Matematika A2f – Vektorfüggvények

Erdélyi Márton
www.math.bme.hu/~merdelyi/a2v/
merdelyi@math.bme.hu
H épület 667

1. Lineáris algebra

2. Többváltozós függvények

3. Sorok

Lineáris algebra

A témához ajánlott könyv
Wettl Ferenc: Lineáris Algebra
(a diasornak megfelelő részek)

Lineáris egyenletrendszerek és megoldásaik

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyen m és n pozitív egészek és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós változók.

- Egy n ismeretlenes **lineáris egyenlet** egy
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$
alakú egyenlet, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ valós számok.
- Egy n ismeretlenes **lineáris egyenletrendszer** egy
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$
alakú egyenletrendszer, ahol a_{jk}, b_k valós számok.
- Az a_{jk}-k **együtthatók** és a b_j-k a **konstansok**.

Megjegyzés

Valósok helyett ez tetszőleges test lehet (például $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$).

Példa (Néhány lineáris egyenletrendszer)

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3x - y &= 5 \\ 2y &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + z &= 4 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$$

Definíció

- A előbbi egyenletrendszer egy **megoldása** egy $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ valós szám n-es (azaz $x_k \in \mathbb{R}$, ha $1 \leq k \leq n$) úgy hogy a változókba ezeket behelyettesítve mindegyik egyenletet teljesül.
- Az egyenletrendszer **homogén**, ha a konstansok 0-k ($b_j = 0$ minden j-re); különben **inhomogén**.

Tétel

A következők ekvivalensek

1. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ egy megoldás és
2. az egyenletrendszer homogén.

Definíció

Két egyenletrendszer **ekvivalens**, ha a megoldásaik halmaza megegyezik.

Példa

Az előző dián az első két egyenletrendszer ekvivalens, de a harmadik nem.

Tétel (Elemi sorműveletek)

A következő operációk ekvivalens egyenletrendszert eredményeznek

1. Két sor felcserélése,
2. Egy sor megszorzása egy nem nulla számmal és
3. Egy sor többszörösének hozzáadása egy másikhoz.

Példa

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ 2y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 8.5 \end{cases}$$

Megjegyzés

Érdemes az elemi sorműveleteket használni, és ezt valamilyen követhető formában dokumentálni. Egyszerre akár lehet több lépést is csinálni.

Példa

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \overset{(1)-2(2)}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = -11 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \overset{\substack{(2)-(1) \\ (2)/2}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = -11 \\ y = 8.5 \end{cases}$$

Vigyázz! (Hol a hiba?)

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y + z &= 4 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\substack{(1)-(2) \\ (2)-(3) \\ (3)-(1)}} \quad \begin{aligned} x - y \phantom{{}+z} &= 0 \\ y - z &= 0 \\ -x \phantom{{}-y} + z &= 0 \end{aligned}$$

Ez utóbbi megoldása az $x = y = z = 0$, pedig az eredetinek nem.

Definíció

A definícióban szereplő lineáris egyenletrendszer **mátrixa** (illetve **kibővített mátrixa**)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ill. } \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Megjegyzés

- A mátrixok később fogjuk pontosan definiálni – egyelőre tekintsük számok táblázatának.
- Ezzel tömörebb formában lehet számolni.

Példa (Az előző lineáris egyenletrendszerek mátrixokkal)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)-(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & 19 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 8.5 \end{array}\right)$$

Sorlépcsős alak

Definíció

- Egy mátrix **sorlépcsős alakú**, ha
  1. a csupa 0 sorok (ha egyáltalán vannak) az utolsók,
  2. bármely két egymást követő nem csupa 0 sor esetén a későbbi legalább eggyel több 0-val kezdődik.
- Egy sor első nemnulla eleme a **vezérelem**.

Példa (Melyek sorlépcsős alakúak?)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tétel

Bármely mátrix elemi sorműveletekkel sorlépcsős alakra hozható.

Megjegyzés

Néha érdemes lehet eltérni az algoritmikus megoldástól, ha észrevesszük, hogy szebb számokkal számolhatunk.

Gauss-elimináció = egyenletek megoldása ezzel a módszerrel

Példa

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(2)-2(1) \\ (3)-(1) \\ (4)-(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-\frac{1}{2}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-\frac{3}{2}(3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y + z &= 4 \\ -z &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Így az egyetlen megoldás az $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Definíció

Egy mátrix **redukált sorlépcsős alakú**,

1. ha sorlépcsős alakú,
2. minden vezérelem 1 (ekkor vezéregyesnek szokták hívni)
3. a vezéregyesek oszlopában minden más elem 0.

Tétel

1. Bármely mátrix elemi sorműveletekkel redukált sorlépcsős alakra hozható.
2. A végeredmény a megtett átalakítások módjától függetlenül mindig ugyanaz.

Definíció

Egy A mátrix redukált sorlépcsős alakja a fönti átalakítások végeredménye ennek a jele $\mathrm{rref}(A)$.
[redukált sorlépcsős alak = reduced row echelon form]

Gauss-elimináció 2.0 = egyenletek megoldása ezen a módon

Példa

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\dots} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2)-\frac{1}{2}(1)]{(1)-\frac{3}{2}(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3 \\ z &= -2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Így az egyetlen megoldás az $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Algoritmus a sorlépcsős alak eléréséhez – 1. oszlop

Példa

Oszlopról oszlopra haladva keresünk vezérelemet, és ennek segítségével kinullázuk az oszlop vezérelem alatti részét:

1*A* Ha az első oszlopban van nem 0 elem, azt sorcserével az első sorba visszük.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

1*B* Az első sor többszöröseit levonjuk a többiből úgy, hogy az első oszlop a vezérelem alatt már csupa nulla legyen.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3)-(1) \\ (2)-2(1)}} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Algoritmus a sorlépcsős alak eléréséhez – 2. oszlop

Példa

$2A$ Ezután a második oszlopban keresünk vezérelemet (egy olyan nem nulla elemet, aminek a sorában még nincs vezérelem), ezt sorcserével a legfelső olyan sorba visszük, ahova még kell.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$2B$ Az $1B$ lépéshez hasonlóan a második oszlopban lévő vezérelemmel kinullázuk az alatta levő elemeket.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3)+(2) \\ (4)-2(2)}} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Algoritmus a sorlépcsős alakhoz – általános lépés

Példa

3 Ha nincs vezérelem, akkor továbblépünk a következő oszlopra.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \emptyset & 5 \\ 0 & 0 & \emptyset & -9 \end{pmatrix}$$

k Általában, ha a $k-1$. oszlopig $l-1$ vezérelemet találtunk,

- A a k. oszlopban keresünk vezérelemet: egy olyan nemnulla elemet, ami nem az első $l-1$ sorban van. Ezt az l. sorba visszük és
- B ezzel kinullázzuk a k. oszlop vezérelem utáni részét (az $l+1$. sortól kezdve).

A példában $k = 4$ és $l = 3$:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)+9/5\cdot(3)} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmus a (redukált) sorlépcsős alakhoz

Példa

- Ha végigmegyünk az összes oszlopon, sorlépcsős alakot kapunk.
- A B lépésekben az összes elem nullázást lehet egyszerre végezni, ez mindig ekvivalens átalakítás.

A redukált sorlépcsős alakot úgy érhetjük el, hogy sorok szorzásával a vezérelemeket 1-re alakítjuk, és a segítségükkel kinullázzuk a vezérelemek fölötti részt is. A példában:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(2)} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{1} & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 5 & 7 \\ 0 & \underline{1} & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)/5} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 5 & 7 \\ 0 & \underline{1} & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1)-7(3) \\ (2)+4(3)}} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \underline{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Néha érdemes nem az algoritmus szerint csinálni

Példa

A módszer szerint:

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2/3(1)} \begin{pmatrix} \underline{3} & 1 \\ 0 & \underline{-1/3} \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)/3} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1/3 \\ 0 & \underline{-1/3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3(2)} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1/3 \\ 0 & \underline{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-1/3\cdot(2)} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{1} \end{pmatrix}$$

Ennél gyorsabb és szebb:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Példa (Nincs megoldás)

$$\begin{array}{rcl} x+\ \ y &=& 3\\ 3x+4y &=& 10\\ 2y &=& 4\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 10\\ 0 & 2 & 4\end{array}\right) \xrightarrow{(2)-3(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{(1)-(2)\\(3)-2(2)}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{rcl} x &=& 2\\ y &=& 1\\ 0 &=& 2 \ \lightning\end{array}$$

Példa (Végtelen sok megoldás)

$$\begin{array}{rcl} 2x+z &=& 4\\ y+z &=& 1\end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rcl} x+\frac{1}{2}z &=& 2\\ y+\ z &=& 1\end{array} \longrightarrow \begin{array}{rcl} x &=& 2-\frac{1}{2}z\\ y &=& 1-\ z\\ z &=& z\end{array}, \text{ minden } z\in\mathbb{R}\text{−re.}$$

A megoldások **vektoros alakja** $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

Definíció

Az x_k változó egy lineáris egyenletrendszerben **szabad**, ha a (redukált) sorlépcsős alakban a megfelelő oszlopban nincs vezérelem, különben **kötött**.

Tétel

Tekintsünk egy lineáris egyenletrendszert és a kibővített mátrixának (redukált) sorlépcsős alakját.

1. Ha van olyan sor, ami a mátrixban csupa nulla, de a kibővített mátrixban a konstans nem 0, akkor nincs megoldás.
2. Különben a szabad változóknak tetszőleges értéket választva pontosan egy megoldás van.

Megjegyzés

- Tehát a megoldások száma vagy 0, vagy 1, vagy ∞.
- Valós számok helyett $\mathbb{F}$ test felett ugyanez a helyzet, ha $|\mathbb{F}| = \infty$,
- Ha viszont $|\mathbb{F}| = q < \infty$, akkor a megoldások száma vagy 0, vagy q^s, ahol s a szabad változók száma.

Példa (Kis hiba az együtthatókban nagy eltérést adhat)

- $\begin{cases} 6.73x - 8.97y = 5.61 \\ 4.79x - 6.39y = 3.99 \end{cases} \implies \begin{array}{l} x = 1.5 \\ y = 0.5 \end{array}$
- $\begin{cases} 6.72x - 8.97y = 5.61 \\ 4.79x - 6.39y = 3.99 \end{cases} \implies \begin{array}{l} x = -2.26 \\ y = -2.32 \end{array}$
- $\begin{cases} 6.72x - 8.96y = 5.60 \\ 4.80x - 6.40y = 3.99 \end{cases} \implies$ nincs megoldás.
- $\begin{cases} 6.72x - 8.96y = 5.60 \\ 4.80x - 6.40y = 4.00 \end{cases} \implies$ végtelen sok megoldás van.

Megjegyzés

- Azaz a Gauss-elimináció numerikusan nem mindig túl jó: ha kicsit változtatunk az együtthatókon / konstansokon, az lényegesen változtathat az eredményeken.
- Ezen lehet több féle képen segíteni, de erről most nem tanulunk.

Vektorterek

Definíció

Legyen V egy halmaz amiben az egyik elem a $\underline{0} \in V$,
$+ : V \times V \to V$ és $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ adott műveletek. V **vektortér** (az előbbi műveletekkel), ha minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$-re és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$-re

1. $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$,
2. $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$,
3. $\underline{0} + \underline{v} = \underline{v}$,
4. van $\underline{v}^-$, hogy $\underline{v} + \underline{v}^- = \underline{0}$,
5. $(\alpha + \beta) \cdot \underline{v} = \alpha \cdot \underline{v} + \beta \cdot \underline{v}$,
6. $\alpha \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \alpha \cdot \underline{u} + \alpha \cdot \underline{v}$,
7. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \underline{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \underline{v})$ és
8. $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$.

Példa

- Síkbeli és térbeli vektorok a szokásos $+$ és $\cdot$ művelettel
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. De pl $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nem vektortér!
- $\{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvények$\}$ a szokásos műveletekkel
- $(\{$lehetséges bevásárlások a piacon$\}, +, \cdot)$ „majdnem” vektortér

Tétel

1. A definícióban szereplő $\underline{v}^-$ egyértelmű,
2. Ha $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u}$, akkor $\underline{v} = \underline{0}$,
3. $0 \cdot \underline{u} = \underline{0}$ és
4. $\underline{v}^- = (-1)\underline{v} =: -\underline{v}$

Definíció

$U \subset V$ egy **altér** (jele $U \leq V$), ha U nem üres, zárt az összeadásra és a szorzásra (azaz minden $\underline{u}, \underline{v} \in U$ és $\alpha \in \mathbb{R}$-re $\underline{u} + \underline{v}, \alpha\underline{u} \in U$).

Példa

$\{\underline{0}\}$ és $V \subset V$ a triviális alterek.
Az $\{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvények$\}$ vektortérben

- altér $\{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények$\}$
- altér $\{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ páros függvények$\}$,
- de nem altér $\{f : [0,1] \to \mathbb{R}$ pozitív függvények$\}$.

Tétel

Ha $U_1, U_2 \leq V$, akkor $U_1 \cap U_2 \leq V$.

Megjegyzés

A vektortér definíciójában $\mathbb{R}$ helyett bármilyen testet vehetünk (pl $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$-t, vagy az 5-ös maradékosztályokat – de $\mathbb{Z}$, vagy a 6-os maradékosztályok nem jók).

