J_2 = \{j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus J_1 \mid \exists i \in \{1, \dots, m\} :]x_j, x_{j+1}[\subseteq]z_i - \delta_{z_i}, z_i + \delta_{z_i}[\} \quad (8.133)$$

indexhalmazt. Nyilván $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ és $J_1 \cup J_2 \subseteq \{0, \dots, n-1\}$. Megmutatjuk, hogy $J_1 \cup J_2 = \{0, \dots, n-1\}$ teljesül. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$, melyre $i_0 \notin J_1$ és $i_0 \notin J_2$ teljesül. Legyen $\alpha = x_{i_0}$ és $\beta = x_{i_0+1}$. Mivel $\alpha \in [a, b]$ ezért a 8.129 képlet alapján az alábbi esetek lehetségesek.

- Létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $\alpha \in A_n$ teljesül. Ekkor $i_0 \notin J_1$ miatt $\sup A_n < \beta$, tehát a felosztás konstrukciója miatt az $[\alpha, \beta]$ intervallumban $\sup A_n$ is szerepelne osztópontként.
- Létezik olyan $i \in \{1, \dots, m\}$, melyre $\alpha \in]z_i - \delta_{z_i}, z_i + \delta_{z_i}[$ teljesül. Ekkor $i_0 \notin J_2$ miatt $z_i + \delta_{z_i} < \beta$, tehát az $[\alpha, \beta]$ intervallumban lenne még egy osztópont, $z_i + \delta_{z_i}$, a konstrukció miatt.

Tehát mindkét esetben ellentmondást kapunk, így $J_1 \cup J_2 = \{0, \dots, n-1\}$.

3/d. Az I felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget két részben számoljuk ki.

$$\omega_1 = \sum_{i \in J_1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i \in J_1} 2K \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq 2K \sum_{n \in F} \mu_0(A_n) \leq \quad (8.134)$$

$$\leq 2K \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0(A_n) < 2K\varepsilon' \quad (8.135)$$

$$\omega_2 = \sum_{i \in J_2} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i \in J_2} 2\varepsilon' \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \quad (8.136)$$

$$\leq 2\varepsilon' \sum_{i \in J_2} (x_{i+1} - x_i) \leq 2\varepsilon'(b - a) \quad (8.137)$$

Ezek alapján

$$\Omega_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \omega_1 + \omega_2 < 2K\varepsilon' + 2(b-a)\varepsilon' = 2(K+b-a)\varepsilon'. \quad (8.138)$$

Vagyis a tetszőlegesen választott ε paraméterhez legyen $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(K+b-a)}$. Ebből az ε' paraméterből

kapott x felosztásra $\Omega_x(f) < \varepsilon$ fog teljesülni, vagyis $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

4. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, és legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Legyen $x = (x_i)_{i=0, \dots, m}$ olyan felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \frac{\varepsilon}{n}$ teljesül, továbbá nézzük meg, hogy a D_n halmaz az osztópontok mely intervallumába metsz bele, ehhez definiáljuk a

$$J = \{i \in \{0, \dots, m-1\} \mid D_n \cap]x_i, x_{i+1}[\neq \emptyset\} \quad (8.139)$$

indexhalmazt. Ha $i \in J$, akkor létezik olyan $x_0 \in]x_i, x_{i+1}[$, melyre $x_0 \in D_n$ is teljesül. A D_n halmaz definíciója alapján ekkor létezik olyan $z \in]x_i, x_{i+1}[$, melyre

$$|f(x_0) - f(z)| > \frac{1}{n} \quad (8.140)$$

teljesül. Ebből viszont a 8.10 tétel alapján

$$\omega(f, [x_i, x_{i+1}]) > \frac{1}{n} \quad (8.141)$$

következik. Felírva az x felosztáshoz tartozó oszcillációs összeget

$$\frac{\varepsilon}{n} > \Omega_x(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \geq \quad (8.142)$$

$$\geq \sum_{i \in J} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in J} (x_{i+1} - x_i) \quad (8.143)$$

adódik, amiből pedig

$$\sum_{i \in J} (x_{i+1} - x_i) < \varepsilon. \quad (8.144)$$

Mivel

$$D_n \subseteq \left(\bigcup_{i=0}^m \{x_i\} \right) \cup \bigcup_{i \in J}]x_i, x_{i+1}[, \quad (8.145)$$

ezért a D_n halmaz lefedhető véges sok, tetszőlegesen kicsi összhosszúságú intervallumokkal, vagyis nulla mértékű.

8.4. Impropius integrál

8.11. Definíció. (Impropius integrál.)

- Legyen $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, \infty[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a, x], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f \quad (8.146)$$

határérték létezik, és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f függvény *impropius integrálja* az $[a, \infty[$ intervallumon, és erre a

$$\int_a^\infty f \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f \quad (8.147)$$

jelölést használjuk; ha a határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény *impropius integrálja divergens* az $[a, \infty[$ intervallumon.

- Ha $f :]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]-\infty, a[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x, a], \mathbb{R})$ teljesül, és a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f \quad (8.148)$$

határérték létezik, és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f függvény *impropius integrálja* az $]-\infty, a]$ intervallumon, és erre a

$$\int_{-\infty}^a f \triangleq \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f \quad (8.149)$$

jelölést használjuk.

- Legyen $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a, x], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f \quad (8.150)$$

határérték létezik, és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f függvény *impropius integrálja* az $[a, b[$ intervallumon, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f \quad (8.151)$$

jelölést használjuk.

- Legyen $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x, b], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f \quad (8.152)$$

határérték létezik, és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f függvény *impropius integrálja* az $]a, b]$ intervallumon, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f \quad (8.153)$$

jelölést használjuk.

8.21. Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ függvényt.

1. Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $[a, \infty[$ intervallumon, ha $\alpha > 1$, és ebben az esetben

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{a^{\alpha-1}(\alpha-1)}. \quad (8.154)$$

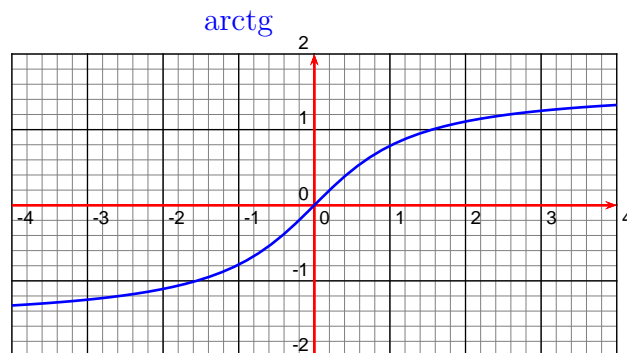
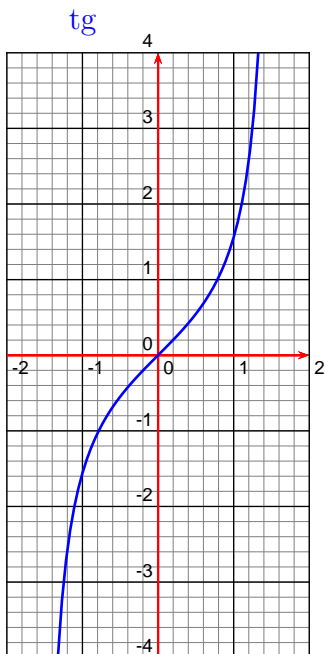
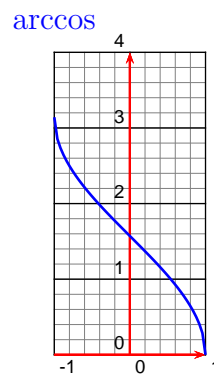
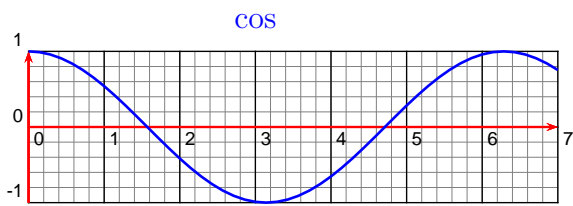
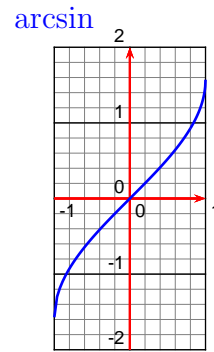
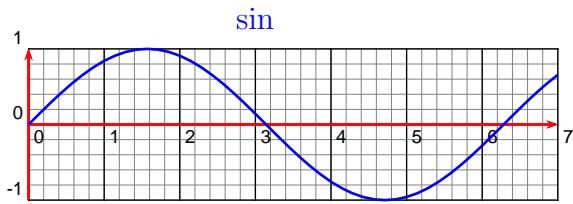
2. Az f függvény pontosan akkor impropriusan integrálható az $]0, a]$ intervallumon, ha $\alpha < 1$, és ebben az esetben

