Kalkulus 2, 2019/20/II. félév, elméleti anyag a vizsgára

Az írásbeli vizsga első része lesz az elméleti rész. Itt lesz 25 IGAZ/HAMIS kérdés, amelyek a vizsgázó felkészültségét és rálátását mérik fel. Minden helyes valasz +4 pont, minden helytelen -4 pont, és minden üresen hagyott válasz 0 pont. Legalább 40 pont kell a 2-eshez. A felkészüléshez segít az alábbi minimum-követelmény lista, amely a honlapomon lévő összesített anyag alapján készült.

A szóbeli vizsgán is kérdezhetek elméletet és standard feladatok megoldását is. Az elméleti rész kizárolag az alábbi listából lesz. A standad feladatok pedig kizárólag a kitűzött feladatsor megjelölt példáiból vagy ZH feladatokból.

A következő definíciók és tételek *kimondását* tudni kell (a bizonyítások majd a file végén jönnek).

1. $\mathbb{R}^p$-beli vektorok hossza (avagy abszolút értéke), és a háromszög-egyenlőtlenség. ([1, 15.1. Definíció], és az alatta lévő rész).

2. Skaláris szorzás $\mathbb{R}^p$-ben, és vektorok ortogonalitása. ([1]-ben a (15.3) képlet alatti sorok).

3. A Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség $\mathbb{R}^p$-ben. ([1, 10.19 Tétel])

4. Pontsorozatok konvergenciája $\mathbb{R}^p$-ben. ([2, 21.2. Definíció])

5. Cauchy kritérium pontsorozatok konvergenciájára $\mathbb{R}^p$-ben. ([2, 21.7 Tétel])

6. Bolzano-Weierstrass tétel $\mathbb{R}^p$-ben. ([2, 21.8 Tétel])

7. $\mathbb{R}^p$-beli halmazok belseje, külseje, határa. ([2]-ben a 17. oldal eleje)

8. Nyílt halmazok definíciója és alaptulajdonságaik. (a [2, 21.12 Tétel] előtti sorokban van a definíció, és a [2, 21.13 Tételben] az alaptulajdonságok)

9. Zárt halmazok definíciója és karakterizáló tulajdonságai. (a definíció a [2, 21.16 Tétel] előtt van, a karakterizáló tulajdonságok pedig a [2, 21.16 Tételben])

10. Zárt halmazok alaptulajdonságai. ([2, 21.17 Tétel])
11. Az összefüggőség definíciója, és nyílt halmazok összefüggőségének ekvivalens tulajdonsága. ([2, 21.20 Definíció], és a [2, 21.21 Tétel] első fele)
12. Kompakt halmaz definíciója, és Borel tétele. ([2, 21.29 Definíció], és a [2, 21.30 Tétel])
13. Cantor-tétel ([2, 21.24 Tétel]).
14. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények pontbeli határértéke. ([2, 21.32 Definíció])
15. Átviteli elv függvények határértékére. ([2, 21.37 Tétel])
16. A folytonosság definíciója és átviteli elve. ([2, 21.41 Definíció], és a [2, 21.43 Tétel])
17. A folytonosság topologikus jellemzése. (Nyílt halmaz őosképe nyílt, órán bizonyítottuk.)
18. Weierstrass min-max tétele. ([2, 21.50 Tétel])
19. Heine tétele. ([2, 21.52 Tétel])
20. Parciális deriváltak definíciója. ([2, 21.55 Definíció])
21. Lokális minimum és maximum definíciója, és kapcsolata a parciális deriváltakkal. ([2, 21.58 Definíció], [2, 21.59 Tétel])
22. Kompakt halmazon értelmezett függvény extrémumai. ([2, 21.60 Tétel])
23. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatósága. ([2, 21.62 Definíció])
24. Differenciálhatóság és a parciális deriváltak kapcsolata. ([2, 21.66 Tétel])
25. A folytonos parciális deriváltakból következik a differenciálhatóság. ([2, 21.70 Tétel])

26. Az érintősík egyenlete. ([2, 21.73-74 Definíció])
27. Iránymenti derivált és kiszámítása. ([2, 21.75. Definíció], [2, 21.76 Tétel])
28. Young tétele. ([2, 21.81 Tétel])
29. Taylor-polinom definíciója, legfeljebb 2-odrendű tagig. ([2, 21.94. Definíció], $n \leq 2$)
30. Pozitív definit, negatív definit és indefinit kvadratikus formák ([2, 21.99. Definíció])
31. Lokális extrémumok és a második derivált kapcsolata. ([2, 21.100 Tétel])
32. Konvex halmazok és konvex függvények. ([2, 21.102-103. Definíció])
33. A konvexitás és a második derivált kapcsolata. ([2, 21.105 Tétel])
34. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények határértéke, folytonossága, és a koordinátafüggvények folytonosságával való kapcsolat. ([2, 22.1-3 Definíció], [2, 22.2-4 Tétel])
35. Kompakt halmaz folytonos képe kompakt. ([2, 22.7 Tétel])
36. Kompakt halmazon folytonos, injektív függvény inverze folytonos. ([2, 22.8 Tétel])
37. Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény differenciálhatósága. ([2, 22.11 Definíció])
38. A derivált Jacobi-mátrixa a parciális deriváltakkal kifejezve. ([2, 22.13 Tétel][2, 22.15 Definíció])
39. A láncszabály. ([2, 22.20 Tétel])
40. Az inverz függvény deriváltja. ([2, 22.26 Tétel])
41. A lokális injektivitás tétele. ([2, 22.32 Tétel])