Definíció

- $\mathbb{R}^m$ a valós szám-m-esek halmaza vektortér a természetes (elemenkénti) összeadással és a (valós számmal) szorzással.
- $\mathbb{R}^{m \times n}$ a valós $m \times n$-es (m sor és n oszlop) számtáblázatok halmaza vektortér a természetes (elemenkénti) összeadással és a (valós számmal) szorzással.

Megjegyzés

$\mathbb{R}^m$ elemeit általában oszlopvektor formájában írjuk, vagy helytakarékosság miatt a következő módon:

$$(1, 2, 3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Generátor- és lineárisan független rendszerek

Definíció

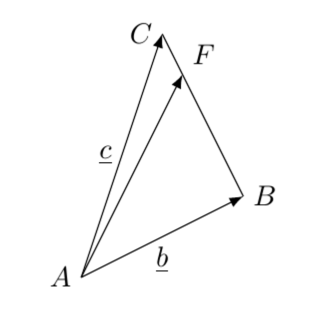
$\underline{w} \in V$ a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ vektorok **lineáris kombinációja**, ha $\underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n$ valamely $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ valós számokra.

Példa

Legyen F az ABC háromszög BC oldalát $x : y$ arányban felosztó pont. Ekkor

$$\overrightarrow{AF} = \frac{y}{x+y}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+y}\overrightarrow{AC}.$$

Tehát $\overrightarrow{AF}$ előáll $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ lineáris kombinációjaként.



Definíció

- A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ vektorok **által feszített altér** (**Span**ned subspace) a lineáris kombinációk halmaza: $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n) = \{\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n | \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$.
- $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ **generátorrendszer**, ha $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n) = V$.

Tétel

A feszített altér tényleg altér.

Példa

$\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ alterei.

Megjegyzés

- Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$ vektorok, ekkor az $x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + \cdots + x_n \cdot \underline{a}_n = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha $\underline{b} \in \mathrm{Span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$.
- Továbbá az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ pontosan akkor generátorrendszer, ha a (redukált) sorlépcsős alak minden sorában van vezérelem.

Definíció

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha
$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Különben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok **lineárisan összefüggők**.

Vigyázz!

Az, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ lin. független, nem azt jelenti, hogy $\underline{v}_1$ lin. független, és ugyanígy $\underline{v}_2$ és $\underline{v}_3$ is, hanem hogy a három vektorból álló rendszer lineárisan független.

Megjegyzés

- A $\underline{0}$-t tartalmazó vektorrendszerek lineárisan összefüggők.
- $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha az $x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + \cdots + x_n \cdot \underline{a}_n = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak a csupa 0 a megoldása, azaz ha nincs szabad változó (minden oszlopban van vezérelem).

Példa

$\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ lineárisan független vektorrendszerei.

Tétel

A következők ekvivalensek:

1. $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ lineárisan független
2. vagy $n = 1$ és $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, vagy $n > 1$ és semelyik sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Megjegyzés

Így ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor vagy legalább 2 elemű, vagy csak a 0 vektorból áll.

Tétel

Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ lineárisan függetlenek, és $\underline{w}$ előáll a $\underline{v}_i$-k lineáris kombinációjaként, akkor ez az előállítás egyértelmű.

Vigyázz!

Ezt máskor nem igaz, úgyhogy ne használd!

Definíció

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ vektorrendszer rangja a maximális lineárisan független részrendszer elemszáma.

Megjegyzés

Ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$, akkor ennek a vektorrendszernek a rangja az egyenletrendszer (redukált) sorlépcsős alakjában a vezérelemek száma.

Tétel

Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ egy vektorrendszer.

1. Ha elhagyunk, egy olyan vektort, ami előáll a többi lineáris kombinációjaként, akkor a rang nem változik.
2. Ha elhagyunk, egy olyan vektort, ami nem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor a rang eggyel csökken.
3. Ha hozzáveszünk egy olyan vektort, ami előáll a többi lineáris kombinációjaként, akkor a rang nem változik.
4. Ha hozzáveszünk egy olyan vektort, ami nem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor a rang eggyel nő.

Bázis és dimenzió

Definíció

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ **bázis**, ha lineárisan független generátorrendszer.

Példa

- $1 \in \mathbb{R}$ bázis,
- $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k} \in \mathbb{R}^3$ egy bázis,
- $1, x, x^2, x^3$ bázis a legfeljebb harmadfokú polinomok terében.

Tétel

Ha V vektortér, akkor minden bázis ugyanannyi vektort tartalmaz.

Tétel

Ha a bázisok elemszáma véges, akkor egy bázist kapunk

- bármely lineárisan független rendszerhez új független vektorok hozzáadásával és
- bármely generátorrendszerből függő vektorok elhagyásával.

Definíció

V **dimenziója** egy bázisának elemszáma. Jele $\dim(V)$.
Egy U altér dimenziója az altér bázisának elemszáma.

Megjegyzés

- Vannak végtelen dimenziós vektorterek, például a (végtelen) sorozatok vektrotere – ezekkel most nem fogunk foglalkozni.
- $\dim(\{\underline{0}\}) = 0$.

Tétel

Ha U altér V-ben, akkor

- $\dim(U) \leq \dim(V)$ és
- $\dim(U) = \dim(V) \iff U = V$.

Példa

$\mathbb{R}^4$-ben elfér két sík úgy, hogy csak egy pontban metszik egymást: $\{x = y = 0\}$ és $\{z = w = 0\}$.

Tétel

1. Egy n ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza altér $\mathbb{R}^n$-ben.
2. Egy n ismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer
   a. vagy nem megoldható,
   b. vagy a megoldásai $\underline{x}_p + \underline{x}_h$ alakúak, ahol $\underline{x}_p$ egy partikuláris megoldás és $\underline{x}_h$ a homogén egyenletrendszer megoldása.

Megjegyzés

Adott $\underline{v} \in V$ és $U \leq V$-re a $\underline{v} + U = \{\underline{v} + \underline{u} | \underline{u} \in U\}$ alakú halmazokat affin altereknek nevezik. Egy affin altér többféle módon leírható $\underline{v} + U$ alakban, $\underline{v}$ változhat, de U mindig ugyanaz.

Példa

- $\{z = 2x, w = x + y + z\} \leq \mathbb{R}^4$ egy bázisa.
- $\{z = 1 + 2x, w = x + y + z - 3\} \leq \mathbb{R}^4$, mint affin altér.

Tétel

Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ bázis, akkor minden $\underline{v} \in V$ vektor egyértelműen állítható elő $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n$ lineáris kombinációként $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R})$.

Definíció

A $\underline{v}$ vektor **koordinátái** a $B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ bázisban $[\underline{v}]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ a fenti α-kra.

Példa

- Ha $B = (\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \in \mathbb{R}^3$ a koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok, O az origó és P a hagyományos koordinátarendszerben (x, y, z) koordinátájú pont, akkor B egy bázis, és itt $\left[\overrightarrow{OP}\right]_B = (x, y, z)^T$.
- Legyen $C = ((1,1,1)^T, (1,2,3)^T, (1,4,9)^T) \in \mathbb{R}^3$ (ez tényleg bázis) és $\underline{v} = (0,2,3)^T$. Mi $[\underline{v}]_C$?

Tétel

$[\underline{v} + \underline{w}]_B = [\underline{v}]_B + [\underline{w}]_B$ és $[\lambda \underline{v}]_B = \lambda [\underline{v}]_B$.

Mátrixok

Definíció

- Egy m sort és n oszlopot ($n, m \in \mathbb{N}$) tartalmazó valós számtáblázatot $m \times n$-es (valós) **mátrix**-nak nevezünk.
- Az $m \times n$ valós mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{m \times n}$-el jelöljük.

Példa

Egy n ismeretlenes m egyenletből álló lineáris egyenletrendszer mátrixa egy mátrix $\mathbb{R}^{m \times n}$-ben.

Megjegyzés

- Egy mátrixra nézhetünk mint oszlop- (vagy sor-) vektoraira is.
- Egy mátrixot általában nagy betűvel jelölünk, az elemeit a megfelelő kis betűvel és indexekkel: ha A egy mátrix, akkor a_{11} a bal felső eleme. A legtöbb esetben az aláhúzott kis betű az oszlopvektort jelöli: $\underline{a}_1$ az A mátrix első oszlopvektora.

Definíció

Legyen R egy halmaz és $+, \cdot$ műveletek (azaz $+, \cdot : R \times R \to R$ függvények). $(R, +, \cdot)$ egy **gyűrű**, ha minden $a, b, c \in R$-re

	összeadás	szorzás
asszociatív	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(ab)c = a(bc)$
kommutatív	$a+b = b+a$	
egység	$\exists 0 \in R : 0 + a = a$	$\exists 1 \in R : 1 \cdot a = a = a \cdot 1$
inverz	$\exists(-a) : a + (-a) = 0$	
disztributív:	$a(b+c) = ab + ac$ és	$(a+b)c = ac + bc$.

Megjegyzés

- Angolul ring – ezért szokás R-rel jelölni.
- Minden test gyűrű. Ott a szorzás is kommutatív és minden nemnulla elemnek van multiplikatív inverze.
- $\mathbb{Z}$ és a hatos maradékosztályok halmaza is gyűrű.
- Mátrixoka tetszőleges gyűrű felett lehet értelmezni, az $m \times n$-es mátrixok halmaza $R^{m \times n}$.

Definíció

Legyen $\lambda \in R$ és $A, B \in R^{m\times n}$.

- $A + B \in R^{m\times n}$ az a mátrix, amelyre $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ és
- $\lambda A \in R^{m\times n}$ az a mátrix, amelyre $(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ minden $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq j \leq n$-re.

Megjegyzés

Így $(\mathbb{R}^{m\times n}, +, \cdot)$ egy mn dimenziós vektortér. Egy bázisa az E_{ij} mátrixok – amiknek az i. sorának j. eleme 1, a többi 0.

Definíció

- Egy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrix, amelyre $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ minden i, j-re.
- Egy $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix **adjungáltja** az az $A^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mátrix, amelyre $(A^*)_{ij} = \bar{a}_{ji}$ minden i, j-re.

Megjegyzés (Ez összhangban van az eddigiekkel:)

A $\underline{v}^T$ oszlopvektor a mátrix transzponáltja is az $\underline{v}$ sorvektornak.

Definíció

Legyen $A \in R^{m \times n}$ és $\underline{x} \in R^n = R^{n \times 1}$ egy oszlopvektor.
A **szorzat**uk a következő $R^m = R^{m \times 1}$-beli oszlopvektor:
$$A\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \cdots + x_n\underline{a}_n.$$

Példa

- Ha $(A|\underline{b})$ egy lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa, akkor írható mátrix alakban is: $A\underline{x} = \underline{b}$. Itt $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ az ismeretlenekből álló oszlopvektor. Ekkor az egyenletek a $\mathbb{R}^m$-beli vektorok sorainak felelnek meg.
- Legyen $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n)$ egy bázis $\mathbb{R}^n$-ben és jelöljük B-vel az oszlopvektorokból alkotott mátrixot $\mathbb{R}^{n \times n}$-ben. Ekkor $[\underline{v}]_B = \underline{x} \iff \underline{v} = B\underline{x}$.

Tétel

Minden $A \in R^{m \times n}$-re, $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$-re és $\lambda \in R$-re

1. $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y}$
2. $\lambda(A\underline{x}) = A(\lambda\underline{x})$.

Mátrixok szorzása

Definíció

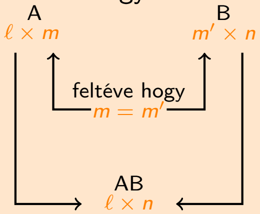
Ha $A \in R^{\ell \times m}$ és $B \in R^{m \times n}$, akkor $AB \in R^{\ell \times n}$ az a mátrix, amelyre

$$(AB)_{ij} = \sum_{t=1}^{m} a_{it} b_{tj}.$$

Megjegyzés

- Ez összhangban van az eddigiekkel: $A\underline{b}$ megegyezik az $A \in R^{m \times n}$ mátrix és a $\underline{b} \in R^{n \times 1}$ mátrix-szorzatával.
- Fontos, hogy a mátrixok összeillő méretűek legyenek:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{tj} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{it} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \quad & c_{ij} & \quad \end{pmatrix} \end{array}$$



Megjegyzés

- A szorzás nem kommutatív:
$$\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\4 & 10\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$$
Sőt az is előfordulhat hogy AB értelmes, de BA nem.
- A szorzat akkor is lehet 0, ha tagok nem 0-k:
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

Tétel

Legyenek A, B és C mátrixok és λ skalár ($\in R$).
Ha a következő kifejezések értelmesek, akkor megegyeznek:

1. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,
2. $A(B + C) = AB + AC$ és $(A + B)C = AC + BC$,
3. $(AB)C = A(BC)$.
4. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$ illetve $(\lambda \cdot A)^* = \lambda \cdot A^*$,
5. $(A + B)^T = A^T + B^T$ illetve $(A + B)^* = A^* + B^*$ és
6. $(AB)^T = B^T A^T$ és $(AB)^* = B^* A^*$.