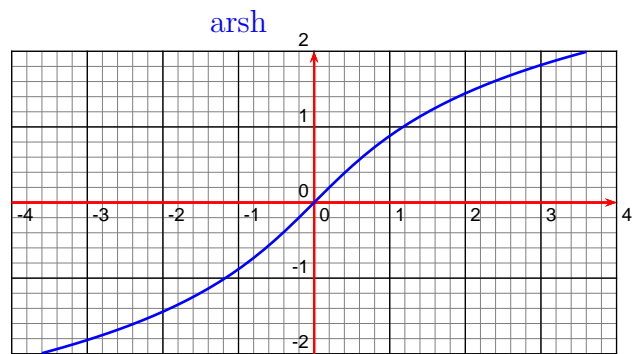
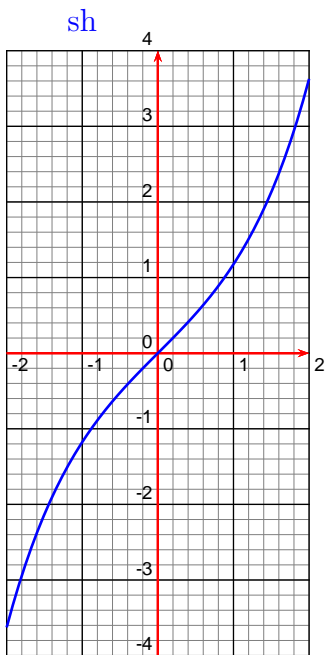
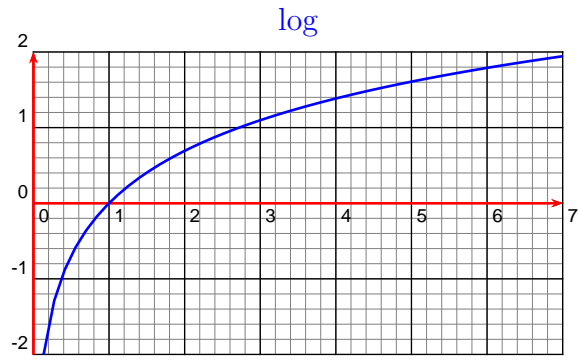
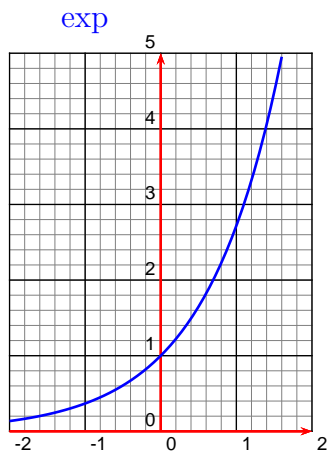
$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \quad (8.155)$$

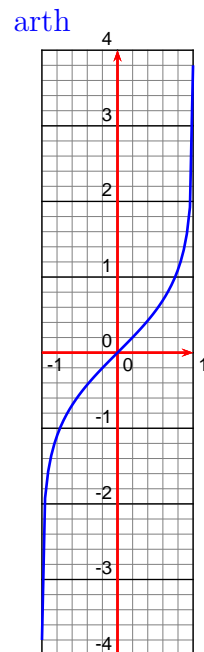
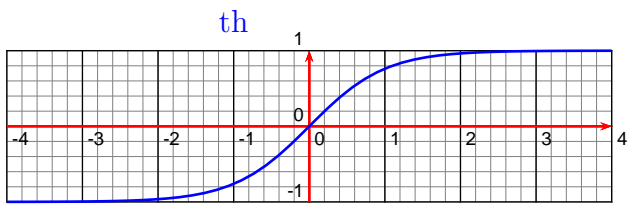
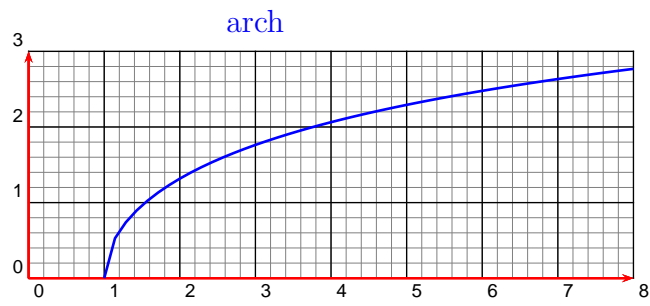
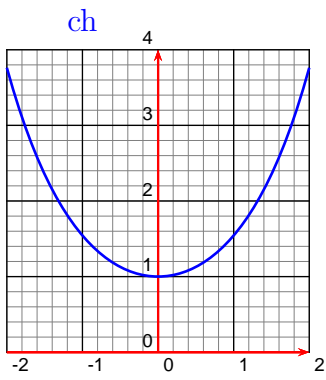
Bizonyítás. A 8.17 Newton–Leibniz-formula alapján rövid számolással igazolható.

9 Függelék

9.1. Az elemi függvények grafikonjai







9.2. Tizedestörtek

Megszoktuk, hogy a valós számokat (esetleg végtelen) tizedestört alakban lehet felírni, most ennek adjuk meg a precíz matematikai bizonyítását.

9.1. Tétel. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Értelmezzük az

$$a(x) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - [N^{n-1} x] \cdot N, & \text{ha } n > 0; \\ [x], & \text{ha } n = 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

sorozatot. Ekkor

1. minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a(x)_n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$;
2. $a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sor konvergens;
3. minden $k \in \mathbb{N}$ számra $\sum_{k=0}^n \frac{a(x)_k}{N^k} = \frac{[N^n x]}{N^n}$;
4. $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ teljesül;
5. végtelen sok n természetes számra $a(x)_n < N-1$;
6. legyen $b : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}$ tetszőleges sorozat; pontosan akkor teljesül az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}, \quad (9.2)$$

egyenlőség, ha $a(x) = b$ vagy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, valamint minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N-1$.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

1. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges és legyen $y = N^{n-1}x$. Ekkor

$$[N^n x] - [N^{n-1} x] \cdot N = [N([y] + \{y\})] - [[y] + \{y\}] \cdot N = N[y] + [N\{y\}] - [y]N = [N\{y\}], \quad (9.3)$$

vagyis $a(x)_n$ egész szám, továbbá $a(x)_n \leq N-1$, hiszen ellenkező esetben $\{y\} \geq 1$ teljesülne.

2. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}$ sort majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n}$ sor, mely konvergens.
3. Az $a(x)$ sorozat definíciója alapján n szerinti teljes indukcióval egyszerűen adódik.
4. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n \frac{a(x)_k}{N^k}$. Felhasználva, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$N^n x = [N^n x] + \{N^n x\} \quad (9.4)$$

és az előző pont eredményét

$$\alpha_n = \frac{N^n x - \{N^n x\}}{N^n} = x - \frac{\{N^n x\}}{N^n} \quad (9.5)$$

adódik, amiből pedig

$$|x - \alpha_n| < \frac{1}{N^n} \quad (9.6)$$

következik. Vagyis $\lim \alpha = x$.

5. Tegyük fel, hogy csak véges sok n természetes számra teljesül az $a(x)_n < N - 1$ egyenlőtlenség. Ekkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ természetes számra $a(x)_n = N - 1$. Tehát az

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = (N-1) \cdot \frac{1}{N^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{N}} = \frac{1}{N^{n_0}} \quad (9.7)$$

egyenlőség miatt

$$\left| x - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} \right| = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \frac{1}{N^{n_0}} \quad (9.8)$$

teljesül, ami ellentmond a 4. bizonyításában szereplő

$$\left| x - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} \right| < \frac{1}{N^{n_0}} \quad (9.9)$$

egyenlőtlenségnek.

6. Legyen $b : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\}$ olyan sorozat, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}, \quad (9.10)$$

teljesül, és tegyük fel, hogy $a(x) \neq b$. Legyen $n_0 = \min \{n \in \mathbb{N} \mid a(x)_n \neq b_n\}$. Ekkor

$$\frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \frac{a(x)_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}, \quad (9.11)$$

melynek átrendezéséből

$$\left| \frac{a(x)_{n_0} - b_{n_0}}{N^{n_0}} \right| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n - b_n}{N^n} \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|a(x)_n - b_n|}{N^n} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \frac{1}{N^{n_0}} \quad (9.12)$$

adódik, vagyis $|a(x)_{n_0} - b_{n_0}| = 1$. Ha $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$, akkor a fenti egyenlőtlenségben csak úgy lehet egyenlőség, ha minden $n > n_0$ esetén

$$|a(x)_n - b_n| = N - 1. \quad (9.13)$$

Továbbá a két sor összege csak akkor egyezhet meg, ha $b_n \geq a(x)_n$. Tekintettel arra, hogy $b_n, a(x)_n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ezért csak az $a(x)_n = 0$ és $b_n = N-1$ megoldása van a fenti egyenlőtlenségnek. A $b_{n_0} = a(x)_{n_0} + 1$ esetben a fentihez hasonló érveléssel azt kapnánk, hogy minden $n > n_0$ számra $a(x)_n = N-1$ és $b_n = 0$. Ekkor viszont

$$x = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{a(x)_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{a(x)_{n_0} + 1}{N^{n_0}} \quad (9.14)$$

adódik, vagyis az $a(x)$ sorozat definíciója alapján $a_{n_0} + 1 = a_{n_0}$, ami ellentmondás, tehát a $b_{n_0} = a(x)_{n_0} + 1$ eset nem valósulhat meg.

Fordítva, ha $a(x) = b$, akkor a két sor összege nyilván megegyezik. Ha létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

minden $n < n_0$ számra $a(x)_n = b_n$, $a(x)_{n_0} = b_{n_0} + 1$ és minden $n > n_0$ természetes számra $a(x)_n = 0$ és $b_n = N - 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{a(x)_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0} + 1}{N^{n_0}} \quad (9.15)$$

és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{N^n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^n} = \quad (9.16)$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + (N-1) \cdot \frac{1}{N^{n_0+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{N}} = \quad (9.17)$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{a(x)_n}{N^n} + \frac{b_{n_0}}{N^{n_0}} + \frac{1}{N^{n_0}} \quad (9.18)$$

vagyis a két sor összege megegyezik.

9.1. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, és tekintsük az

$$a(x) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad n \mapsto \begin{cases} [N^n x] - [N^{n-1} x] \cdot N, & \text{ha } n > 0; \\ [x], & \text{ha } n = 0 \end{cases} \quad (9.19)$$

sorozatot. Ekkor legyen

$$a(x)_0, a(x)_1 a(x)_2 \cdots := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(x)_n}{N^n}, \quad (9.20)$$

melyet az x szám N alapú számrendszer vett felírásának nevezünk.