42. A lokális szurjektivitás tétele. ([2, 22.35 Tétel])
43. Banach-féle fixponttétel. ([2, 22.36 Tétel])
44. Az inverzfüggvény-tétel. ([2, 22.38 Tétel])
45. Az implicitfüggvény-tétel. ([2, 22.40 Tétel])
46. A Lagrange-féle multiplikátor elv. ([2, 22.44 Tétel])
47. A Jordan-mérhetőség és a Jordan-mérték definíciója a $b(A)$ belső mérték és $k(A)$ külső mérték segítségével. ([2], 23. fejezet eleje)
48. Jordan-nullmértékűség definíciója. ([2, 23.6. Definíció])
49. A Jordan-mérhetőség és a halmaz határának kapcsolata. ([2, 23.7 Tétel])
50. Egy paralelepipedon térfogatának kiszámítása determinánssal. ([2, 23.28. Tétel])
51. A lineáris transzformációk és a Jordan-mérték kapcsolata. ([2, 23.32. Tétel])
52. Többváltozós integrálok kiszámítása. ([2, 24.21. Következmény])
53. A helyettesítéses integrálás többváltozós megfelelője. ([2, 24.24. Tétel])
54. Polárkoordinátás helyettesítés. ([2, 24.27. Tétel])
55. Görbe ívhossza, és a vonalmenti integrál. ([1, 15.21. Tétel], [2, 25.8. Tétel]).
56. Newton-Leibniz formula skalárpotenciál jelenlétében. ([2, 25.11. Tétel])
57. Felületdarab felszíne. ([2, 25.40. Definíció])
58. A skalárpotenciál létezése és a zárt görbéken vett integrál eltűnése. ([2, 25.14. Tétel])

59. A skalárpotenciál létezése és az örvénymentesség konvex halmazon. ([2, 25.22. Tétel])

60. A divergencia-tétel, avagy Gauss-Osztrogradszkij tétel. ([2, 25.47. Tétel] első formulája)

61. Függvénysorozat pontonkénti és egyenletes konvergenciája. ([2, 27.1-5 Definíció])

62. Az egyenletes kovergencia Cauchy-kritériuma. ([2, 27.9. Tétel])

63. Folytonos függvények egyenletes limesze folytonos. ([2, 27.12. Tétel])

64. Egyenletes konvergenica esetén a limesz és az integrál felcserélhetőek. ([2, 27.16. Tétel])

65. A differenciálás és a limesz felcserélhetősége. ([2, 27.18. Tétel])

66. Weierstrass-kritérium függvénysorokra. ([2, 27.27. Tétel])

67. Fourier-együtthatók definíciója ([2, 27.74. Definíció])

68. A cosinus és sinus függvények ortogonalitása és teljessége. ([2, 27.72. Lemma], [2, 27.77. Tétel])

69. Egy k-szor differenciálható periodikus függvény Fourier együtthatóinak nagyságrendje. ([2, 27.81. Lemma])

70. Kétszer folytonosan differenciálható függvény Fourier-sora egyenletesen konvergens. ([2, 27.82. Tétel])

A következő bizonyításokat kell tudni a szóbelin.

1. Bolzano-Weierstrass tétel $\mathbb{R}^p$-ben. ([2, 21.8 Tétel])

2. Weierstrass min-max tétele. ([2, 21.50 Tétel])

3. Banach-fele fixponttétel. ([2, 22.36 Tétel])

4. A skalárpotenciál létezése és az örvénymentesség konvex halmazon. ([2, 25.22. Tétel])

5. Az egyenletes kovergencia Cauchy-kritériuma. ([2, 27.9. Tétel])

6. Egyenletes konvergenica esetén a limesz és az integrál felcserélhetőek. ([2, 27.16. Tétel])

7. Weierstrass-kritérium függvénysorokra. ([2, 27.27. Tétel])

8. Egy k-szor differencialhato periodikus függvény Fourier egyutthatoinak nagysagrendje. ([2, 27.81. Lemma])

9. Kétszer folytonosan differenciálható függvény Fourier-sora egyenletesen konvergens. ([2, 27.82. Tétel])

Hivatkozások

[1] Laczkovich Miklos, T. Sos Vera, *Valos analizis I.* letölthető innen: https://www.interkonyv.hu/konyvek/

[2] Laczkovich Miklos - T. Sos Vera, *Valos analizis II.* letölthető innen: https://www.interkonyv.hu/konyvek/

[3] Babcsányi, Gyurmánczi, Wettl, Zibolen, *Matematika feladatgyűjtemény II.* Műegyetemi kiadó 2007, elérhető a honlapomon