Definíció

- $A \in R^{m \times n}$ **négyzetes** mátrix, ha $n = m$,
- az $m \times n$-es **nulla mátrix** az a $0 = 0_{m \times n} \in R^{m \times n}$, amelynek minden eleme $0 \in R$ és
- az $n \times n$-es **egységmátrix** az az $I_n \in R^{n \times n}$, amelyre
$$(I_n)_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}.$$

Megjegyzés

- Ha $A \in R^{m \times n}$, akkor $A = A + 0$ és $(-1)A + A = 0$,
- ha $A \in R^{m \times n}$, akkor $A = I_m A = A I_n$,
- így az előbbi dián lévő tétel első három állítása miatt $(R^{n \times n}, +, \cdot)$ egy gyűrű,
- de $(R^{m \times n}, +, \cdot)$ nem, ha $m \neq n$ (a szorzás nem is művelet).
- Négyzetes mátrixokat lehet hatványozni: $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ ($n \in \mathbb{N}$ darab tényezővel). Ekkor $A^{m+n} = A^m A^n$ és $(A^m)^n = A^{mn}$, de $(AB)^n \neq A^n B^n$.

Mátrixok rangja

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- Az A mátrix **oszloptere** $\mathcal{O}(A) = \mathrm{Span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) \leq \mathbb{R}^m$, azaz az oszlopvektorai által feszített altér.
- Hasonlóan A **sortere** $\mathcal{S}(A) \leq \mathbb{R}^n$ a sorvektorok által feszített altér.

Tétel

1. $\mathcal{O}(A)$ egy bázisa A azon oszlopvektorai, amik A sorlépcsős alakjában a vezérelemekhez tartoznak.
2. $\mathcal{S}(A)$ egy bázisa A (redukált) sorlépcsős alakjában azon sorvektorok, amikben van vezérelem.

Megjegyzés

Az elemi sorműveletek nem változtatnak a sortéren, de az oszloptéren igen!

Definíció

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ **rangja** $r(A) = \dim(\mathcal{O}(A))$.

Példa

- Határozzuk meg $r(A)$-t, $\mathcal{O}(A)$ és $\mathcal{S}(A)$ egy bázisát. Mik az oszlopvektorok koordinátái az előbbi bázisban?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Mi a következő mátixok rangja?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & .\cdot\kern-0.1em{}^{\cdot} & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \dots & n^2 \end{pmatrix}$$

Tétel

$r(A) = \dim(\mathcal{O}(A)) = \dim(\mathcal{S}(A)) = \#(\text{vezérelemek rref}(A) - \text{ban}) = \#(\text{nemnulla sorok rref}(A) - \text{ban})$.

Megjegyzés

Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor $r(A) \leq \min(m, n)$.

Tétel

Let $A, B \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ and $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Then

1. $r(A^T) = r(A)$,
2. $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ és
3. $r(AC) \leq \min(r(A), r(C))$.

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ és tekintsük az $(A|\underline{b})$ kibővített mátrixú lineáris egyenletrendszert.

1. Az egyenletrendszer megoldható $\iff$ $r(A) = r(A|\underline{b})$ és
2. pontosan egy megoldás van $\iff$ $r(A) = r(A|\underline{b}) = n$.

Mátrixok inverze

Definíció

Legyen R egy gyűrű és $a \in r$. Ekkor

- $b \in R$ az a elem **bal inverze**, ha $ba = 1$.
- $c \in R$ az a elem **jobb inverze**, ha $ac = 1$.
- $a \in R$ **invertálható**, ha van bal és jobb inverze is.

Példa

- $2 \in \mathbb{R}$ inverze $1/2$, de $2 \in \mathbb{Z}$ nem invertálható.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$-nak nincs semelyik oldali inverze.
- Van olyan gyűrű és olyan elem, aminek csak egyik oldali inverze van. Sőt az is előfordulhat, hogy több különböző is.

Tétel

Ha $a \in R$ invertálható, akkor a(z egyetlen) bal inverze megegyezik a(z egyetlen) jobb inverzével (és akkor ezt hívjuk a inverzének).

Definíció

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverzét A^{-1}-el jelöljük (ha egyáltalán létezik).

Tétel

1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pontosan akkor invertálható, ha $r(A) = n$ és
2. ekkor az inverzét megkaphatjuk Gauss-eliminációval: az $(A|I_n)$ kibővített mátrixra az eredmény $(I_n|A^{-1})$.

Megjegyzés

- Ha A nem négyzetes, akkor nincs inverze.
- Ha A négyzetes és van féloldali inverze, akkor invertálható is.

Példa

Számoljuk ki az alábbi mátrixok inverzét (ha létezik)!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Példa (Ez mátrixegyenlet-megoldásra is használható:)

Mi az $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixegyenlet megoldása?

Tétel

Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertálhatók és $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Ekkor

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,
2. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1} = (1/\lambda)A^{-1}$,
3. AB is invertálható és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, speciálisan $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, ha $k \in \mathbb{N}$ és
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(C^*)^{-1} = (C^{-1})^*$

Definíció

Legyen $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n)$ és $C = (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n)$ az $\mathbb{R}^n$ két bázisa, és jelölje B és C a bázisvektorokból álló mátrixot is. Ekkor a $T_{C \leftarrow B} = C^{-1}B$ mátrixot **transzformációmátrix**nak nevezzük. (Ez létezik, hiszen B bázis, tehát $r(B) = \dim(\mathcal{C}(B)) = n$).

Tétel

1. Tetszőleges $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $[\underline{v}]_C = T_{C \leftarrow B}[\underline{v}]_B$.
2. Ha E a hagyományos bázis, akkor $T_{E \leftarrow B} = B$.
3. $T_{B \leftarrow C} = T_{C \leftarrow B}^{-1}$, speciálisan $T_{B \leftarrow E} = B^{-1}$.
4. Ha D is egy bázis, akkor $T_{D \leftarrow B} = T_{D \leftarrow C} T_{C \leftarrow B}$.

Példa

Mi $P(0{,}2{,}3)$ képe az $x = y = z$ tengely körüli 180°-os forgatás után?

A megoldás lépései:

1. Keresni egy kényelmes B bázist és kiszámolni a $T_{E \leftarrow B}$ és $T_{B \leftarrow E}$ mátrixokat.
2. Kiszámolni $[\underline{p}]_B = T_{B \leftarrow E}\underline{p}$-t ($\underline{p} = (0, 2, 3)^T$).
3. Meghatározni a képet ebben a bázisban: $[\underline{q}]_B$.
4. Kiszámolni $\underline{q} = T_{E \leftarrow B}[\underline{q}]_B$-t.

Példa

1. A $B = \big(\underline{t} = (1,1,1)^T, \underline{u} = (0,1,-1)^T, \underline{v} = (1,0,-1)^T\big)$ bázis „kényelmes", hiszen $\underline{t}$ párhuzamos a tengellyel, $\underline{u}$ és $\underline{v}$ pedig merőlegesek rá.

$$T_{E\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, T_{B\leftarrow E} = T_{E\leftarrow B}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \overset{\substack{(2)-(1)\\(3)-(1)}}{\Longrightarrow} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \overset{(3)+(2)}{\underset{-(3)/3}{\Longrightarrow}}$$

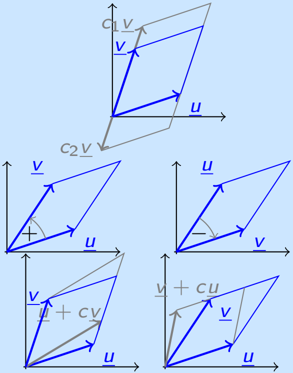
$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \overset{\substack{(1)-(3)\\(2)+(3)}}{\Longrightarrow} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}$$

2. $[\underline{p}]_B = T_{B\leftarrow E}\,\underline{p} = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3})^T$.
3. $[\underline{q}]_B = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3})^T$, hiszen a forgatásnál $\underline{t} \mapsto \underline{t}$, $\underline{u} \mapsto -\underline{u}$ és $\underline{v} \mapsto -\underline{v}$.
4. $\underline{q} = T_{E\leftarrow B}[\underline{q}]_B = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})^T$, így a kép $Q(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$.

Determinánsok

Emlékeztető (Parallelogrammák előjeles területe)

Legyen $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}, \underline{v}$ oldalú parallelogramma területe. Ekkor



1. $t(c\underline{u}, \underline{v}) = ct(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, c\underline{v})$
2. $t(\underline{u}, \underline{v}) = -t(\underline{v}, \underline{u})$
3. $t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u} + c\underline{v}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v} + c\underline{u})$
4. $t(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = 1.$

Példa

Mi a $(2, 5), (-3, 1)$ oldalú paralellogramma területe?

Tétel

Minden $n \in \mathbb{N}$-re egyetlen olyan $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvény létezik, amelyre ha B az a mátrix, amit A-ból

1. az egyik sor c-szerezésével kapunk, akkor $\det(B) = c\det(A)$,
2. két sor felcserélésével kapunk, akkor $\det(B) = -\det(A)$,
3. az egyik sorához egy másik sor többszörösének hozzáadásával kapunk, akkor $\det(B) = \det(A)$,
4. $\det(I_n) = 1$.

Megjegyzés

A sorok helyett lehetet(ne) oszlopműveleteket is csinálni.

Definíció

A fenti függvény a **determináns**, egy A mátrix determinánsát $\det(A)$-val vagy $|A|$-val jelöljük.

Vigyázz!

Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa.

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- A **főátlója** az a_{ii} elemek,
- A **diagonális**, ha $a_{ij} = 0$ minden $i \neq j$-re,
- A **felső háromszögmátrix**, ha $a_{ij} = 0$ minden $i > j$ esetén és
- A **alsó háromszögmátrix**, ha $a_{ij} = 0$ minden $i < j$ esetén.

Tétel

Ha A diagonális, vagy hármszögmátrix (alsó vagy felső), akkor $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ – azaz a főátlóbeli elemek szorzata.

Példa

Mennyi $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ and $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$?

Megjegyzés

- A determináns kiszámolható Gauss-eliminációval (sorok szorzása nélkül). Ha a kapott sorlépcsős mátrix B és k sorcserére volt szükség, akkor $\det(A) = (-1)^k \det(B)$.
- Sorokat is lehet szorozni, de akkor ezt érdemes könyvelni.
- Ez bizonyítja, hogy ha létezik a determináns, akkor egyértelmű.

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A következők ekvivalensek:

1. $\det(A) \neq 0$,
2. A invertálható,
3. $r(A) = n$,
4. $\mathrm{rref}(A) = I_n$,
5. az $A\underline{x} = \underline{0}$ egyenletnek csak az $\underline{x} = 0$ a megoldása és
6. az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletnek minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$-re van megoldása.

Tétel

Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
3. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, ha A invertálható
4. $\det(A^T) = \det(A)$.

Vigyázz!

- $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$!
  Sőt $\det(A+B)$ nem is fejezhető ki $\det(A)$ és $\det(B)$ segítségével:
  Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
  Ekkor $\det(A) = \det(B) = \det(A') = \det(B') = \det(A' + B') = 0$, de $\det(A+B) = 1$.
- $\det(C^*) = \overline{\det(C)}$, ha $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Permutációk és inverziók

Definíció

Legyen π az $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációja (azaz egy $\pi : S \to S$ bijektív függvény). $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)$-vel jelöljük.

- Az $(i, j) \in S^2$ pár **inverzióban van** π-ben, ha $i < j$ és $\pi(i) > \pi(j)$.
- π **inverziószáma** az inverzióban lévő párok száma. A jele $i(\pi)$.
- π **páros** (ill. **páratlan**) ha $i(\pi)$ páros (ill. páratlan).

Példa

- Mennyi $i(3241)$?
- Mi az inverzióban lévő párok maximális száma $\{1, 2, \ldots, 6\}$ permutációinál?
- Keress olyan π permutációját $\{1, 2, \ldots, 6\}$-nak, hogy $i(\pi) = 7$!

Definíció

- $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **permutációmátix**, ha minden sorában és minden oszlopában egyetlen 1-es van, a többi elem 0.
- Ezek bijekcióban vannak az $\{1, 2, \ldots, n\}$ permutációival: π-nek az a mátrix felel meg, amelyre $p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi(i) = j \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$.

Példa

- Mi a (345126)-nek megfelelő permutációmátrix?
- Mi a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$-nak megfelelő permutáció?

Tétel

1. Permutációmátrixok szorzata permutációmátrix.
2. Legyen P a π-nek megfelelő mátrix. Ekkor $\det(P) = (-1)^{i(\pi)}$.

Tétel

Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, akkor $\det(A) = \sum_{\pi} (-1)^{i(\pi)} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)}$, ahol a szumma $S = \{1, 2, \dots, n\}$ permutációin összegez.

Megjegyzés

- Ha $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, akkor $\det(A) \in \mathbb{Z}$ – ez eddig nem látszott.
- Ezt $R^{n\times n}$-re is meg lehet csinálni, ha R kommutatív gyűrű (azaz a szorzás kommutatív), nem csak valósakra.

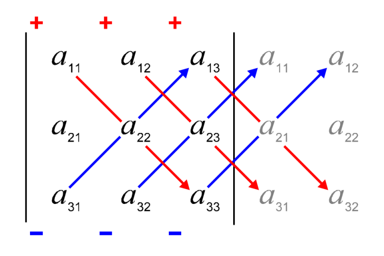
Példa

Mennyi $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$?