A mindennapi életben az $N = 10$ választással élünk és ekkor az $x \in \mathbb{R}$ szám *tizedesjegyeiről* beszélünk. Továbbá a fenti állításból következik például az

$$1, 9999 \cdots = 2 \quad (9.21)$$

egyenlőség, vagyis a több olyan tizedesjegy-sorozat létezik, mely ugyan azt a valós számot határozza meg.

9.2. Tétel. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Bizonyítás. Mivel a valós számok a racionális számok bizonyos részhalmazai (Dedekind-szeletei), ezért létezik $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ injektív leképezés, vagyis $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$. Mivel $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, ezért $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Most a $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$ formulát igazoljuk. Defináljuk az alábbi függvényeket.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) & E &\mapsto s(E) := \left(n \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin E; \\ 1, & \text{ha } x \in E. \end{cases} \right) \\ \rho : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) &\rightarrow \mathbb{R} & s &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{10^k} \end{aligned} \quad (9.22)$$

Rövid számolással igazolható, hogy a φ függvény bijekció, valamint a ρ függvény a (9.1) állítás alapján injektív. Tehát $\rho \circ \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ injektív leképezés, vagyis $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.

Tehát $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, vagyis a 1.16 Schröder–Bernstein-tétel alapján $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

9.3. Valós számok szögfüggvényei

9.3. Tétel. A \sin és \cos függvény $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. A \sin és \cos függvény 2π szerinti periodicitása miatt az

$$x' = x - 2\pi \left[\frac{x}{2\pi} \right] \quad (9.23)$$

számra $\sin x = \sin x'$ és $\cos x = \cos x'$ teljesül, valamint $0 \leq x' < 2\pi$. Ekkor a 4.27 addíciós formulák és a 5.31 nevezetes szögek szögfüggvényei alapján

$$\sin x = \begin{cases} \sin x', & \text{ha } 0 \leq x' < \frac{\pi}{2}; \\ \cos\left(x' - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x' < \pi; \\ -\sin(x' - \pi), & \text{ha } \pi \leq x' < \frac{3\pi}{2}; \\ -\cos\left(x' - \frac{3\pi}{2}\right), & \text{ha } \frac{3\pi}{2} \leq x' < 2\pi, \end{cases} \quad (9.24)$$

valamint

$$\cos x = \begin{cases} \cos x', & \text{ha } 0 \leq x' < \frac{\pi}{2}; \\ -\sin\left(x' - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x' < \pi; \\ -\cos(x' - \pi), & \text{ha } \pi \leq x' < \frac{3\pi}{2}; \\ \sin\left(x' - \frac{3\pi}{2}\right), & \text{ha } \frac{3\pi}{2} \leq x' < 2\pi \end{cases} \quad (9.25)$$

adódik.

9.4. Tétel. A \cos függvény $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon való ismerete elegendő bármely valós szám szinuszának és koszinuszának a meghatározásához.

Bizonyítás. Minden $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén $\frac{\pi}{2} - x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, továbbá az addíciós tétel alapján

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \quad (9.26)$$

Ezért ha ismerjük a koszinusz függvényt a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazon, akkor itt a szinusz függvény értékeit is ismerjük, vagyis a 9.3 tétel alapján minden valós szám szögfüggvényét ismerjük.

9.5. Tétel. Ha $x \in [0, \pi]$, akkor

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \text{és} \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}. \quad (9.27)$$

Bizonyítás. Ha $x \in [0, \pi]$, akkor a \cos függvényre vonatkozó 4.27 addíciós formula alapján

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \begin{cases} 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2}\right) - 1; \\ 1 - 2 \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right). \end{cases} \quad (9.28)$$

Mivel $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és ekkor $\sin x, \cos x \geq 0$, ezért a fenti egyenletek átrendezéséből adódik az állítás.

$$\mathbf{9.6. \text{ Tétel.}} \quad \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

Bizonyítás. Elég a $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ formulát igazolni, hiszen $\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}}$. Megmutatjuk, hogy $2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, ugyanis ebből már a félszögek szöggfüggvényeiről szóló 9.5 tétel alapján már adódik az állítás.
Legyen $x = e^{i \frac{2\pi}{5}}$ és $q = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$. Ekkor a 4.22 Euler-tétel alapján

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{2\pi}{5} = q, \quad (9.29)$$

valamint $x^5 = 1$, vagyis

$$0 = x^5 - 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4. \quad (9.30)$$

Tehát elég az $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ egyenletet kell megoldani az $q = x + \frac{1}{x}$ változóra nézve. Ez viszont egyszerű a

$$0 = x^4 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 \right) = x^4 \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right) = x^4 (q^2 + q - 1) \quad (9.31)$$

átalakítások, valamint a $q > 0$ feltétel miatt,

$$q = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \quad (9.32)$$

9.2. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ szám *fokban* kifejezett értéke $x \frac{180}{\pi}$ és a fokra utaló $^\circ$ szimbólumot írjuk mellé. (Pl. $x = \frac{\pi}{6}$ esetén $x = 30^\circ$.)

9.7. Tétel.

$$\sin 3^\circ = (\sqrt{3} + 1) \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{16} - (\sqrt{3} - 1) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{8} \quad (9.33)$$

$$\cos 3^\circ = (\sqrt{3} + 1) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{8} + (\sqrt{3} - 1) \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{16} \quad (9.34)$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \frac{\pi}{5}$ és $\beta = \frac{\pi}{6}$. Ekkor $\alpha = 36^\circ$ és $\beta = 30^\circ$. Az α és a β szöggfüggvényeit ismerjük a 9.6 és a 5.31 tételből. A 4.27 addíciós formula alapján

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)}{8} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{8}. \quad (9.35)$$

A félszögekre vonatkozó 9.5 tétel segítségével az $\frac{\alpha - \beta}{2} = 3^\circ$ szinusza és koszinusza éppen a tételben leírt értéket adja.

Kiegészítés. Ennek alapján meghatározható a $k \cdot 3^\circ$ alakú számok szinusza és koszinusza, ahol $k \in \mathbb{Z}$. (Sőt, a szögfelezésre vonatkozó tétel felhasználásával tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\frac{k}{2^n} \cdot 3^\circ$ szögfüggvényei is kiszámolhatók explicit alakban.) Az alábbiakban a kifejezések szimmetriája szerinti elrendezésben szerepelnek a szögek koszinuszai.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 0^\circ = 1 \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 90^\circ = 0 \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos 15^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \\ \cos 75^\circ = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos 9^\circ = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4} + \frac{1 + \sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \quad \cos 27^\circ = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \\ \cos 63^\circ = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4} + \frac{1 - \sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \quad \cos 81^\circ = -\frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4} + \frac{1 + \sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos 12^\circ = \sqrt{3} \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{8} \quad \cos 24^\circ = \sqrt{3} \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{1 + \sqrt{5}}{8} \\ \cos 48^\circ = \sqrt{3} \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{8} \quad \cos 84^\circ = \sqrt{3} \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{-1 - \sqrt{5}}{8} \\ \cos 42^\circ = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3} \frac{-1 + \sqrt{5}}{8} \quad \cos 6^\circ = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3} \frac{1 + \sqrt{5}}{8} \\ \cos 78^\circ = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3} \frac{1 - \sqrt{5}}{8} \quad \cos 66^\circ = -\frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \sqrt{3} \frac{1 + \sqrt{5}}{8} \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos 3^\circ = \frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \quad \cos 21^\circ = \frac{(-1 + \sqrt{3})\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{8} + \frac{(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 33^\circ = \frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{8} + \frac{(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \quad \cos 39^\circ = \frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 57^\circ = \frac{(-1 + \sqrt{3})\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \quad \cos 51^\circ = \frac{(1 - \sqrt{3})\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{8} + \frac{(-1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \\ \cos 87^\circ = \frac{(1 - \sqrt{3})\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{8} + \frac{(1 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \quad \cos 69^\circ = \frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{8} + \frac{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{5})}{8\sqrt{2}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

◇

9.8. Tétel.

$$\cos \frac{\pi}{17} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{17} + 15 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 2(3 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}} \quad (9.36)$$

Bizonyítás. Elég $2 \cos \frac{2\pi}{17}$ értékét meghatározni, ugyanis ebből már a félszögek szögfüggvényeiről szóló 9.5 tétel alapján már adódik az állítás.

Legyen $x = \exp\left(i \frac{2\pi}{17}\right)$ és $q = 2 \cos \frac{2\pi}{17}$. Ekkor a 4.22 Euler-tétel alapján

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{2\pi}{17} = q, \quad (9.37)$$

valamint $x^{17} = 1$, vagyis

$$0 = x^{17} - 1 = \frac{x^{17} - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{16} x^k. \quad (9.38)$$

Tehát az

$$\sum_{k=0}^{16} x^k = x^8 \cdot \sum_{k=-8}^8 x^k = 0 \quad (9.39)$$

átalakítás miatt elég az

$$\alpha_0 = \sum_{k=-8}^8 x^k = 0 \quad (9.40)$$

egyenletet megoldani az $q = x + \frac{1}{x}$ változóra nézve.

A 17 Fermat-prím, ugyanis $n = 2$ esetén $17 = 2^{(2^n)} + 1$. Legyen $p = 17$ és válasszunk egy olyan $g \in \mathbb{N}$ számot, melyre

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p} \quad (9.41)$$

teljesül. A továbbiakban a $g = 3$ választással élünk. Az $i \in \{1, 2, 3\}$ esetben definiáljuk az alábbi polinomot.

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{2^{(2^n-i)}-1} x^{(g^{k(2^i)})} \quad (9.42)$$

Az $x^{17} = 1$ felhasználásával az alábbi polinomokat kapjuk.

$$\alpha_1 = x^{-8} + x^{-4} + x^{-2} + x^{-1} + x + x^2 + x^4 + x^8 \quad (9.43)$$

$$\alpha_2 = x^{-4} + x^{-1} + x + x^4 \quad (9.44)$$

$$\alpha_3 = x^{-1} + x \quad (9.45)$$

A háttérben meghúzódó mélyebb okok részletezése nélkül megemlítjük, léteznek olyan $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ polinomok és $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ paraméterek, melyekre

$$\alpha_0 = a_1 \alpha_1^2 + b_1 \alpha_1 + \beta_1 \quad (9.46)$$

$$\alpha_0 = a_2 \alpha_2^2 + b_2 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_2 \quad (9.47)$$

$$\alpha_0 = a_3 \alpha_3^2 + b_2 \alpha_2 \alpha_3 + \beta_3 \quad (9.48)$$

teljesül, ahol $\beta_1 \in \mathbb{R}$, β_2 kifejezhető az α_1 polinommal és β_3 kifejezhető az α_1, α_2 polinommal. Valóban, számolással ellenőrizhető, hogy

$$\alpha_0 = \frac{1}{4} \alpha_1^2 + \frac{1}{4} \alpha_1 - 1 \quad (9.49)$$

$$\alpha_0 = -\alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 + 1 \quad (9.50)$$

$$\alpha_0 = 2\alpha_3^2 - 2\alpha_2 \alpha_3 + (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_2 - 3). \quad (9.51)$$

Tehát az $\alpha_0 = 0$ miatt az első egyenlet alapján

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}. \quad (9.52)$$

Ekkor a második

$$\alpha_2^2 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \alpha_2 - 1 = 0 \quad (9.53)$$

egyenlet miatt

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}. \quad (9.54)$$

Ezek után a harmadik egyenlet megoldható az α_3 változóra nézve, ami a keresett q érték.

Megjegyzés. A fenti bizonyításban bemutatott módon lehet meghatározni $\cos \frac{\pi}{257}$ és $\cos \frac{\pi}{65537}$ értékét. ◇

9.4. Jensen-tétel következményei

9.9. Tétel. (Jensen-egyenlőtlenség) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in [a, b]$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor

$$\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \geq f \left(\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i x_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right) \quad (9.55)$$

teljesül.

Bizonyítás. A 5.1 Jensen-egyenlőtlenség alkalmazása az x_1, \dots, x_n pontokra és a $S = \sum_{i=1}^n \omega_i$ jelölés mellett az $\frac{\omega_1}{S}, \dots, \frac{\omega_n}{S}$ súlyokra.

9.10. Tétel. (Súlyozott hatványközep.) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén, és minden $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméterre

$$\alpha(r) \triangleq \left(\frac{\sum_{i=1}^n \omega_i x_i^r}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (9.56)$$

Ekkor az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad r \mapsto \begin{cases} \alpha(r) & \text{ha } r \neq 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r) & \text{ha } r = 0, \end{cases} \quad (9.57)$$

függvény monoton növekvő.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, valamint minden $i = 1, \dots, n$ esetén $x_i \in \mathbb{R}^+$ és $\omega_i \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az $S = \sum_{i=1}^n \omega_i$ jelölés mellett vezessük be minden $i = 1, \dots, n$ esetén az $a_i = \frac{\omega_i}{S}$ paramétereket, valamint minden $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$\alpha(r) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^r \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (9.58)$$

Ekkor nyilván $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

A L'Hospital-szabály alkalmazásával kapjuk meg a $\lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r)$ határértéket.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^r \right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow 0} \exp \left(\frac{1}{r} \cdot \log \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^r \right) \right) = \exp \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dr} \log \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^r \right) \right) = \quad (9.59)$$

$$= \exp \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i x_i^r} \sum_{i=1}^n a_i x_i^r \log x_i = \exp \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \sum_{i=1}^n a_i \log x_i \right) = \quad (9.60)$$

$$= \exp \left(\sum_{i=1}^n a_i \log x_i \right) = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \quad (9.61)$$

Vagyis a súlyozott hatványközép határértéke a 0 pontban a súlyozott geometriai közép. Legyen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ olyan melyre $0 < r_1 < r_2$ teljesül és tekintsük az

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto x^{\frac{r_2}{r_1}} \quad (9.62)$$

függvényt. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$f''(x) = \frac{r_2}{r_1} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) x^{\frac{r_2}{r_1} - 2} > 0 \quad (9.63)$$

teljesül, vagyis f konvex függvény. A Jensen-egyenlőtlenség alapján ekkor

$$f \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_1} \right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i^{r_1}) \quad (9.64)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_1} \right)^{\frac{r_2}{r_1}} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \quad (9.65)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_1} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \right)^{\frac{1}{r_2}} \quad (9.66)$$

$$\alpha(r_1) \leq \alpha(r_2). \quad (9.67)$$

Az $r_1 < r_2 < 0$ esetben az f függvény konkavitását kihasználva hasonló számolással adódik az $\alpha(r_1) \leq \alpha(r_2)$ egyenlőtlenség.

Azt kell még igazolni, hogy minden $r_1 < 0$ és $r_2 > 0$ esetén

$$\alpha(r_1) \leq \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \leq \alpha(r_2). \quad (9.68)$$

Ehhez elég felírni a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $(x_i^{r_2})_{i=1, \dots, n}$ számokra

$$\prod_{i=1}^n (x_i^{r_2})^{a_i} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \quad (9.69)$$

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \right)^{r_2} \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^{r_2} \quad (9.70)$$

$$\prod_{i=1}^n x_i^{a_i} \leq \alpha(r_2), \quad (9.71)$$

illetve hasonló módon az $(x_i^{r_1})_{i=1, \dots, n}$ számokra.

Megjegyzés. Az előző tételt az $\omega_i = 1$, $1 \leq i \leq n$ paraméterekre alkalmazva az $f(-1) \leq f(0) \leq f(1)$ összefüggés adja a harmonikus-számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (9.72)$$

◇

9.5. Wallis- és Stirling-formula

9.11. Tétel. (Wallis-formula.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \sqrt{\pi} \quad (9.73)$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad n \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (9.74)$$

sorozatot. Ekkor elemi számolás alapján $a_0 = \frac{\pi}{2}$ és $a_1 = 1$ nyilván teljesül, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a parciális integrálás szabályát felhasználva

$$a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n+1} x \, dx = [-\cos x \cdot \sin^{n+1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^n x \, dx = \quad (9.75)$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^n x \, dx = (n+1)(a_n - a_{n+2}) \quad (9.76)$$

adódik, vagyis minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}a_n$. Ennek a segítségével teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad a_{2n+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (9.77)$$

teljesül. Szintén teljes indukcióval adódik az állításban szereplő formulára a

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{\pi}{2a_{2n}} \quad (9.78)$$

felírás, tehát a bizonyítandó formula ekvivalens a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2\sqrt{na_{2n}}} = \sqrt{\pi} \quad (9.79)$$

határértékkal, amihez elég megmutatni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4na_{2n}^2 = \pi \quad (9.80)$$

teljesül.

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{2n}a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (9.81)$$

továbbá az a sorozat monoton fogyó, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = a_{2n}a_{2n+1} \leq a_{2n}^2 \leq a_{2(n-1)}a_{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (9.82)$$

teljesül, amiből az

$$\frac{4n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \leq 4na_{2n}^2 \leq \frac{4n}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (9.83)$$

egyenlőtlenség alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4na_{2n}^2 = \pi \quad (9.84)$$

adódik, amivel igazoltuk az állítással ekvivalens 9.80 határértéket.

9.12. Tétel. (*Stirling-formula.*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1 \quad (9.85)$$

Valamint $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ esetén a faktoriálisra érvényes a

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{3n-2}{24(n-1)^3}\right) \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{n}{12(n-1)^2}\right) \quad (9.86)$$

becslés.

Bizonyítás. Definiáljuk az alábbi függvényt.

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \quad (9.87)$$

A $]: -1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(1+x)$ függvény 0 pont körüli harmadfokú Taylor-közelítése alapján minden $x \in [0, 1]$ esetén létezik olyan $c \in [0, x]$ paraméter, melyre

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{6}{(1+c)^4} \cdot \frac{1}{4!} x^4 \quad (9.88)$$

teljesül, vagyis

$$g(x) = -\frac{6}{(1+c)^4} \cdot \frac{1}{4!} x^4, \quad (9.89)$$

amiből következik, hogy minden $x \in [0, 1]$ esetén

$$0 \geq g(x) \geq -\frac{x^4}{4}. \quad (9.90)$$

Tekintsük a

$$a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \log \left(\frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \right) \quad (9.91)$$

sorozatot, amit $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \log k + \frac{1}{2} \log n - n(\log n - 1) \quad (9.92)$$

alakban is felírhatunk. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $b : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(b_{k+1} - b_k) = (n-1)b_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_n - b_1, \quad (9.93)$$

ezt alkalmazva a $b_k = \log k$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) = (n-1) \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \log k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (\log(k+1) - \log k) = \log n \quad (9.94)$$

adódik. Ezért

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \log k + \frac{1}{2} \log n - n(\log n - 1) = \quad (9.95)$$

$$= (n-1) \log n - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + \frac{1}{2} \log n - n \log n + n = \quad (9.96)$$

$$= -\frac{1}{2} \log n - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + n = \quad (9.97)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\log(k+1) - \log k) - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k) + n = \quad (9.98)$$

$$= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{k}\right). \quad (9.99)$$

Az a sorozat ezen alakját kifejezhetjük a g függvény segítségével.

$$a_n = n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(g\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3}\right) = \quad (9.100)$$

$$= n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) + 1 + \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3}\right) = \quad (9.101)$$

$$= 1 - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) \quad (9.102)$$

Az $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$ és az $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3}$ sorozatnak létezik határértéke. A $\sum_k \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right)$ sor abszolút konvergens, ugyanis

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} < \infty \quad (9.103)$$

teljesül, ezért konvergens is. Vagyis az a sorozat konvergens. Legyen $A = \lim a$. Mivel a sorozat minden részsorozata konvergens ugyan azzal a határértékkel ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$ is teljesül, és ezek alapján

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2a_n}}{e^{a_{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n!)^2}{n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}}{\frac{(2n)!}{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \sqrt{2\pi}, \quad (9.104)$$

ahol felhasználtuk a Wallis-formulát. Tehát $A = \frac{1}{2} \log(2\pi)$, amiből

$$\sqrt{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \quad (9.105)$$

következik. Továbbá

$$n! = e^{a_n} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = e^{a_n - A} \cdot e^A \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \quad (9.106)$$

$$= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(1 - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) - \right. \quad (9.107)$$

$$\left. - \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{m-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) = \quad (9.108)$$

$$= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{6} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \sum_{k=n}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad (9.109)$$

teljesül. A

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (9.110)$$

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3} dx \leq \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k^3} \leq \int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^3} dx \quad (9.111)$$

$$-\frac{1}{4} \int_{n-1}^\infty \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4} dx \leq \sum_{k=n}^\infty -\frac{1}{4k^4} \left(k + \frac{1}{2}\right) \leq \sum_{k=n}^\infty \left(k + \frac{1}{2}\right) g\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^\infty \left(k + \frac{1}{2}\right) 0 = 0 \quad (9.112)$$

becslések alapján

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{3n-2}{24(n-1)^3}\right) \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{n}{12(n-1)^2}\right) \quad (9.113)$$

teljesül.