Megjegyzés

- 2×2-es determinánsok: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Sarrus-szabály ($= 3 \times 3$-as determinánsok):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Példa

Mennyi $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ és $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$?

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $1 \leq i, j \leq n$. Az (i, j)-hez tartozó **előjeles aldeterminráns** az $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A')$, ahol A' az az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix, amit úgy kapunk A-ból, hogy elhagyjuk az i. sort és a j. oszlopot.

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + & - & + \end{matrix}$$

Tétel

1. Ha az A mátrix i. sorában az egyetlen nemnulla elem a_{ij}, akkor $\det(A) = a_{ij} A_{ij}$.
2. Ugyanígy, ha a j. oszlopban az egyetlen nemnulla elem a_{ij}, akkor $\det(A) = a_{ij} A_{ij}$.

Példa

Mennyi $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$?

Tétel (Determinánsok kifejtése)

Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $1 \le i \le n$, akkor

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.$$

Példa

- Az első sor szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$(2-28) - 0 + 2(7-6) = -24.$$

- Számoljuk ki újra $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$-t kifejtéssel!

Példa

Érdemes a tanult technikákat kombinálni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -10 & 8 & 3 \\ -11 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -98.$$

Tétel (Rang számolása determinánsokkal)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ekkor $r(A)$ a legnagyobb olyan r szám, amire A-nak van $r \times r$-es, nemnulla determinánsú részmátrixa.
(A részmátrix egy olyan mátrix, amit az eredetiből néhány sor és oszlop elhagyásával kapunk)

Példa

Mennyi az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix rangja?

Tétel (Inverz számolása determinánsokkal)

Ha A invertálható, akkor $(A^{-1})_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\det(A)}$, ahol A_{ji} a nemrég definiált előjeles aldetermináns.

Megjegyzés

Speciálisan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ha $ad - bc \neq 0$.

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, amelynek az oszlopvektorai $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots \underline{a}_n$ és legyen $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Legyen $A_{j,\underline{b}} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_{j-1}, \underline{b}, \underline{a}_{j+1}, \ldots \underline{a}_n)$ – a mátrix, amit úgy kapunk A-ból, hogy a j. oszlopot kicseréljük $\underline{b}$-re.

Tétel (Cramer-szabály)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlet egyetlen megoldásának koordinátái $x_j = \dfrac{\det(A_{j,\underline{b}})}{\det(A)}$.

Lineáris leképzések

Definíció

Legyen V és W (valós) vektorterek. Egy $A : V \to W$ függvény (vagy más szavakkal leképezés, operátor) **lineáris**, ha

1. $A(\underline{u} + \underline{v}) = A(\underline{u}) + A(\underline{v})$ minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$-re és
2. $A(\lambda \underline{v}) = \lambda A(\underline{v})$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$-re és $\underline{v} \in V$-re.

Ha $V = W$, akkor A-t lineáris **transzformáció**nak nevezzük.

Megjegyzés

$A(\underline{0}) = A(0 \cdot \underline{0}) = 0 \cdot A(\underline{0}) = \underline{0}$.

Példa

- $\mathbb{R}^3$ origót fixen hagyó tükrözései és forgatásai lineárisok.
- Az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ vetítése lineáris.
- A deriválás, mint $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények$\} \to \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények$\}$ operátor lineáris.

Tétel

Tetszőleges $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ vektorokhoz egyetlen olyan $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(\underline{e}_j) = \underline{a}_j$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$-re (itt $\underline{e}_k \in \mathbb{R}^n$ a sztenderd bázisvektorok).

Definíció

Az $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés **(sztenderd) mátrix**a az az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, aminek j. oszlopa $A(\underline{e}_j)$. Ekkor $A(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$.

Megjegyzés

Így az $m \times n$ mátrixok természetes módon megfelelnek az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképzéseknek, tehát írhatunk $A = A$-t.

Példa

Mi a következő lineáris leképezések mátrixa?

- a z-tengely körüli $+\alpha$ szögű forgatás a térben,
- a tér vetítése a síkra: $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ és

Mi a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$-nak megfelelő lineáris transzformáció a síkon?

Definíció

Legyen $A : V \to W$ lineáris leképzés.

- A **képtere** ([Image]) az $\mathrm{Im}(A) = \{A(\underline{v}) | \underline{v} \in V\} \subset W$ halmaz.
- A **magtere** ([Kernel]) a $\mathrm{Ker}(A) = \{\underline{v} \in V | A(\underline{v}) = \underline{0}\} \subset V$.
- A **rang**ja a mátrixának rangja.

Megjegyzés (A mátrixok nyelvén:)

- $\mathrm{Ker}(\underline{x} \mapsto A\underline{x}) = \{\underline{x} | A\underline{x} = \underline{0}\}$ – a homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza,
- $\mathrm{Im}(\underline{x} \mapsto A\underline{x}) = \mathcal{O}(A)$ – A oszloptere.

Tétel

1. $\mathrm{Im}(A) \leq W$ és $\mathrm{Ker}(A) \leq V$ (alterek).
2. A szürjektív $\iff \mathrm{Im}(A) = W$.
3. A injektív $\iff \mathrm{Ker}(A) = \{\underline{0}\}$.

Példa

Mi az $x + 2y + 3z = 0$ síkra merőleges vetítés képtere és magtere?

Tétel (Dimenzió-tétel)

Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor
$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Megjegyzés

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$. Ekkor $\mathrm{Ker}(A)$ egy bázisa a homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldásában a szabad változókhoz tartozó oszlopvektorok.

Példa

Legyen $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$-hoz tartozó lineáris leképezés. Keressünk egy-egy bázist a képterében és a magterében!

Tétel

Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció. Ekkor a következők ekvivalensek:

1. A-nak van inverze (tehát egy olyan B függvény, amire $A \circ B = B \circ A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$),
2. A mátrixa invertálható,
3. $\mathrm{Ker}(A) = 0$ és
4. $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

Megjegyzés (Végtelen dimenzióban ez nem igaz)

Legyen V a végtelen sorozatok vektortere (a szokásos $+, \cdot$-al),
A a jobbra tolás ($(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$) és
B a balra tolás ($(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2, a_3, a_4, \dots)$).
Ekkor $A : V \to V$ és $B : V \to V$ lineáris, A injektív, de nem szürjektív, B szürjektív, de nem injektív és $B \circ A = \mathrm{id} \neq A \circ B$, hiszen az utóbbi „elfelejti” az első tagot.

Definíció

Legyen $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n)$ a V vektortér egy bázisa, $A : V \to V$ egy lineáris transzformáció. A **mátrixa a** B **bázisban** az az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, aminek a j. oszlopa a $[A(\underline{b}_j)]_B$ koordinátavektor.

Megjegyzés

- Ez kompatibilis a sztenderd mátrixszal, hiszen A sztenderd mátrixa $[A]_E$ (ahol $E = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$ a sztenderd bázis).
- Ha $B : V \to W$ lineáris leképezés, akkor is csinálhatunk hasonlót, csak külön kell egy-egy bázist rögzíteni V-ben és W-ben.

Tétel

1. Ekkor minden $\underline{x} \in V$-re $[A(\underline{x})]_B = [A]_B[\underline{x}]_B$.
2. Ha C egy másik bázis, $T_{B\leftarrow C}$ és $T_{C\leftarrow B}$ a megfelelő transzformációmátrixok, akkor $[A]_C = T_{C\leftarrow B}[A]_B T_{B\leftarrow C}$.

Példa (Egy már ismerős példa)

Kérdés: Mi az $x = y = z$ tengely körüli 180°-os forgatás mátrixa? Mi a $P(0,2,3)$ pont képe a forgatás után?
Volt: $B = \left(\underline{t} = (1,1,1)^T, \underline{u} = (0,1,-1)^T, \underline{v} = (1,0,-1)^T\right)$ bázis „kényelmes”, és itt a transzformációmátrixok:

$$T_{E\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, T_{B\leftarrow E} = T_{E\leftarrow B}^{-1} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A forgatás mátrixa a B bázisban $[A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, hiszen $\underline{t}$ párhuzamos a tengellyel, $\underline{u}$ és $\underline{v}$ pedig merőlegesek rá. Így

$$A = [A]_E = T_{E\leftarrow B}[A]_B T_{B\leftarrow E} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Speciálisan a $\underline{p} = (0,2,3)^T$ képe helyvektora
$\underline{q} = A\underline{p} = \frac{1}{3}(10,4,3)^T$, tehát P képe a forgatás után $Q(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$.

Megjegyzés

Az eddigiek alapján meg tudjuk határozni egy geometriai transzformáció mátrixát. De hogyan lehet eldönteni egy mátrixról, hogy milyen jellegű transzformációhoz tartozik?

Példa

Milyen leképezés (sztenderd) mátrixa $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$?

Megjegyzés

Legyen A a sík, vagy a tér egy lineáris transzformációja (vagy a mátrixa).

- A tükrözés $\iff$ $A^2 = I$,
- A vetítés $\iff$ $A^2 = A$,
- A egybevágóság $\iff$ $A^T A = I$ és
- A irányítástartó egybevágóság $\iff$ $A^T A = I$ és $\det(A) > 0$.

Sajátvektorok és sajátértékek

Definíció

Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció, vagy a mátrixa.

- $\underline{v} \neq \underline{0}$ a A **sajátvektor**a, ha van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$.
- $\lambda \in \mathbb{R}$ az A egy **sajátérték**e, ha van hozzá tartozó saját vektor (tehát $\underline{v} \neq 0$, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$).
- A λ sajátértékhez tartozó **saját altér** a $\{\underline{v} \in \mathbb{R}^n | A\underline{v} = \lambda\underline{v}\}$ (tehát a λ-hoz tartozó sajátvektorok és a $\underline{0}$).

Tétel

A saját alterek tényleg alterek.

Példa

Mik az alábbi mátrixok sajátvektorai, sajátértékei és saját alterei?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definíció

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix **karakterisztikus polinom**ja

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Tétel

λ sajátértéke A-nak $\iff$ $k_A(\lambda) = 0$.

Megjegyzés (Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása)

- A karakterisztikus polinom gyökei a sajátértékek.
- Minden λ sajátértékre a hozzá tartozó sajátvektorok az $(A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0}$ egyenlet $\underline{0}$-tól különböző megoldásai. (ilyenek vannak, hiszen $\det(A - \lambda I) = 0$)
- A invertálható $\iff$ 0 nem sajátérték.

Példa

Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sajátértékeit és sajátvektorait!

Tétel (A sík és a tér lineáris transzformációi)

1. Legyen $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris. Ekkor ha $k_A(\lambda)$-nak
   a) egy kétszeres gyöke van, akkor ha A vagy a sík nyújtása (a saját altér 2Ds), vagy egy nyírás és nyújtás kompozíciója (a saját altér 1Ds),
   b) két különböző valós gyöke van, akkor A a sík nyújtása („a két független sajátvektor irányában a két sajátértékkel"),
   c) két különböző nem valós gyöke van (λ és $\bar{\lambda}$), akkor A a sík forgatvanyújtása: a forgatás szöge $\pm\arg(\lambda)$, a nyújtás mértéke $|\lambda|$.
2. Legyen $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris. Ekkor ha $k_B(\lambda)$-nak
   a) van többszörös gyöke, akkor B nyújtások és nyírások kompozíciója,
   b) három különböző valós gyöke van, akkor a tér nyújtása („a három független sajátvektor irányában a három sajátértékkel"),
   c) ha van nem valós gyöke, akkor egy forgatvanyújtás (mint 2Dben) és a tengely (saját altér) irányában még egy nyújtás kompozíciója.

Megjegyzés (A sík és a tér transzformációi)

A hagyományos (affin) transzformációk megkaphatók, ha még egy eltolást is megengedünk.

Tétel

Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok, B invertálható és $A' = B^{-1}AB$, akkor

1. $k_A(\lambda) = k_{A'}(\lambda)$
2. $\underline{v}$ az A' mátrix λ-hoz tartozó sajátvektora $\iff$ $B\underline{v}$ az A mátrix λ-hoz tartozó sajátvektora

Definíció

Az $A, A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok **hasonlók** ($A \sim A'$), ha van olyan invertálható B mátrix, amelyre $A' = B^{-1}AB$. Ekkor a megfelelő lineáris transzformációkra $A' = [A]_B$ - tehát ez egy bázisváltás.

Tétel

Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció.

1. Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok, akkor lineárisan függetlenek.
2. Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ egy λ sajátértékhez tartozó lineárisan független saját vektorok, akkor k legfeljebb akkora, ahányszoros gyöke λ a karakterisztikus polinomnak.

Tétel

Ha $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációhoz, van $\mathbb{R}^n$-nek A sajátvektoraiból $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n)$ álló bázisa, akkor $[A]_B = B^{-1}AB$ diagonális és a főátló a $\underline{b}_j$-khez tartozó λ_j sajátértékeket tartalmazza.