9.13. Tétel. *Legyen*

$$a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n. \quad (9.114)$$

Ekkor az a sorozat monoton fogyó, minden $n \in \mathbb{N}^+$ elemre

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq a_n \leq 1 \quad (9.115)$$

teljesül, valamint az a sorozat konvergens.

Bizonyítás. Ahhoz hogy az

$$a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto a_n \triangleq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n. \quad (9.116)$$

sorozat monoton csökkenéséig igazoljuk, azt kell megmutatnunk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Ezt ekvivalens lépésekkel átalakítva

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \geq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \log(n+1) \quad (9.117)$$

$$-\log n \geq \frac{1}{n+1} - \log(n+1) \quad (9.118)$$

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) \geq \frac{1}{n+1} \quad (9.119)$$

$$(n+1) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 1 \quad (9.120)$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 \quad (9.121)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq e \quad (9.122)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \quad (9.123)$$

adódik. Tehát elég azt igazolni, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (9.124)$$

Ehhez tekintsük az $a_1 = \dots = a_m = 1 + \frac{1}{m}$ és a $b_1 = \dots = b_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}$ számokra felírt számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

$$\sqrt[n+m+1]{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1}} \leq \frac{m\left(1 + \frac{1}{m}\right) + (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}}{m+n+1} = \frac{m+1+n}{m+n+1} = 1 \quad (9.125)$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-1} \leq 1 \quad (9.126)$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (9.127)$$

Mivel $a_1 = 1$ és a monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq 1$. Az alsó becsléshez minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ esetén tekintük az

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \quad (9.128)$$

átalakítást. Mivel az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény konvex, ezért minden $k \in \{1, \dots, n-1\}$ esetén minden $x \in [k, k+1]$ számra a $t = k+1 - x \in [0, 1]$ paraméter mellett

$$f(tk + (1-t)(k+1)) \leq tf(k) + (1-t)f(k+1) \quad (9.129)$$

$$f(x) \leq \frac{k+1-x}{k} + \frac{x-k}{k+1} \quad (9.130)$$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k(k+1)}(2k+1-x) \quad (9.131)$$

teljesül, vagyis

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k(k+1)}(2k+1-x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right). \quad (9.132)$$

Ezek alapján minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ számra

$$\log n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \quad (9.133)$$

ezért

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \quad (9.134)$$

9.3. Definíció. A

$$\gamma \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \quad (9.135)$$

számot *Euler–Mascheroni-féle állandónak* nevezzük.

Kiegészítés. Még nem ismert, hogy γ racionális szám-e. ◇

9.6. A gamma függvény

9.14. Tétel. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén az

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (9.136)$$

improprius integrál konvergens.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$.

Az $x = 1$ esetben egyszerű számolással igazolható az improprius integrál konvergenciája.

Ha $x \in]0, 1[$, akkor megmutatjuk, hogy az

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{és} \quad \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (9.137)$$

improprius integrál konvergens, tehát ezek összege is konvergens.

Tekintsük az

$$I :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \int_a^1 t^{x-1} e^{-t} dt \quad (9.138)$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton csökkenő és a minden $a \in]0, 1]$ paraméterre érvényes

$$I(a) = \int_a^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^a t^{x-1} dt = \frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad (9.139)$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim_{a \rightarrow 0} I(a)$ határérték, vagyis az első integrál is konvergens.

Tekintsük az

$$I : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \int_1^a t^{x-1} e^{-t} dt \quad (9.140)$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton növekvő és a minden $a \in [1, \infty[$ paraméterre érvényes

$$I(a) = \int_1^a t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^a e^{-t} dt = e^{-1} - e^{-a} \leq e^{-1} \quad (9.141)$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ határérték, vagyis a második integrál is konvergens.

Ha $x \in [1, \infty[$, akkor az $a = x - 1$ paraméter pozitív. Legyen $n = [a] + 1$. A L'Hospital-szabályt n -szer alkalmazva kapjuk a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{\frac{t}{2}}} = 0 \quad (9.142)$$

határértéket, ami alapján létezik olyan $t_0 \in [1, \infty[$, hogy minden $t \in]t_0, \infty[$ számra

$$\frac{t^n}{e^{\frac{t}{2}}} < 1. \quad (9.143)$$

Ekkor minden $t_0 < t$ paraméterre

$$0 \leq t^{x-1} e^{-t} \leq t^n e^{-t} \leq e^{\frac{t}{2}} e^{-t} = e^{-\frac{t}{2}} \quad (9.144)$$

teljesül. Tekintsük az

$$I : [t_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \int_{t_0}^a t^{x-1} e^{-t} dt \quad (9.145)$$

integrálfüggvényt. Az I függvény monoton növekvő és a minden $a \in [t_0, \infty[$ paraméterre érvényes

$$I(a) \leq \int_{t_0}^a e^{-\frac{t}{2}} dt = 2 - 2e^{-\frac{a}{2}} \leq 2 \quad (9.146)$$

becslés miatt felülről korlátos is, ezért létezik a $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ határérték. Vagyis az

$$\int_0^{t_0} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_{t_0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (9.147)$$

összeg létezik, ami nem más mint $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

9.4. Definíció. A

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (9.148)$$

függvényt *Euler-féle gamma-függvénynek* nevezzük.

9.15. Tétel. (Az Euler-féle gamma-függvény és a faktoriális kapcsolata.)

1. $\Gamma(1) = 1$
2. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n! = \Gamma(n+1)$ teljesül.

Bizonyítás. 1. $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} -e^{-a} + 1 = 1$.

2. Minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén parciális integrálással számolva

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot t^{x-1} e^{-t} dt = \quad (9.149)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} [t \cdot t^{x-1} e^{-t}]_0^a - \int_0^{\infty} t((x-1)t^{x-2} e^{-t} - t^{x-1} e^{-t}) dt = \quad (9.150)$$

$$= -(x-1) \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \quad (9.151)$$

adódik, vagyis

$$\Gamma(x) = -(x-1)\Gamma(x) + \Gamma(x+1). \quad (9.152)$$

3. Az első két állítás segítségével n szerinti teljes indukcióval igazolható.

9.7. Az analitikus számelmélet pár tétele

9.16. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n. \quad (9.153)$$

1. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in]0, 1[$ esetén $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$.
2. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(0), f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén tekintsük az

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \quad (9.154)$$

függvényt. Ha $x \in]0, 1[$, akkor

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!} \quad (9.155)$$

nyilván teljesül.

Legyen $m, k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor a k paraméter szerinti teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy a $\text{id}_{\mathbb{R}}^m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\text{id}_{\mathbb{R}}^m(x) = x^m$) függvényre

$$(\text{id}_{\mathbb{R}}^m)^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}, & \text{ha } k \leq m \\ 0, & \text{ha } k > m \end{cases} \quad (9.156)$$

teljesül. Ezért

$$f_n^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \text{id}_{\mathbb{R}}^n \binom{n}{i} (-\text{id}_{\mathbb{R}})^i \right)^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (\text{id}_{\mathbb{R}}^{n+i})^{(k)}(x) = \quad (9.157)$$

$$= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \begin{cases} \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k}, & \text{ha } k \leq n+i \\ 0, & \text{ha } k > n+i \end{cases}, \quad (9.158)$$

vagyis

– ha $0 \leq k < n$, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \cdot \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k}, \quad (9.159)$$

tehát $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$;

– ha $n \leq k \leq 2n$, akkor

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=k-n}^n \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} \cdot \frac{(n+i)!}{(n+i-k)!} x^{n+i-k}, \quad (9.160)$$

tehát

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{k-n}}{(n-(k-n))!(k-n)!} \cdot \frac{(n+k-n)!}{(n+k-n-k)!} = \frac{(-1)^{k-n} k!}{(2n-k)!(k-n)!} = (-1)^{k-n} \binom{k}{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!}, \quad (9.161)$$

amiből $\binom{k}{k-n}, \frac{n!}{(2n-k)!} \in \mathbb{Z}$ miatt $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ következik;

– ha $2n < k$, akkor $f_n^{(k)}(x) = 0$, tehát $f_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Tehát minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ számra $f_n(x) = f_n(1-x)$ érvényes, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$.

9.17. Tétel. *A π^2 szám irracionális.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n. \quad (9.162)$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $a, b \in \mathbb{N}^+$ pár melyre $\pi^2 = \frac{a}{b}$ teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk az

$$F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x) \quad (9.163)$$

függvényt. A 9.16 állítás alapján $F_n(0), F_n(1) \in \mathbb{Z}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_n''(x) + \pi^2 F_n(x) = b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k+2)}(x) + b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) = \quad (9.164)$$

$$= b^n \sum_{k=1}^{n+1} -(-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) + b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k+2} f_n^{(2k)}(x) = \quad (9.165)$$

$$= b^n (-1)^{n+2} \pi^0 f_n^{(2n+2)}(x) + b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = a^n \pi^2 f_n(x) \quad (9.166)$$

teljesül, ugyanis f_n egy $2n$ fokszámú polinom, ezért $f_n^{(2n+2)} = 0$.

Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto F_n'(x) \sin(\pi x) - \pi F_n(x) \cos(\pi x). \quad (9.167)$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi_n'(x) = F_n''(x) \sin(\pi x) + \pi F_n'(x) \cos(\pi x) - \pi F_n'(x) \cos(\pi x) + \pi^2 F_n(x) \sin(\pi x) = a^n \pi^2 f_n(x) \sin(\pi x), \quad (9.168)$$

ezért

$$a^n \pi \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) \, dx = \frac{1}{\pi} (\varphi_n(1) - \varphi_n(0)) = F_n(1) + F_n(0) \in \mathbb{Z}. \quad (9.169)$$

Valamint a 9.16 állításban szereplő becslés alapján

$$0 < a^n \pi \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) \, dx < \frac{\pi a^n}{n!} \quad (9.170)$$

teljesül. Mivel a 3.30 állítás miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi a^n}{n!} = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra

$$\left| \frac{\pi a^n}{n!} \right| < \frac{1}{2}. \quad (9.171)$$

Ekkor viszont bármely $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén $a^n \pi \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) \, dx$ olyan egész szám lenne, mely $a \left] 0, \frac{1}{2} \right[$ intervallumban helyezkedik el, ezzel ellentmondást kaptunk.

9.18. Tétel. Legyen $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \frac{a}{b}$ és

$$g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x - \alpha)^{2n} (\alpha^2 - (x - \alpha)^2)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (9.172)$$

1. Minden páratlan $k \in \mathbb{N}$ szám esetén $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$.
2. Minden páros $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_n^{(k)}(\alpha) \in \mathbb{Z}$.
3. Minden páros $k \in \mathbb{N}$ esetén $g_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás. Legyen $n, a, b \in \mathbb{N}^+$, $\alpha = \frac{a}{b}$ és

$$g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x - \alpha)^{2n} (\alpha^2 - (x - \alpha)^2)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (9.173)$$

A binomiális kifejtési tétel alapján a g_n függvény a

$$g_n(x) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} (x - \alpha)^{2l} \quad (9.174)$$

alakban is felírható. Tehát a 9.16 tétel bizonyításában részletezett deriválási szabály alapján minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$g_n^{(k)}(x) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} \begin{cases} \frac{(2l)!}{(2l-k)!} (x - \alpha)^{2l-k}, & \text{ha } k \leq 2l; \\ 0, & \text{ha } k > 2l. \end{cases} \quad (9.175)$$

1. A fenti felírásból rögtön adódik, hogy minden páratlan $k \in \mathbb{N}$ számra $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$ teljesül.
2. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges páros szám, amit írjunk fel $k = 2m$ alakban.
Ha $m > 2n - 1$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g_n^{(2m)}(x) = 0$, vagyis $g_n^{(k)}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}$.
Ha $m \leq 2n - 1$, akkor

$$g_n^{(k)}(\alpha) = \sum_{l=n}^{2n-1} \frac{(-1)^{l-n}}{(l-n)!(2n-1-l)!} a^{4n-2l-2} b^{2l+1-n} \frac{(2l)!}{(2l-2m)!} 0^{2l-2m}. \quad (9.176)$$

Tehát ha $m < n$, akkor $g_n^{(k)}(\alpha) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Ha $n \leq m \leq 2n - 1$, akkor

$$g_n^{(k)}(\alpha) = \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!(2n-1-m)!} a^{4n-2m-2} b^{2m+1-n} \frac{(2m)!}{1} \cdot 1. \quad (9.177)$$

Mivel $0 \leq 4n - 2m - 2$ és $0 \leq 2m + 1 - n$, ezért $a^{4n-2m-2}, b^{2m+1-n} \in \mathbb{N}$. Tehát csak azt kell igazolni, hogy $\frac{(2m)!}{(m-n)!(2n-1-m)!} \in \mathbb{Z}$. Ez viszont a

$$\frac{(2m)!}{(m-n)!(2n-1-m)!} = \binom{2n-1}{m} \cdot \frac{(2m)!}{(2n-1)!} \cdot \frac{m!}{(m-n)!} \quad (9.178)$$

felbontásból látszik, hiszen $\binom{2n-1}{m}, \frac{(2m)!}{(2n-1)!}, \frac{m!}{(m-n)!} \in \mathbb{N}^+$.

3. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges páros szám, amit írjunk fel a $k = 2m$ alakban. A g_n függvény a

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1} (a - bx)^{2n} (2a - bx)^n}{(n-1)!} \quad (9.179)$$

alakjából világos, hogy egy $4n - 2$ fokszámú polinom, amit fel lehet írni a

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l x^l = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l x^{n-1+l} \quad (9.180)$$

formában, ahol $c_0, \dots, c_{3n-1} \in \mathbb{Z}$. Ebből

$$g_n^{(2m)}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{3n-1} c_l \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(n-1+l)!}{(n-1+l-2m)!} x^{n-1+l-2m}, & \text{ha } 2m \leq n-1+l; \\ 0, & \text{ha } 2m > n-1+l \end{array} \right\} \quad (9.181)$$

adódik.

Vagyis ha $m > 2n - 1$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g_n^{(2m)}(x) = 0$, ezért $g_n^{(2m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Ha $m < \frac{n-1}{2}$, akkor $g_n^{(2m)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ szintén teljesül.

Ha $\frac{n-1}{2} \leq m \leq 2n - 1$, akkor

$$g_n^{(2m)}(0) = \frac{1}{(n-1)!} c_{2m-n+1} \frac{(n-1+2m-n+1)!}{1} \cdot 1 = c_{2m-n+1} \frac{(2m)!}{(n-1)!} \quad (9.182)$$

ami a $n-1 \leq 2m$ egyenlőtlenség miatt egész szám.

9.19. Tétel. Ha $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, akkor e^x irracionális.

Bizonyítás. A minden $x \in \mathbb{R}$ számra érvényes $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ összefüggés miatt elég minden $\mathbb{Q} \cap]0, \infty[$ számra igazolni az állítást.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\alpha = \frac{a}{b}$ és $e^\alpha = \frac{c}{d}$ teljesül, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$.

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto b^{3n-1} \frac{(x-\alpha)^{2n} (\alpha^2 - (x-\alpha)^2)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (9.183)$$

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk az

$$F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) \quad (9.184)$$

függvényt. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_n(x) - F_n''(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f_n^{(2k)}(x) - \sum_{k=1}^{2n} f_n^{(2k)}(x) = \quad (9.185)$$

$$= f_n(x) - f_n^{(4n)}(x) = f_n(x) \quad (9.186)$$

teljesül, ugyanis f_n egy $4n - 2$ fokszámú polinom, ezért $f_n^{(4n)} = 0$.

Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto F_n(x) \operatorname{ch}(x) - F_n'(x) \operatorname{sh}(x). \quad (9.187)$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\varphi_n'(x) = F_n'(x) \operatorname{ch}(x) + F_n(x) \operatorname{sh}(x) - F_n''(x) \operatorname{sh}(x) - F_n'(x) \operatorname{ch}(x) = f_n(x) \operatorname{sh}(x), \quad (9.188)$$

ezért

$$\int_0^\alpha f_n(x) \operatorname{sh}(x) \, dx = \varphi_n(\alpha) - \varphi_n(0) = F_n(\alpha) \operatorname{ch}(\alpha) - F_n'(\alpha) \operatorname{sh}(\alpha) - F_n(0). \quad (9.189)$$

A 9.18 alapján $F_n'(\alpha) = 0$ és $F_n(\alpha), F_n(0) \in \mathbb{Z}$. Továbbá az $e^\alpha = \frac{c}{d}$ feltevés miatt $\operatorname{ch} \alpha = \frac{p}{q}$ alakú, ahol $p = c^2 + d^2$, $q = 2cd$, vagyis $p, q \in \mathbb{N}^+$. Ezért

$$Z_n = q \int_0^\alpha f_n(x) \operatorname{sh}(x) \, dx \in \mathbb{Z} \quad (9.190)$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Mivel minden $0 < x < \alpha$ számra $0 < f_n(x), \operatorname{sh}(x)$, ezért $0 < Z_n$, valamint minden $0 < x < \alpha$ számra

$$f_n(x) \operatorname{sh}(x) \leq b^{3n-1} \frac{\alpha^{2n} (\alpha^2)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sh} \alpha = a^2 \operatorname{sh}(\alpha) \frac{\left(\frac{a^4}{b}\right)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (9.191)$$

ezért

$$Z_n \leq a^2 \alpha \operatorname{sh}(\alpha) \frac{\left(\frac{a^4}{b}\right)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (9.192)$$

Mivel a 3.30 állítás miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a^4}{b}\right)^{n-1}}{(n-1)!} = 0$, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ számra

$$\left| a^2 \alpha \operatorname{sh}(\alpha) \frac{\left(\frac{a^4}{b}\right)^{n-1}}{(n-1)!} \right| < \frac{1}{2}. \quad (9.193)$$

Ekkor viszont bármely $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ esetén Z_n olyan egész szám lenne, melyre $0 < Z_n < \frac{1}{2}$ teljesülne.