Példa (Gyors mátrixhatványozás)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^n = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^n =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 3^n - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}.$$

Tétel (Cayley-Hamilton tétel)

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor $k_A(A) = 0$ – tehát a mátrixot beírva a karakterisztikus polinomjába (a konstans helyére I_n-t írva) a 0 mátrixot kapjuk.

Példa

Bizonyos mátrixok kisebb fokú polinomba behelyettesítve is a 0-t adják:

- Az I_n mátrix az $x - 1$-be helyettesítve 0-t ad.
- A tükrözésekre $A^2 = I$, tehát az $x^2 - 1$-be helyettesítve 0-t adnak,
- A vetítésekre $A^2 = A$, tehát az $x^2 - x$-be helyettesítve 0-t adnak.

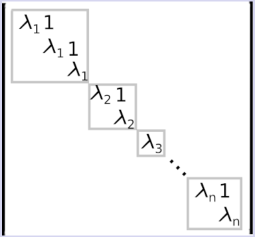
Megjegyzés (Mátrix exponenciális)

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \ldots,$$

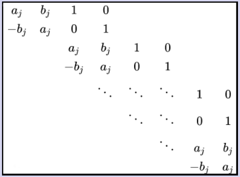
a soroknál látni fogjuk, hogy miért.

Tétel (Jordan-féle normálalak)

1. $\mathbb{C}$ felett:
Minden $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix hasonló egy olyan alakúhoz, mint az ábrán.
Az üres helyeken 0-k vannak, a $\lambda_i \in \mathbb{C}$-k a sajátértékek, de nem feltétlenül különbözőek. A bekeretezett részeket Jordan-blokkoknak nevezik.



2. $\mathbb{R}$ felett:
Minden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix hasonló egy olyan alakúhoz, mint a fenti ábrán, csak a nem valós sajátértékekhez tartozó Jordan blokkok olyan alakúak, mint itt.



Példa (Hány tengelyt nyírunk)

Ha $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ olyan, hogy $k_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$, akkor az alábbiak közül pontosan az egyikhez hasonló:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Skaláris szorzatok

Definíció

Legyen V egy valós vektortér. A $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ függvény **skaláris szorzat** (vagy **belső szorzat**), ha minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$-re és $\lambda \in \mathbb{R}$-re

1. $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$,
2. $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$, és $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0 \iff \underline{u} = \underline{0}$,
3. $\langle \lambda \underline{u}, \underline{v} \rangle = \lambda \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ és
4. $\langle \underline{u}, \underline{v} + \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle$.

Példa

- $\mathbb{R}^n$ egy skaláris szorzata $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$, a sztenderd skaláris szorzat.
- $\{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ folytonos}\}$ vektortér egy skaláris szorzata
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

Definíció

Legyen V egy komplex vektortér. A $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ függvény **skaláris szorzat** (vagy **belső szorzat**), ha minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$-re és $\lambda \in \mathbb{C}$-re

1. $\langle\underline{u}, \underline{v}\rangle = \overline{\langle\underline{v}, \underline{u}\rangle}$,
2. $\langle\underline{u}, \underline{u}\rangle \geq 0$, és $\langle\underline{u}, \underline{u}\rangle = 0 \iff \underline{u} = \underline{0}$,
3. $\langle\bar{\lambda}\underline{u}, \underline{v}\rangle = \lambda\langle\underline{u}, \underline{v}\rangle = \langle\underline{u}, \lambda\underline{v}\rangle$ és
4. $\langle\underline{u}, \underline{v} + \underline{w}\rangle = \langle\underline{u}, \underline{v}\rangle + \langle\underline{u}, \underline{w}\rangle$.

Megjegyzés

- A másodiknak csak az első miatt van értelme: $\langle\underline{u}, \underline{u}\rangle = \overline{\langle\underline{u}, \underline{u}\rangle}$, tehát $\langle\underline{u}, \underline{u}\rangle$ valós, így értelmes a $\langle\underline{u}, \underline{u}\rangle \geq 0$ kifejezés.
- A harmadik helyett általában a következő szokott lenni:

  3*. $\langle\lambda\underline{u}, \underline{v}\rangle = \lambda\langle\underline{u}, \underline{v}\rangle = \langle\underline{u}, \bar{\lambda}\underline{v}\rangle$,

  de nekünk most a fenti kényelmesebb.

Példa

$\mathbb{C}^n$ egy skaláris szorzata $\langle\underline{u}, \underline{v}\rangle = \underline{u}^*\underline{v} = \overline{\underline{u}_1}\underline{v}_1 + \overline{\underline{u}_2}\underline{v}_2 + \cdots + \overline{\underline{u}_n}\underline{v}_n$.

Megjegyzés

- Ha a sztenderd bázis helyett egy $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)$ bázisban csináljuk ugyanezt, tehát $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_B = [\underline{u}]_B^T [\underline{v}]_B$, akkor a hagyományos koordinátákkal (és így $\underline{u} = B[\underline{u}]_B$-vel)
$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_B = (B[\underline{u}]_E)^T (B[\underline{v}]_E)^T = [\underline{u}]_E^T (B^T B)[\underline{v}]_E.$$
(Illetve komplex esetben $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_B = [\underline{u}]_E^* (B^* B)[\underline{v}]_E$).
- $W = B^T B$-t, vagy $W = B^* B$-t súlymátrixnak nevezik [**w**eight]. Ekkor $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_B = \underline{u}^T W \underline{v}$ (illetve $\underline{u}^* W \underline{v}$).
- Ebből látszik, hogy minden vektortéren végtelen sok skaláris szorzat van.
- Hasonlóan az $\{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f$ folytonos $\}$ függvények vektorterén gyakran egy súlyfüggvénnyel definiálják a skaláris szorzatot: $w : [a, b] \to \mathbb{R}$, $w \geq 0$-ra
$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x) g(x) w(x)\, dx.$$

Megjegyzés

A vektorterekben nincs értelme a hossznak és szögnek. Egy skaláris szorzat segítségével viszont lehet hosszt (azaz normát) és szöget definiálni:

- $\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}$ és
- $(\underline{u}, \underline{v})\measuredangle = \arccos\left(\dfrac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|}\right)$,

ha az utóbbi egyáltalán értelmes. (Mi lehet a baj?)

Példa

- Mi az $(1, 2, 3, 4)^T$ és $(1, 0, 0, -1)^T \in \mathbb{R}^4$ vektorok hossza és szöge (a sztenderd skaláris szorzatra nézve)?
- Mi az $f(x) = x$ és $g(x) = x^2$, mint $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények hossza és szöge az előbbi skaláris szorzatra nézve?

Tétel (Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség)

Ha $\langle \cdot, \cdot \rangle$ egy skaláris szorzat a V vektortéren, akkor minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$-re

$$|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle|^2 \leq \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

Normák

Definíció

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ **norma**, ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$-re és λ skalárra

1. $\|\underline{u}\| \geq 0$ és $\|\underline{u}\| = 0 \iff \underline{u} = \underline{0}$,
2. $\|\lambda \underline{u}\| = |\lambda| \, \|\underline{u}\|$ és
3. $\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Tétel

Ha $\langle \cdot, \cdot \rangle$ egy skaláris szorzat V-n, akkor $\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}$ egy norma.

Példa

- Ha $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \underline{v}$, akkor a megfelelő norma a sztenderd norma.
- Ha $\langle f, g \rangle = \int f(x) g(x)$, akkor $\|f\| = \int f^2(x)\, dx$ az L^2-norma.

Megjegyzés

Ha V véges dimenziós, akkor minden norma már ismert skaláris szorzatból jön. Ha végtelen dimenziós, akkor van több is (pl L^0, L^1 és L^∞ normák).

Definíció

Legyen V egy vektortér $\langle \cdot, \cdot \rangle$ egy skaláris szorzat. Ekkor

- $\underline{u} \perp \underline{v}$ ($\underline{u}$ és $\underline{v}$ **merőlegesek**), ha $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$
- $U \leq V$ altér **merőleges kiegészítője**
$$U^{\perp} = \{\underline{v} \in V | \forall \underline{u} \in U : \underline{u} \perp \underline{v}\}.$$

Példa

Mi az $x + 2y + 3z = 0$ sík merőleges kiegészítője? És a $\{\underline{0}\}$, $\mathbb{R}^3$ altereké? ($\mathbb{R}^3$-ben a sztenderd skaláris szorzatra nézve).

Megjegyzés

Az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza éppen a $\mathcal{S}(A)^{\perp}$ - a sortér merőleges kiegészítője.

Tétel

Ha $U \leq V$ altér, akkor

1. $U^{\perp}$ is altér,
2. ha V véges dimenziós, akkor $\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = \dim(V)$.

Definíció

Legyen V vektortér, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzat és $\|\cdot\|$ a megfelelő norma.

- A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ vektorrendszer **ortogonális**, ha minden $i \neq j$-re $\underline{v}_i \perp \underline{v}_j$.
- A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ vektorrendszer **ortonormált**, ha ortogonális és minden i-re $\|\underline{v}_i\| = 1$.

Példa

Melyik vektorrendszer ortogonális és ortonormált a síkon?

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right), \quad \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)$$

Megjegyzés

- Legyen $\underline{e} \in V$ egységvektor (azaz $\|\underline{e}\| = 1$). Ekkor $\underline{v}$ merőleges vetülete $\underline{e}$-re $\langle \underline{v}, \underline{e} \rangle \underline{e}$.
- Vetítésekkel és skalárral szorzásokkal tetszőleges vektorrendszerből kaphatunk egy ortonormált rendszert. Ezt Gram-Schmidt-ortogonalizációnak hívják.

Tétel

Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ nemnulla vektorok.

1. Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorrendszer ortogonális, akkor lineárisan független is.
2. Ha $B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ ortonormált bázis, akkor minden $\underline{v} \in V$ vektorra
$$\underline{v} = \langle \underline{v}, \underline{v}_1 \rangle \underline{v}_1 + \langle \underline{v}, \underline{v}_2 \rangle \underline{v}_2 + \cdots + \langle \underline{v}, \underline{v}_n \rangle \underline{v}_n,$$
azaz $[\underline{v}]_B = (\langle \underline{v}, \underline{v}_1 \rangle, \langle \underline{v}, \underline{v}_2 \rangle, \ldots, \langle \underline{v}, \underline{v}_n \rangle)^T$.

Példa

Mik a $\underline{v} = (3, 4, 5)^T$ vektor koordinátái a
$$B = \left(\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$
bázisban?

Vigyázz!

Ez csak ortonormált rendszerekre igaz!

Speciális leképezések és mátrixaik

Definíció

Legyen V valós (vagy komplex) vektortér. Az $A : V \to V$ lineáris leképezés **önadjungált**, ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$-re $\langle A(\underline{u}), \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, A(\underline{v}) \rangle$.

Megjegyzés

- $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ önadjungált $\iff$ a mátrixa szimmetrikus,
- $C : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ önadjungált $\iff$ a mátrixa önadjungált, azaz $C^* = C$.

Itt a vektorterek a sztenderd skaláris szorzattal értendőek.

Tétel (Főtengelytétel)

Legyen $A : V \to V$ önadjungált lineáris transzformáció. Ekkor

1. A minden sajátértéke valós,
2. ha $\underline{u}, \underline{v}$ különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok, akkor $\underline{u} \perp \underline{v}$ és
3. V-nek van A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa.

Megjegyzés

Ha $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix önadjungált, akkor minden $\underline{u} \in \mathbb{C}^n$ vektorra $\underline{u}^* C \underline{u} \in \mathbb{R}$ – tehát egy valós szám.

Definíció

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix

- **pozitív definit**, ha minden $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektorra $\underline{u}^T A \underline{u} > 0$,
- **negatív definit**, ha minden $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektorra $\underline{u}^T A \underline{u} < 0$,
- **pozitív szemidefinit**, ha minden $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\underline{u}^T A \underline{u} \geq 0$,
- **negatív szemidefinit**, ha minden $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\underline{u}^T A \underline{u} \leq 0$,
- és **indefinit**, ha $\underline{u}^T A \underline{u}$ pozitív és negatív értéket is felvesz.

Ugyanezek a fogalmak értelmesek $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrixra csak $\underline{u}^* C \underline{u}$-t kell nézni.

Megjegyzés

$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T A \underline{v}$ egy skaláris szorzat $\iff$ A pozitív definit.

Példa

Mit tudunk elmondani az alábbi mátrixok definitségéről?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix és $1 \leq k \leq n$. Az A mátrix k. **vezető főminora** az első k sora és k oszlopa.

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix. A következők ekvivalensek:

1. A pozitív definit,
2. A összes sajátértéke pozitív és
3. A minden vezető főminorának pozitív a determinánsa.

Megjegyzés

Az utolsót a legegyszerűbb ellenőrizni és erre szükségünk is lesz a többváltozós függvények szélsőértékhelykeresésénél.

Megjegyzés

- A akkor negatív definit, ha $-A$ pozitív definit, azaz ha a főminorok determinánsának előjele váltakozva $-, +, -, +, \ldots$
- Különben, ha a főminorok determinánsa nem 0, akkor a mátrix indefinit.
- Ha van 0 is, akkor kicsit nehezebb eldönteni: érdemes a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat (ha vannak) a bázisban „hátratenni", és a „maradékról" eldönteni, hogy definit-e.

Vigyázz!