9.20. Tétel. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén előlje \mathcal{P}_n az n számnál kisebb prímszámok halmazát. Ekkor

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} \geq \log \log n - 2. \quad (9.194)$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad (9.195)$$

teljesül, ebből viszont

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2 \quad (9.196)$$

adódik.

Ha $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, akkor a 6.31 tétel alapján

$$\log \frac{1}{1-x} = -\log \frac{1}{1+(-x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad (9.197)$$

teljesül, aminél felhasználva, hogy $x \leq \frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+3}}{k+3} \leq x + \frac{x^2}{2} + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{2} = \quad (9.198)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x + x^2 \quad (9.199)$$

adódik, vagyis minden $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ esetén

$$\log \frac{1}{1-x} \leq x + x^2. \quad (9.200)$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ekkor az $f, g : [1, n+1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$,

$$g = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \chi_{[k, k+1[} + \frac{1}{n} \chi_{[k, k+1[} \quad (9.201)$$

függvényekre minden $x \in [1, n+1]$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, ezért

$$\int_1^{n+1} f \leq \int_1^{n+1} g. \quad (9.202)$$

Mivel

$$\int_1^{n+1} f = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1) \quad \text{és} \quad \int_1^{n+1} g = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (9.203)$$

és a log függvény monoton csökkenő, ezért minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számra

$$\log n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (9.204)$$

teljesül.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq 3$. Minden p prímszám esetén legyen $\mu_p(n)$ az az egyértelműen meghatározott egész szám, melyre

$$p^{\mu_p(n)-1} \leq x < p^{\mu_p(n)} \quad (9.205)$$

teljesül. Definiáljuk az

$$A(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{\mu_p(n)} \frac{1}{p^k} \quad (9.206)$$

számot. A számelmélet alaptétele szerint minden pozitív természetes szám egyértelműen felbontható prímszámok szorzatára. Ezért az

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^{\mu_{p_1}(n)}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_2^{\mu_{p_2}(n)}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_k} + \dots + \frac{1}{p_k^{\mu_{p_k}(n)}}\right) \quad (9.207)$$

szorzatban minden $\frac{1}{k}$ alakú szám előfordul $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Ezért

$$\prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} > A(n) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \log n, \quad (9.208)$$

aminek a logaritmusát véve

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} + \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p^2} > \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \log \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \geq \log \log x. \quad (9.209)$$

Ebből adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

9.5. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}$ számot *algebrai számnak* nevezünk, ha létezik olyan egész együtthatós, nem nulladfokú polinom, melynek x gyöke. A nem algebrai számokat *transzcendens* számoknak nevezzük.

Megjegyzés.

9.21. Tétel. (Az algebrai számok alaptulajdonságai.)

1. Az algebrai számok rendezett testet alkotnak.
2. Ha egy polinom együtthatói algebrai számok, akkor a polinom gyökei is algebrai számok.
3. Az algebrai számok halmaza megszámlálható.
4. Az algebrai számok halmaza nulla mértékű.

◇

9.22. Tétel. Az e szám transzcendens.

Bizonyítás. Minden $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ polinom esetén legyen $\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^n |a_i| x^i$ és

$$I_p : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \int_0^t e^{t-x} p(x) \, dx. \quad (9.210)$$

Parciális integrálással

$$I_p(t) = e^t \sum_{i=0}^n p^{(i)}(0) - \sum_{i=0}^n p^{(i)}(t) \quad (9.211)$$

adódik, valamint egyszerűen becsülhető $|I_p(t)|$

$$|I_p(t)| \leq |t| \cdot \left(\sup_{x \in [0, t]} |e^{t-x}| \right) \cdot \left(\sup_{x \in [0, t]} |p(x)| \right) \leq t e^t \tilde{p}(t). \quad (9.212)$$

Tegyük fel, hogy e gyöke a

$$p(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i \quad (9.213)$$

polinomnak, ahol minden $i = 0, \dots, r$ esetén $a_i \in \mathbb{Z}$, valamint $a_0, a_r \neq 0$. Legyen p olyan prímszám, melyre $p > \max\{r, |a_0|\}$ teljesül. Legyen $f(x) = x^{p-1} \prod_{i=1}^r (x-i)^p$ és tekintsük a $J = \sum_{i=0}^r a_i I_f(i)$

számot, melynek definíciójából adódik, hogy $J \in \mathbb{Z}$. Mivel $p(e) = 0$, ezért $J = - \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{(r+1)p-1} a_i f^{(j)}(i)$,

amit átírhatunk a

$$J = - \sum_{j=p-1}^{(r+1)p-1} a_0 f^{(j)}(0) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=p}^{(r+1)p-1} a_i f^{(j)}(i) \quad (9.214)$$

alakba. Itt a jobb oldalon minden tagnak osztója a $p!$ kivéve az $a_0 f^{(p-1)}(0) = a_0 (p-1)! (-1)^{rp} (r!)^p$ tagot. Mivel $p > |a_0|$ ezért $|J|$ olyan egész, melynek nem osztója a $p!$, de $(p-1)!$ már igen, ezért $(p-1)! \leq |J|$. Valamint minden $k = 0, \dots, r$ szám esetén

$$|I_f(k)| \leq k e^k \tilde{f}(k) = k e^k k^{p-1} \prod_{i=1}^r (k+i)^p \leq e^k (2r)^{(r+1)p}. \quad (9.215)$$

Vagyis

$$|J| \leq \sum_{k=0}^r |a_k| |I_f(k)| \leq \sum_{k=0}^r |a_k| e^k (2r)^{(r+1)p} \leq \alpha \beta^p, \quad (9.216)$$

ahol $\alpha = \sum_{k=0}^r |a_k| e^k$ és $\beta = (2r)^{r+1}$. Tehát az alábbi becslésünk adódik

$$1 \leq \frac{|J|}{(p-1)!} \leq \frac{\alpha \beta^p}{(p-1)!}, \quad (9.217)$$

ami ellentmondáshoz vezet, hiszen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \beta^n}{(n-1)!} = 0$.

Kiegészítés. Ismeretlen, hogy többek között az $e \pm \pi$, az $e \pi$ és a $\zeta(3)$ számok algebrai számok-e. \diamond

Tárgymutató

- arch, 75, 83
- arctg, 72, 83
- arsh, 75, 83
- arth, 75, 83
- ch, 75, 83
- e, 46, 48
- sh, 75, 83
- tg, 72, 83
- th, 75, 83
- π , 68
- lim inf, 27
- lim sup, 27
- lim, 21, 54
- arccos, 72, 83
- arcsin, 72, 83
- cos, 72, 83
- exp, 83
- ln, 48
- log, 48, 83
- sin, 72, 83
- átrendezés, 42
- átviteli elv
 - folytonosságra, 60
 - határértékre, 57
- érintési pont, 15
- érintő, 90

- Abel-átrendezés, 45
- Abel-féle konvergenciakritérium, 44
- abszolút konvergencia sor, 37
- alsó integrál, 107
- alsó közelítő összeg, 105
- alsó korlát, 7
- area
 - koszinusz hiperbolikus, 75, 83
 - szinusz hiperbolikus, 75, 83
 - tangens hiperbolikus, 75, 83
- arkhimédészi módon rendezett test, 8
- arkusz
 - koszinusz, 72, 83
 - szinusz, 72, 83
 - tangens, 72, 83
- aszimptota, 79

- bal oldali határérték, 62
- befedés, 18
- belső pont, 15

- belseje egy halmaznak, 15
- Bernoulli-egyenlőtlenség, 11
- bijekció, 4
- binomiális tétel, 12
- binomiális-sorfejtés, 94
- Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétele, 26
- Bolzano–Weierstrass-tétel, 27
- Bolzano-tétel, 64
- Borel–Lebesgue-tétel, 18

- Cantor
 - \sim -féle közösrész tétel, 18
 - \sim -tétel, 5
 - halmaz, 103
- Cauchy
 - \sim -Hadamard-tétel, 46
 - \sim -féle gyökkritérium, 39
 - \sim -féle maradéktag, 89
 - \sim -kritérium, 29, 36
 - \sim -sorozat, 28
 - \sim -szorzat, 43
 - \sim -tétel, 81

- D’Alembert-féle hányadoskritérium, 41
- Descartes-szorzat, 3
 - halmazrendszer $\sim a$, 5
- diffeomorf
 - függvény, 76
- diffeomorfizmus, 76
- differenciálható
 - n -szer \sim függvény, 86
 - n -szer folytonosan \sim függvény, 86
 - függvény, 76
 - végtelemszer \sim függvény, 86
- divergens
 - imprius integrál, 119
 - sor, 35
 - sorozat, 21

- e, 48
- egyenlőtlenség
 - Jensen- \sim , 51
 - számtani-mértani \sim , 12, 87
- egyenletesen folytonos függvény, 65
- ekvipotens, 9
- elemi függvények deriváltja, 80
- elemi függvények inverze, 83