Így A nem akkor negatív definit, ha a vezető főminorok determinánsa negatív.

Példa

Mi mondható el a következő mátrixok definitségéről?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Többváltozós függvények

Emlékeztető

Legyen X halmaz és legyen $d : X \times X \to [0, \infty)$ egy adott függvény. Ekkor X **metrikus tér** (a d távolságfüggvénnyel), ha minden $x, y, z \in X$-re

1. $d(x, y) = d(y, x)$, (szimmetria)
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ és (elválasztás)
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. (háromszög-egyenlőtlenség)

Legyen $x_0 \in X$, $r > 0$. Ekkor

- Az x_0 pont r sugarú **teljes környezete** $B(x, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$,
- Az x_0 pont r sugarú **(pontozott) környezete** $B^0(x, r) = \{x \in X | 0 < d(x, x_0) < r\}$.

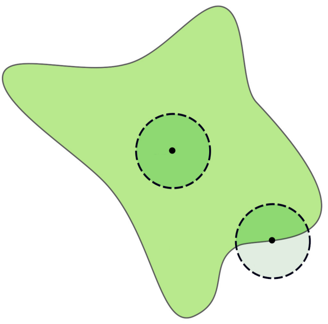
Példa

$\mathbb{R}^n$-en (azaz az $\{x = (x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ halmazon) tetszőleges norma megad egy metrikát: $d(x, y) = \|x - y\|$. Néhány „furcsa" példa $d_1(x, y) = \max(|x_i - y_i|)$, vagy $d_2(x, y) = \sum |x_i - y_i|$.

Emlékeztető

Legyen X metrikus tér, $x_0 \in X$ és $H \subseteq X$. Ekkor

- x_0 **belső pontja** H-nak, ha van olyan teljes környezete, ami része H-nak ($\exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq H$),
- x_0 **külső pontja** H-nak, ha van olyan teljes környezete, ami része $\overline{H}$-nak ($\exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq \overline{H}$),
- x_0 **határpontja** H-nak, ha minden teljes környezete metszi H-t és $\overline{H}$-t is ($\forall r > 0 : B(x_0, r) \cap H \neq \emptyset$, $B(x_0, r) \cap \overline{H} \neq \emptyset$),
- H **nyílt**, ha minden pontja belső pont ($\forall x \in H\ \exists r : B(x, r) \subseteq H$) és
- H **zárt**, ha $\overline{H}$ nyílt.



- x_0 **torlódási pontja** H-nak, ha minden környezete metszi H-t ($\forall r > 0 : B^0(x_0, r) \cap H \neq \emptyset$).

Sorozatok

Definíció (Sorozat határértéke általánosan)

Az $(a_n) \in X$ sorozat **határértéke** $a \in X$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n > n_0 : a_n \in B(a, \varepsilon).$$

Megjegyzés

A határérték fogalmához igazából nem is kell a távolságfüggvény, csak a nyílt halmazok ismerete (topológia): $B(a, \varepsilon)$-t le lehet cserélni bármely a-t tartalmazó nyílt halmazra:

$$\forall U \text{ nyílt }, a \in U \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n > n_0 : a_n \in U.$$

Tétel

A következők ekvivalensek:

1. H zárt
2. minden $(a_n) \in H$, konvergens sorozat határértéke H-beli.

(Tehát nem lehet H-ból „kikonvergálni”.)

Tétel

1. $\mathbb{R}^2$-n a d, d_1 és d_2 távolságfüggvényekre ugyanazok a nyílt és zárt halmazok.
2. $\mathbb{R}^n$-en bármely normából jövő távolságfüggvényre ugyanazok a nyílt és a zárt halmazok.

Megjegyzés

- Tehát ha kényelmesebb, használhatjuk d helyett d_1-t, vagy d_2-t.
- $\mathbb{R}^2$-n a $d_3(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y \\ 1, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$ távolságra minden halmaz nyílt (és zárt is). Így csak azoknak a sorozatoknak van határértéke, amik egy idő után konstansok.
- Végtelen dimenzióban vannak olyan normák, amik mást adnak.

Függvények

Definíció

- f egy m **változós valós értékű függvény**, ha $f : X \to \mathbb{R}$ leképezés valamely $X \subseteq \mathbb{R}^m$-re.
- f **értelmezési tartománya** $\mathrm{Dom}(f) = X$.
- f **értékkészlete** $\mathrm{Ran}(f) = \{f(x) | x \in X\} \subset \mathbb{R}$.
- f **grafikonja** $\mathbb{R}^{m+1}$ következő részhalmaza $\{(x, f(x)) | x \in X\}$.
- f (kétváltozós) függvény c **magasságú szintvonala** az $\{x | f(x) = c\}$ halmaz – azaz f grafikonját elmetsszük az $x_{m+1} = c$ síkkal és levetítjük az $x_{m+1} = 0$-ra.

Példa

Mik az alábbi függvények grafikonjai és szintvonalai?

- $f(x, y) = x + y$,
- $g(x, y) = xy$ és
- $h(x, y) = x^2 + y^2$.

A szintvonalak nem is mindig „vonalak”.

Definíció

Legyen f többváltozós függvény, $a \in \mathrm{Dom}(f)$ és $v \in \mathbb{R}^m$ olyan, hogy $\{a - tv | 0 < t < t_0\} \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ valamely $t_0 > 0$-ra. Ekkor az f függvény v **irányú határértéke** az a pontban $b \in \mathbb{R}$, ha a $g(t) = f(a - tv)$ egyváltozós függvényre $\lim_{t \to 0+0} g(t) = b$.

Példa

Mi az $f(x, y) = y/x$ határértéke $(0, 0)$-ban a különböző irányokból?

Definíció

Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ m változós függvény és $a \in \mathrm{Dom}(f)$ torlódási pont. Ekkor

- f **határértéke** a-ban $b \in \mathbb{R}$ (jele $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$), ha
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in B^0(a, \delta) \cap \mathrm{Dom}(f) : |f(x) - b| < \varepsilon,$$
- f **határértéke** a-ban ∞ (jele $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$), ha
$$\forall k \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0\, \forall x \in B^0(a, \delta) \cap \mathrm{Dom}(f) : f(x) > k,$$
- hasonlóan a határérték lehet $-\infty$ is.

Példa

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x>y}} \frac{1}{x-y} = -\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x<y}} \frac{1}{x-y} = \infty.$$

Tétel

Ha $\lim_{x\to a} f(x) = b$, akkor minden létező iránymenti határértéke is b.

Vigyázz! (Fordítva nem igaz)

Például az $f(x,y) = \begin{cases} y^2/x, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvénynek nincs határértéke $(0,0)$-ban, pedig minden iránymenti határértéke 0.

Példa

Az alábbiak közül melyik határérték létezik?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Definíció

- f egy n **változós vektor értékű függvény**, ha $f : X \to \mathbb{R}^m$ leképezés valamely $X \subseteq \mathbb{R}^n$-re.
- f **i. koordinátafüggvénye** az $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)_i$ valós értékű függvény.

Példa

- A lineáris leképzések többváltozós függvények is.
- Mi az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ függvény?

Definíció

Legyen $a \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ torlódási pont és $f : X \to \mathbb{R}^m$ függvény. Ekkor f **határértéke** a-ban $b \in \mathbb{R}^m$ (jele $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in B^0(a, \delta) : d(f(x), b) < \varepsilon.$$

Vigyázz! ($\mathbb{R}^m$-ben nincs $<$ reláció)

Vektorértékű függvényeknél (ilyen módon) nincs értelme annak, hogy a határérték végtelen. És a monotonitásnak se.

Tétel

Legyen $f : X \to \mathbb{R}^m$ n változós függvény és koordinátafüggvényei az f_i-k. A következők ekvivalensek:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ létezik
2. $\lim\limits_{x \to a} f_i(x)$ létezik minden $1 \le i \le m$-re,

és ekkor a határértéket koordinátánként lehet számolni $\left(\text{azaz } \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)_i = \lim\limits_{x \to a} f_i(x)\right)$.

Definíció

Legyen f többváltozós valós vagy vektorértékű függvény és $a \in X$.

- f **folytonos** a-ban, ha $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ és
- f **folytonos**, ha minden $a \in \mathrm{Dom}(f)$-ben folytonos.

Tétel

1. A konstans függvények és az identitásfüggvények folytonosak.
2. f folytonos $\iff$ a koordinátafüggvényei is folytonosak.

Definíció

Legyenek f, g többváltozós függvények, $c \in \mathbb{R}$.

- $c \cdot f : x \mapsto c \cdot f(x)$-re $\mathrm{Dom}(c \cdot f) = \mathrm{Dom}(f)$,
- $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$-re $\mathrm{Dom}(f + g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$,
- ha f és g valós értékű, akkor
  $f \cdot g : x \mapsto f(x)g(x)$-re $\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ és
  $1/f : x \mapsto 1/f(x)$-re $\mathrm{Dom}(1/f) = \mathrm{Dom}(f) - \{x | f(x) = 0\}$.

Tétel

Ha $\lim\limits_{x \to a} f(x) = p$, $\lim\limits_{x \to b} g(x) = q$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor

1. $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = cp$, $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = p + q$ és
2. ha f és g valós értékűek, akkor $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = pq$, és $q \neq 0$ esetén $\lim\limits_{x \to a} (f/g)(x) = p/q$.

Megjegyzés

Így folytonos függvények többszöröse és összege, valós értékű esetben a szorzata és hányadosa is folytonos.

Definíció

Legyenek f, g többváltozós függvények.

- $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$, ha $\mathrm{Ran}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$,
- f **inverze** g, ha $f \circ g$ és $g \circ f$ is értelmes és egyenlő a megfelelő identitásfüggvénnyel ($f(g(x)) = x$ és $g(f(y)) = y$).

Tétel

Ha $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{y \to b} f(y) = c$, a torlódási pontja $\mathrm{Dom}(f \circ g)$-nek és

1. van $r > 0$, hogy $x \in B^0(a, r)$-re $g(x) \neq b$, vagy
2. f folytonos b-ben,

akkor $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = c$.

Megjegyzés

Így a „képlettel felírt” függvények folytonosak az értelmezési tatományuk belsejében.

Korlátos zárt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

Tétel

Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt, $f : K \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, akkor

- (Weierstrass-tétel) $\operatorname{Ran}(f)$ korlátos és zárt,
- (Heine-tétel) f egyenletesen folytonos, azaz
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall a \in K\, \forall x \in B(a, \delta) : f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Megjegyzés

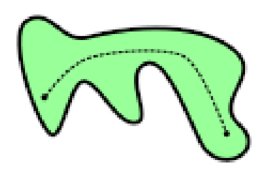
- Ha f valós értékű, akkor felveszi a minimumát és a maximumát.
- Ezek sokkal általánosabban igazak kompakt halmazon folytonos függvényekre:
  - Nincs távolságfüggvény, csak topológia = nyílt halmazok.
  - $f : X \to Y$ **folytonos**, ha minden $U \subset Y$ nyíltra $f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\} \subseteq X$ nyílt.
  - K **kompakt**, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható egy véges fedés: $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \implies \exists J \subset I$ véges $: K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.
  - Borel-féle lefedési tétel: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\iff$ K korlátos és zárt.

Megjegyzés

- A Bolzano-tételnek csak akkor lehet igaz, ha f valós értékű – különben $\mathrm{Ran}(f)$ „kikerülheti” az origót.
- Korlátos zárt halmazokra nem is igaz – már egy dimenzióban sem: $f : [-2, -1] \cup [1, 2]$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ negatív és pozitív értéket is felvesz, de a 0-t nem.

Definíció

$K \subset \mathbb{R}^m$ **útösszefüggő**, ha minden $a, b \in K$-ra létezik olyan $L \subset K$ „út”, aminek két vége a és b.
(itt az út egy $L : [0, 1] \to K$ folytonos függvény, amelyre $L(0) = a$ és $L(1) = b$).



Tétel (Bolzano-tétel)

Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos, zárt és útösszefüggő, $f : K \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, ami negatív és pozitív értéket is felvesz, akkor a 0-t is.

Deriválás

Megjegyzés

- Egy változóban a derivált definíciója $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Ennek semmi értelme több változóban.
- A definíció átfogalmazásából érdemes kiindulni $f'(a) = B$, ha az $\varepsilon(x) = f(x) - f(a) - B(x-a)$ függvényre, amelyre $\lim_{x \to a} \dfrac{|\varepsilon(x)|}{|x-a|} = 0$.
- Ha $X \subset \mathbb{R}^n$ és $f : X \to \mathbb{R}^m$ függvény, akkor B-nek egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezésnek kell lennie.

Definíció

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$ belső pont és $f : X \to \mathbb{R}^m$ függvény. f **deriválható** a-ban, ha van olyan $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképzés, amelyre az $\varepsilon(x) = f(x) - f(a) - B(x-a)$ függvényre $\lim_{x \to a} \dfrac{|\varepsilon(x)|}{d(x,a)} = 0$. f **deriválható**, ha minden pontjában deriválható.

Definíció

Legyen f deriválható a-ban.