- elsőfajú szakadás, 63
 Euler képlet, 69
 Euler-tétel, 47
 exponenciális függvény, 46
- függvény, 4
 ~ek érintkezése, 90
 n -szer differenciálható ~, 86
 n -szer folytonosan differenciálható ~, 86
 érintője, 90
 alsó integrálja, 107
 aszimptotája, 79
 bal oldali határértéke, 62
 bijektív ~, 4
 differenciálható ~, 76
 egyenletesen folytonos ~, 65
 elsőfajú szakadása, 63
 exponenciális ~, 46
 felső integrálja, 107
 folytonos ~, 57
 folytonosan differenciálható ~, 76
 gyöke, 51
 határértéke, 52
 határozatlan integrálja, 95
 határozott integrálja, 107
 improprius integrálja, 119
 injektív ~, 4
 integrálja, 107
 jobb oldali határértéke, 62
 konkáv ~, 51
 konvex ~, 51
 koszinusz ~, 46
 koszinusz hiperbolikus ~, 46
 kotangens ~, 46
 kotangens hiperbolikus ~, 46
 lokális maximuma, 91
 lokális minimuma, 91
 lokális szélsőértéke, 91
 másodfajú szakadása, 63
 megszüntethető szakadása, 63
 monoton ~, 51
 monoton fogyó ~, 51
 monoton növekvő ~, 51
 nyílt ~, 120
 oszcillációja, 108
 páratlan ~, 51
 páros ~, 51
 periódusa, 51
 periodikus ~, 51
 primitív ~, 95
 Riemann-integrálja, 107
 sűrűn értelmezett, 120
 szürjektív ~, 4
 szigorú lokális maximuma, 91
 szigorú lokális minimuma, 91
 szigorú lokális szélsőérték, 91
 szigorúan monoton ~, 51
 szigorúan monoton fogyó ~, 51
 szigorúan monoton növekvő ~, 51
 szinusz ~, 46
 szinusz hiperbolikus ~, 46
 tangens ~, 46
 tangens hiperbolikus ~, 46
 végtelenszer differenciálható ~, 86
 zérushelye, 51
- faktoriális, 12
 felosztás, 104
 alsó közelítő összege, 105
 felső közelítő összege, 105
 felosztások egyesítése, 105
 felső integrál, 107
 felső közelítő összeg, 105
 felső korlát, 7
 feltételesen konvergens sor, 42
 feltétlen konvergens sor, 42
 finomabb felosztás, 104
 folytonos
 ~an differenciálható függvény, 76, 86
 egyenletesen ~ függvény, 65
 függvény, 57
 folytonosság topologikus jellemzése, 61, 62
 formula
 ~k ekvivalenciája, 1
- gyök, 51
 n -edik ~, 11
 gyökkritérium, 39
- Hölder-egyenlőtlenség, 87
 hányadoskritérium, 41
 sorozatokra, 31
- halmaz, 1
 ~ok Descartes-szorzata, 3
 ~ok különbsége, 2
 ~ok metszete, 2
 ~ok uniója, 2
 alulról korlátos ~, 7
 befedése, 18
 belső pontja, 15
 belseje, 15

- Cantor-~, 103
- ekvipotens ~ok, 9
- elemének lenni, 1
- felülről korlátos ~, 7
- határ pontja, 15
- határa, 15
- hatvány~, 2
- infimuma, 7
- izolált pontja, 15
- kompakt ~, 18
- kontinuum számosságú ~, 10
- korlátos ~, 14
- Lebesgue nulla mértékű ~, 101
- lezártja, 15
- megszámlálható ~, 10
- megszámlálhatóan végtelen ~, 10
- nulla mértékű ~, 101
- nyílt ~, 14
- részbefedése, 18
- sűrű ~, 17
- szuprémuma, 7
- teljesen korlátos ~, 120
- torlódási pontja, 15, 53
- véges ~, 10
- végtelen ~, 10
- zárt ~, 14
- halmazrendszer, 5
 - Descartes-szorzata, 5
 - metszete, 5
 - uniója, 5
- határ pont, 15
- határérték, 54
 - függvény ~e, 52
 - függvény bal oldali ~e, 62
 - függvény jobb oldali ~e, 62
 - sor ~e, 35
 - sorozat ~e, 21
 - végtelen ~, 21
- határozatlan integrál, 95
 - elemi ~, 95
- határozott integrál, 107
- hatványhalmaz, 2
- hatványozás, 48
- hatványsor, 46
 - konvergenciasugara, 46
- Hausdorff-tétel, 120
- Heine-tétel, 65
- helyettesítéses integrál, 96
- identitásreláció, 4
- indexhalmaz, 5
- indexsorozat, 22
- infimum, 7
- injekció, 4
- integrál, 107
 - divergens improprius ~, 119
 - elemi határozatlan ~, 95
 - függvény alsó ~ja, 107
 - függvény felső ~ja, 107
 - határozatlan ~, 95
 - helyettesítéses ~, 96
 - improprius ~, 119
 - konvergens improprius ~, 119
 - parciális ~, 96
- intervallum, 8
 - felosztása, 104
 - hossza, 101
- inverz
 - elemi függvények ~e, 83
- izolált pont, 15
- Jensen-egyenlőtlenség, 51
- jobb oldali határérték, 62
- környezet, 15
- közéértéktétel
 - deriválásra vonatkozó ~, 80, 81
- közelítő összeg
 - felosztás alsó ~e, 105
 - felosztás felső ~e, 105
- kompakt
 - halmaz, 18
- kondenzációs kritérium, 38
- konkáv függvény, 51
- kontinuum számosságú halmaz, 10
- konvergenciasugár, 46
- konvergens
 - abszolút ~ sor, 37
 - improprius integrál, 119
 - sor, 35
 - sorozat, 21
- konvex
 - függvény, 51
- konvolúció, 43
- korlátos
 - halmaz, 14
 - sorozat, 22
- korlátos részletösszegű sorozat, 44
- korlátos változású sorozat, 44
- koszinusz, 46, 72, 83

- koszinusz hiperbolikus, 46, 75, 83
 kotangens, 46
 kotangens hiperbolikus, 46
 L'Hospital szabály, 84
 láncszabály, 78
 Lagrange-féle maradéktag, 89
 Lagrange-tétel, 81
 Lebesgue nulla mértékű halmaz, 101
 Lebesgue-tétel, 115
 legkisebb elem, 7
 legnagyobb elem, 7
 Leibniz-sor, 41
 lezártja egy halmaznak, 15
 limesz, 21, 54
 inferior, 27
 szuperior, 27
 lokális maximum, 91
 lokális minimum, 91
 lokális szélsőérték, 91
 Ludolf-féle szám, 68
 másodfajú szakadás, 63
 művelet, 4
 asszociatív \sim , 4
 disztributív \sim , 4
 egységelemes \sim , 4
 kommutatív \sim , 4
 majdnem mindenütt, 104
 majoráns kritérium, 36
 megszüntethető szakadás, 63
 megszámlálható
 \sim an végtelen halmaz, 10
 halmaz, 10
 Mertens-tétel, 43
 metrikus tér
 \sim ek szorzata, 120
 teljesen korlátos \sim , 120
 Minkowski-egyenlőtlenség, 88
 minoráns kritérium, 36
 monoton
 függvény, 51
 fogyó függvény, 51
 fogyó sorozat, 22
 növekvő függvény, 51
 növekvő sorozat, 22
 szigorúan \sim függvény, 51
 szigorúan \sim fogyó függvény, 51
 szigorúan \sim növekvő függvény, 51
 Newton-Leibniz-tétel, 113
 nulla mértékű halmaz, 101
 nyílt
 függvény, 120
 nyílt halmaz, 14
 oszcillációs
 összeg, 108
 páratlan függvény, 51
 páros függvény, 51
 parciális integrál, 96
 parciális törtekre bontás, 100
 periódus, 51
 periodikus függvény, 51
 Pi, 68
 polinom, 20
 pont körüli r sugarú nyílt gömb, 13
 primitív függvény, 95
 részbefedés, 18
 részsorozat, 22
 reláció, 3
 \sim k kompozíciója, 3
 értékkészlete, 3
 értelmezési tartománya, 3
 függvényszerű \sim , 4
 identitás \sim , 4
 inverze, 3
 megszorítása, 3
 rendezett
 arkhimédészi módon \sim test, 8
 pár, 3
 Riemann-integrál, 107
 Rolle-tétel, 80
 sűrű halmaz, 17
 sűrűn értelmezett függvény, 120
 Schröder-Bernstein-tétel, 9
 sor, 35
 \sim ok Cauchy-szorzata, 43
 \sim ok konvolúciója, 43
 átrendezése, 42
 abszolút konvergens \sim , 37
 divergens \sim , 35
 feltételesen konvergens \sim , 42
 feltétlen konvergens \sim , 42
 hatvány \sim , 46
 hatvány \sim konvergenciasugara, 46
 konvergens \sim , 35
 Leibniz- \sim , 41

- Taylor-~, 90
- sorozat, 21
 - ~hoz rendelt sor, 35
 - Cauchy-~, 28
 - divergens ~, 21
 - határértéke, 21
 - index~, 22
 - konvergens ~, 21
 - korlátos ~, 22
 - korlátos részletösszegű ~, 44
 - korlátos változású ~, 44
 - monoton fogyó ~, 22
 - monoton növekvő ~, 22
 - rész~, 22
 - zérus~, 22
- szűrjekció, 4
- számok
 - bővített valós ~, 8
- számosság, 9
 - azonos ~ú, 9
 - kisebb ~ú, 9
 - kisebb egyenlő ~ú, 9
- számtani-mértani egyenlőtlenség, 12, 87
- szakadás
 - függvény elsőfajú ~a, 63
 - függvény másodfajú ~a, 63
 - függvény megszüntethető ~a, 63
- szigorú lokális maximum, 91
- szigorú lokális minimum, 91
- szigorú lokális szélsőérték, 91
- szigorúan monoton
 - függvény, 51
 - fogyó függvény, 51
 - növekvő függvény, 51
- szinusz, 46, 72, 83
- szinusz hiperbolikus, 46, 75, 83
- szuprémum, 7

- tangens, 46, 72, 83
- tangens hiperbolikus, 46, 75, 83
- Taylor-formula, 88
- Taylor-polinom, 90
- Taylor-sor, 90
- teljes
 - burok, 120
- teljesen korlátos
 - halmaz, 120
 - metrikus tér, 120
- természetes alapú logaritmus, 48
- test
 - arkhimédészi módon rendezett ~, 8
 - torlódási pont, 15, 53
 - véges halmaz, 10
 - véges növekmények formulája, 81
 - végtelen, 8
 - végtelen halmaz, 10
 - végtelenszer differenciálható függvény, 86
 - Weierstrass-tétel, 64
 - zárt halmaz, 14
 - zérushely, 51
 - zérussorozat, 22