- f **deriváltja** az a pontban az előbbi B lineáris leképezés, jele $f'(a)$.
- f **Jacobi-mátrixa** a-ban az $f'(a)$ leképezés mátrixa.
- Ha f valósértékű, akkor a Jacobi-mátrix egy vektor, amit **gradiens**ének is nevezik, jele $\operatorname{grad} f(a)$, vagy $\nabla f(a)$.

Példa

- A konstans függvények deriválhatók, a Jacobi-mátix mindenhol a 0 mátrix.
- Ha $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^m$, akkor az $f(x) = Bx + c$ függvények deriválható, a Jacobi-mátrixa mindenhol B.

Megjegyzés

Tehát a többváltozós függvény deriváltja nem egy szám, hanem egy lineáris leképezés (vagy mátrix). Az egyváltozós deriváltat is lehet – és érdemes is – az $f'(a) = (x \mapsto f'(a) \cdot x)$ függvénynek tekinteni.

Definíció

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X$ belső pont és $g : X \to \mathbb{R}$ függvény.

- g parciálisan deriválható az i. változója szerint az a pontban, ha az
$$x_i \mapsto g(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$
egyváltozós függvény deriválható az $x_i = a_i$-ben,
- ez a derivált az g függvény i. változó szerinti parciális deriváltja. Jele $\frac{\delta g}{\delta x_i}(a)$ (vagy $g_i'(a)$).
- g parciálisan deriválható a-ban, ha minden változója szerint parciálisan deriválható a-ban.

Tétel

Legyen $f : X \to \mathbb{R}^n$ függvény, ami deriválható a-ban.

1. f Jacobi mátrixának i. sora $\operatorname{grad} f_i(a)$ – az i. koordinátafüggvény gradiense.
2. minden i-re f_i parciálisan deriválható a-ban és $\operatorname{grad} f_i(a) = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_1}(a), \frac{\delta f_i}{\delta x_2}(a), \ldots, \frac{\delta f_i}{\delta x_m}(a)\right)$.

Megjegyzés

- így a derivált egyértelmű
- f parciálisan deriválható $\not\Longrightarrow$ f deriválható, például
  $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Definíció

$f : X \to \mathbb{R}$ **folytonosan deriválható** a-ban, ha parciálisan deriválható a egy környezetében és a parciális deriváltak folytonosak a-ban.

Tétel

Ha f folytonosan deriválható a-ban, akkor deriválható is.

Megjegyzés

- Ez nagyon praktikus: csak parciálisan kell deriválni.
- Elég, ha egy parciális deriválton kívül a többi folytonos.
- Fordítva nem igaz: $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
  deriválható $(0,0)$-ban, pedig a parc. deriváltak nem folytonosak.

Tétel

Legyen f többváltozós függvény, $a \in \mathrm{Dom}(f)$ belső pont. Ekkor f deriválható a-ban $\implies$ f folytonos a-ban.

Megjegyzés (Lánc-szabály még egyszer)

Legyen $g(a) = b$, $g'(a) = (x \mapsto Bx)$ és $f'(b) = (x \mapsto Cx)$, akkor $(f \circ g)'(a) = (x \mapsto CBx)$ - már egy változóban is.

Tétel (Lánc-szabály)

Ha g deriválható a-ban és f deriválható $g(a)$-ban, akkor $f \circ g$ is deriválható a-ban és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

Megjegyzés

Legyen $f, g : X \to \mathbb{R}^m$ deriválhatóak, ekkor

- $f + g$ is deriválható és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ és
- ha f és g valós értékű, akkor $f \cdot g$ is deriválható és $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Tétel (Lagrange-középértéktétel)

Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ olyan függvény, ami folytonos az $[a, b] = \{ta + (1 - t)b | t \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^n$ szakaszon és deriválható a nyílt (a, b) szakaszon. Ekkor van olyan $c \in (a, b)$, amelyre $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Megjegyzés

- $f'(c)(b - a)$ itt $f'(c)$ és $b - a$ skaláris szorzatát jelenti.
- Vektorértékű függvényekre ez nem igaz, pl az $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$-re az $[0, 2\pi]$ intervallumra nincs jó c.

Tétel

Ha $X \subset \mathbb{R}^n$ útösszefüggő, $f : X \to \mathbb{R}^m$ deriválható és $f'(x) = 0$ minden $x \in X$-re, akkor f konstans.

Emlékeztető (Inverz deriváltja)

Ha az egyváltozós f függvény deriválható egy I intervallumon $f' \neq 0$, akkor f invertálható I-n és ha az inverze g, akkor g deriválható és $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$.

Tétel (Inverzfüggvény-tétel)

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható és $a \in X$ olyan, hogy $f'(a)$ invertálható (tehát $\det(f'(a)) \neq 0$). Ekkor a-nak van olyan környezete, ahol f invertálható és ha itt az inverze g, akkor g deriválható és $g'(y) = f'(g(y))^{-1}$.

Megjegyzés

- Fontos, hogy $\mathbb{R}^n$-beli pontokhoz $\mathbb{R}^n$-belieket rendelünk, így lesz $f'(a)$ négyzetes mátrix.
- Az inverz csak egy környezetben létezik, nem az egész X-en: például az $f(x, y) = (e^x \cdot \cos y, e^x \cdot \sin y)$ deriváltjának determinánsa mindenhol pozitív, de a f nem invertálható, hiszen $f(0, 0) = (1, 0) = f(0, 2\pi)$.

Definíció

Legyen $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ belső pont, $f : X \to \mathbb{R}$ függvény és $e \in \mathbb{R}^n$ egységvektor (tehát $\|e\| = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 = 1$). Ekkor f függvény a-beli e irányú **iránymenti deriváltja**

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}$$

Tétel

Ha $f : X \to \mathbb{R}$ deriválható a-ban, akkor $\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \mathrm{grad}\, f(a) \cdot e$.
($\cdot$ itt is skaláris szorzat)

Megjegyzés

- Tehát a gradiens irányában a „legmeredekebben emelkedő” a függvény grafikonja,
- azzal ellentétesen a „legmeredekebben lejtő” és
- arra merőlegesen vízszintes – azaz a szintvonalak a gradiensre merőlegesen haladnak.

Definíció

f grafikonjának a-beli **érintő(hiper)síkja** a következő sík

$$x_{n+1} = \operatorname{grad} f(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

Itt a $\cdot$ megint az $\mathbb{R}^n$ skaláris szorzata, x_{n+1} az $\mathbb{R}^{n+1}$ utolsó koordinátája.

Megjegyzés

Tehát az a-beli érintőhipersík normálvektora $(\operatorname{grad} f(a), -1)$, ahogy egyváltozóban az érintőegyenes normálvektora $(f'(a), -1)$ volt.

Példa

- Az érintők most sem mindig olyanok, mint amilyennek képzeljük: például az $f(x, y) = xy$ origóbeli érintője a $z = 0$ sík.
- Tekintsük az $g(x, y) = x^3 + 3xy - y^2$ grafikonjának $A(-1, -1)$-beli érintősíkját. Merre halad itt a szintvonal?

Definíció

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$ belső pont és $f : X \to \mathbb{R}$ függvény. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ parciális derivált x_j szerinti parciális deriváltja (ha létezik).

Tétel (Young-tétel)

Ha a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ parciális deriváltak léteznek és folytonosak a egy környezetében, akkor a sorrend nem számít: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Megjegyzés

- Lehet magasabbrendű parciális deriváltakat is definiálni, például $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$. A Young-tétel magasabbrendű verziója világosan következik az eredetiből.
- Kell a parciális deriváltak folytonossága:
  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$-ra $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Definíció

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$ belső pont és $f : X \to \mathbb{R}$ függvény.

- f **kétszer deriválható** a-ban, ha f deriválható a egy környezetében, és a deriváltfüggvénye deriválható a-ban.
- Ekkor f **Hesse-mátrixa** az a pontban a $Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \le i,j \le n}$ mátrix.

Tétel

Ha f kétszer deriválható a-ban és a második parciális deriváltjai folytonosak a-ban, akkor $Hf(a)$ szimmetrikus mátrix.

Példa

Mi az $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ függvény Hesse-mátrixa az (x, y) pontban?

Lokális szélsőértékek

Tétel

Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ többváltozós függvény, ami deriválható az $a \in X$ pontban. Ha f-nek lokális szélsőértéke van a-ban, akkor $\operatorname{grad} f(a) = 0$.

Megjegyzés (Fordítva nem igaz)

Például az $x^2 - y^2$-nek, vagy $x^3 - y^3$-nek nincs lokális szélsőértéke $(0,0)$-ban, pedig a gradiens 0.

Definíció

f-nek **nyeregpontja** van a-ban, ha van olyan v, w vektorok amelyre $f(a + tv)$-nek lokális minimuma, $f(a + tw)$-nek lokális maximuma van $t = 0$-ban.

Példa

Hol van a $g(x, y) = x^3 + 3xy - y^2$ függvénynek lokális szélsőértéke?

Tétel

Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ többváltozós függvény, ami kétszer deriválható az $a \in X$ pontban és $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Ekkor ha $Hf(a)$

1. pozitív definit, akkor f-nek lokális minimuma van a-ban,
2. negatív definit, akkor f-nek lokális maximuma van a-ban,
3. indefinit, akkor f-nek nyeregpontja van a-ban.

Megjegyzés

- A definitséget a vezető főminorok determinánsának előjelével érdemes ellenőrizni (lásd a megfelelő tételt).
- Ha $Hf(a)$ szemidefinit, akkor a tétel nem mond semmit, bármi előfordulhat – és nehezebb eldönteni, hogy mi a helyzet.

Példa

Hol vannak az $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + xyz$ függvény lokális szélsőértékei?

Abszolút szélsőértékek

Tétel

Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f-nek csak olyan $a \in X$-ben lehet abszolút szélsőértéke, ahol

- $a \in X$ határpont, vagy
- f nem differenciálható a-ban, vagy
- $\operatorname{grad} f(a) = 0$.

Megjegyzés

Az X tartomány határa itt nem csak néhány pont, hanem néhány alacsonyabb dimenziós tartomány is lehet.

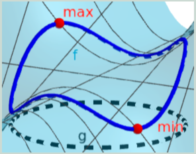
Példa

Mik az $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$ függvény abszolút szélsőértékei a $-1 \leq x, y \leq 1$ tartományon?

Feltételes szélsőértékek

Definíció

Legyen $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriválható függvények. Ekkor f szélsőértékei a $g(x) = 0$ feltétel mellett az $Y = \{f(x) | g(x) = 0\}$ halmaz minimuma és maximuma (ha léteznek).



Tétel (Lagrange-féle multiplikátor módszer)

Legyen f, g mint előbb és $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$. Ekkor ha f-nek feltételes szélsőértéke van a-ban, akkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re $\operatorname{grad} \mathcal{L}(a, \lambda) = 0$.

Megjegyzés

Több független feltételfüggvény (g_i) is lehet, ekkor mindegyikhez egy új változót (λ_i) kell bevezetni.

Példa

Mik az $f(x, y) = x^2 y$ függvény szélsőértékei az $x^2 + y^2 = 3$ körön?

Konvexitás

Definíció

Legyen $f : X \to \mathbb{R}$ deriválható az X útösszefüggő halmazon. Ekkor

- f **konvex** X-en, ha minden $a \in X$ belső pontra f grafikonja az a-beli érintő(hiper)síkja felett van. Azaz $\forall x \in X : f(x) \geq f(a) + \operatorname{grad} f(a) \cdot (x - a)$.
- f **konkáv** X-en, ha $-f$ konvex X-en.

Megjegyzés

A konvexitás definíciójához nem kell a differenciálhatóság:

f konvex X-en $\iff$ minden $a, b \in X$-re az a, b-beli szelő f grafikonja felett van.

Tétel

Legyen f kétszer folytonosan deriválható az X útösszefüggő halmazon. Ekkor

1. f konvex X-en $\iff$ minden $a \in X$-re $Hf(a)$ pozitív definit,
2. f konkáv X-en $\iff$ minden $a \in X$-re $Hf(a)$ negatív definit.

Paraméteres halmazok

Definíció

Az $f : X \to \mathbb{R}^m$ függvény által meghatározott **paraméteres** halmaz, az $\{f(x) | x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^m$ halmaz.

Megjegyzés

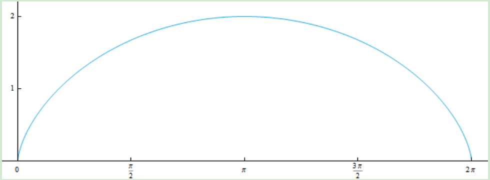
Ha $X \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, akkor paraméteres görbéről beszélünk. Egy pontszerű objektum mozgása könnyen leírható így, t időpillanatban az $f(t)$ helyen van. Így nem csak az útvonalat (a $\mathrm{Ran}(f)$ halmazt) ismerjük, hanem magát a mozgást (az f függvényt) is.

Példa

- Egyenesek paraméteres egyenlete.
- Síkok paraméteres egyenlete.
- Az $f(x, y) = ((2 + \cos x)\cos y, (2 + \cos x)\sin y, \sin x)$ függvény egy tóruszt paraméterez.

Példa

- Az $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ $(t \in [0, 2\pi])$ görbe a ciklois: egy guruló kerék egy fordulásánal egy rögzített pont pályája.



- Az $f(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$ $(t \in [0, 2\pi])$ görbe a kardioid: egy körön guruló kör egy pontjának pályája.
  Ez máshonnét is ismerős lehet:

Tétel

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum $f : I \to \mathbb{R}^m$ differenciálható $t_0 \in I$-ben, ekkor az f által meghatározott paraméteres görbe t_0-beli

1. sebességvektora $f'(t_0)$,
2. ha $f'(t_0) \neq 0$, akkor az f által megadott paraméteres halmaz érintő(hiper)síkjának egyenlete $f'(t_0) \cdot (x - f(t_0)) = 0$ (itt $x \in \mathbb{R}^m$, és $\cdot$ a skaláris szorzat) és
3. ha f kétszer deriválható t_0-ban akkor a paraméteres görbe gyorsulásvektora $f''(t)$.

Megjegyzés

$f''(t_0)$ itt szintén egy vektor, de ez csak az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ függvényekre van így. Láttuk például, hogy ha $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, akkor $Hg(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ – ami nagyjából a második derivált – egy $n \times n$-es mátrix.

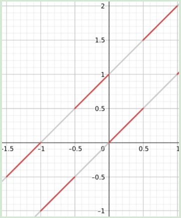
Implicit módon megadott halmazok

Definíció

Az $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény által meghatározott **implicit** halmaz az $\{x \in \mathbb{R}^n | F(x) = 0\}$.

Példa

- A síkok egyenlete a térben ilyen: az $Ax + By + Cz = D$ síkra $F(x, y, z) = Ax + By + Cz - D$.
- Az $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ az egységkört adja – ezt elő lehet állítani két sima függvénnyel: $g_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ és $g_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Ekkor $F(x, g_1(x)) = F(x, g_2(x)) = 0$.
- Legyen $F(x, y) = (y - x)(y - x - 1)$. Hány olyan g függvény, amelyre $F(x, g(x)) = 0$? (és ha g nem feltétlen folytonos?)



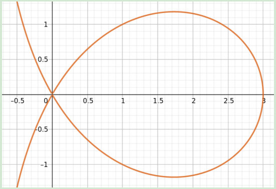
Definíció

Legyen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $Y \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

- A $g : Y \to \mathbb{R}$ folytonos függvény F **lokális megoldása** $y_0 \in Y$-ban, ha értelmes y_0 egy teljes környezetében és ott $F(y, g(y)) = 0$.
- Az F függvénynek **egyértelmű lokális megoldása van** y_0-ban, ha létezik olyan g lokális megoldás y_0-ban és egy $Z \subset \mathbb{R}$ intervallum, melyre $(y, z) \in Y \times Z$-re $F(y, z) = 0 \iff z = g(y)$.

Példa

- $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$-nak két maximális lokális megoldása a $g(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$, de $a = 1$-ben nincs lokális megoldása.
- $G(x, y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 + y^2 = 0$ egy elliptikus görbe, aminek az origóban nincs egyértelmű lokális megoldása.



Tétel (Implicitfüggvény-tétel)

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$ és $F : X \to \mathbb{R}$ függvény, ami folytonosan deriválható a egy környezetében és $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$. Ekkor F-nek egyértelmű lokális megoldása van a egy környezetében. Ha a lokális megoldás g, akkor g deriválható a-ban és $k = 1, 2, \ldots, n-1$-re

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(a) = -\frac{\partial F}{\partial x_k}(a) / \frac{\partial F}{\partial x_n}(a).$$

Megjegyzés

- Az utolsó változó helyett bármelyik másikat ki lehetne fejezni a többivel, ekkor a megfelelő parciális derivált nem lehet 0.
- Így ha $\operatorname{grad} F(a) \neq 0$, az a-beli normálvektor $\operatorname{grad} F(a)$.
- Ez a hagyományos függvényekre is jó: $z = f(y)$ grafikonja az $F(y,z) = f(y) - z = 0$ halmaz, erre $\operatorname{grad} F(P) = (\operatorname{grad} f(P), -1)$.

Példa

- Mi a $G(x, y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 + y^2 = 0$ görbe $(1, 1)$ pontbeli érintőjének meredeksége?
- Mi a $H(x, y, z) = \sin(xy) + \sin(yz) + \sin(zx) - 1/2 = 0$ felület $(\sqrt{\pi/6}, \sqrt{\pi/6}, 0)$-beli érintősíkjának egyenlete?

Jordan-mérték

Emlékeztető (Egyváltozós integrál)

Egyváltozós függvényeket a következő módon integráltunk:

1. Az $[a, b]$ intervallumnak vettük egy $\mathcal{F} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$, felosztássorozát,
2. ehhez egy (y_i) reprezentánsrendszert,
3. kiszámoltuk a megfelelő integrálközelítőösszeget:
$$S(f, \mathcal{F}, (y_i)) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(x_i - x_{i-1})$$
4. és az integrál az ilyenek közös határértéke volt a végtelenül finomodó felosztássorozatokra és reprezentánsrendszerekre nézve.

Megjegyzés

- Mik több változóban a felosztások?
- Mi a kis darabok mértéke (területe) az integrálközelítőösszegben?

Definíció

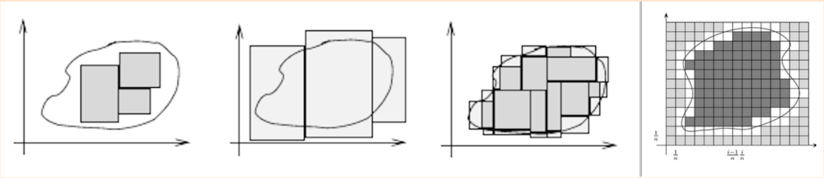
- $A, B \subset \mathbb{R}^n$ **egymásba nem nyúló**, ha nincs közös belső pontjuk.
- Ha $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$, akkor $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ egy **tégla**, aminek mértéke $\lambda_n(T) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$.
- az $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz **külső mértéke**
$$k(A) = \inf\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_n(T_i) \middle| T_i \text{ téglák, amelyekre } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} T_i \right),$$
az A-t fedő téglák területösszegének legnagyobb alsó korlátja.
- az $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz **belső mértéke** $b(A) = 0$, ha A nem tartalmaz téglát, különben pedig
$$b(A) = \sup\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_n(T_i) \middle| \begin{array}{l} T_i \text{ egymásba nem nyúló téglák,} \\ \text{amelyekre } A \supseteq \bigcup_{i=1}^{N} T_i \end{array} \right),$$
az A belsejében lévő egymásba nem nyúló téglák területösszegének legkisebb felső korlátja.

Tétel

Minden $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazra $b(A) \le k(A)$

Megjegyzés

A téglák „összevissza” is lehetnek, de ugyanazt kapjuk, ha „szépen rendezzük őket”:



Definíció

$A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz

- **Jordan-mérhető**, ha $k(A) = b(A)$. Ekkor A Jordan-mértéke $\lambda_n(A) = k(A) = b(A)$.
- **nullmértékű**, ha $\lambda_n(A) = 0$.

Példa

- a $H = \{x \in [0,1] | x \text{ racionális}\} \subset \mathbb{R}$ nem Jordan-mérhető,
- az egyenes/ sík/ tér „szép” halmazainak a Jordan-mértéke a hossz/ terület/ térfogat.

Tétel

Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető halmazok

1. $C \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető $\Longleftrightarrow$ C korlátos és C határpontjainak halmaza nullmértékű.
2. Ha A és B egybevágóak, akkor $\lambda_n(A) = \lambda_n(B)$.
3. Ha $A, B \in \mathbb{R}^n$ egymásba nem nyúlóak, akkor $A \cup B$ is Jordan-mérhető és $\lambda_n(A \cup B) = \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.
4. Ha A, B Jordan-mérhető, akkor $A \cup B$, $A \cap B$ és $A - B$ is.
5. Korlátos halmazon folytonos függvény grafikonja nullmértékű.

Megjegyzés

- Egy kicsit rondább halmazok is mérhetőek: egy másik mértékkel, aminek a neve Lebesgue-mérték. Erre ha $\lambda(A_1) = \lambda(A_2) = \cdots = 0$, akkor $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$.
- A „ronda halmazok” nem lehetnek mérhetőek: egy egységgömb átdarabolható két egységgömbbé 5 darabbal (ez a Banach-Tarski paradoxon).

Riemann-integrál

Definíció

- Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **átmérője**
$$\mathrm{diam}(A) = \sup(\|x - y\| | x, y \in A),$$
az A pontjai között előforduló legnagyobb távolság.
- Egy B Jordan-mérhető halmaz **felosztása** egy $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ halmaz, ahol az A_i-k egymásba nem nyúló Jordan-mérhető halmazok, melyekre $B = \bigcup_{i=1}^N A_i$.
- Az $\mathcal{F}$ felosztás **finomsága** $\max(\mathrm{diam}(A) | A \in \mathcal{F})$, a legnagyobb előforduló átmérő.
- Az $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ felosztáshoz tartozó **reprezentánsrendszer** egy (y_i) sorozat, ahol $y_i \in A_i$.
- Ha $f : B \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor megfelelő integrálközelítőösszeg
$$S(f, \mathcal{F}, (y_i)) = \sum_{i=1}^{N} f(y_i)\lambda_n(A_i).$$

Definíció

f (Riemann-)integrálható B-n, ha minden végtelenül finomodó felosztássorozatra és reprezentásrendszerre az integrálközelítőösszegek konvergensek.

Tétel

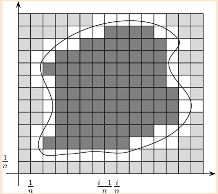
Ha f Riemann-integrálható B-n, akkor a minden végtelenül finomodó reprezentánsrendszerre a határérték ugyanaz.

Definíció

f **integrálja** B-n a fenti határérték, jele $\displaystyle\int_B f\, d\lambda_n$.

Megjegyzés

A felosztások tartalmazhatnak kis téglákat és a B halmaz határán lévőket elhagyhatjuk (ugyanis mivel B mérhető, a határa nullmértékű kell legyen, így az ezekből jövő összeg 0-hoz fog tartani).



Megjegyzés

Az integrált sokszor többes integrállal jelölik [**A**rea és **V**olume]:

- a síkon $\int_B f\,d\lambda_2 = \iint_B f(x,y)\,dA = \iint_B f(x,y)\,dxdy$,
- a térben $$\int_B f\,d\lambda_3 = \iiint_B f(x,y,z)\,dV = \iiint_B f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Tétel

1. Ha f és g integrálhatóak B-n és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\int_B f+g\,d\lambda = \int_B f\,d\lambda + \int_B g\,d\lambda$ és $\int_B cf\,d\lambda = c \cdot \int_B f\,d\lambda$.
2. Ha B és B' egymásba nem nyúló mérhető halmazok és f integrálható $B \cup B'$-on, akkor $\int_{B\cup B'} f\,d\lambda = \int_B f\,d\lambda + \int_{B'} f\,d\lambda$.
3. Ha $f \leq g$ integrálhatóak B-n, akkor $\int_B f\,d\lambda \leq \int_B g\,d\lambda$.
4. Ha f integrálható B-n, akkor $\left|\int_B f\,d\lambda\right| \leq \int_B |f|\,d\lambda$.
5. Mérhető zárt halmazon folytonos függvények integrálhatóak.

Az integrál kiszámítása normáltartományokon

Tétel (Fubini-tétel, első verzió: téglalapok)

Ha $T = [a,b] \times [c,d]$ egy tégla és $f : T \to \mathbb{R}$ olyan, hogy minden rögzített $x \in [a,b]$-re $f(x,y)$ Riemann-integrálható $[c,d]$-n akkor $\int_c^d f(x,y)\,dy$ mint egyváltozós függvény integrálható $[a,b]$-n és

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Megjegyzés

- Ha f folytonos T-n, akkor teljesülnek a feltételek,
- különben pedig ez menet közben kiderül (a jobb oldalt felírva látjuk, hogy teljesülnek-e a feltételek.
- A zárójeleket általában el lehet hagyni.

Példa

$$\iint_{\{0 \le x,y \le 1\}} x \sin(\pi y)\,dxdy = ?, \qquad \iint_{\{0 \le x \le y \le 1\}} \frac{x+y}{x^2+1}\,dxdy = ?$$

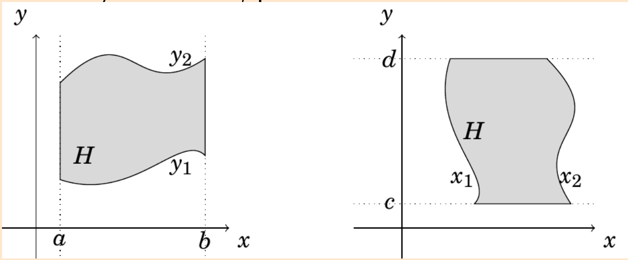
Definíció

A $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ **normáltartomány**, ha léteznek $X \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz és $g, h : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, melyekre minden $x \in X$-re $g(x) \leq h(x)$ és

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in X, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Megjegyzés

Ugyanígy lehet az utolsó változó helyett egy másik szerint normáltartományokat felírni, például a síkon:



Tétel

Ha H normáltartomány, akkor H mérhető.

Tétel (Fubini-tétel, második verzió: normáltartományok)

Ha $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in X, g(x) \le y \le h(x)\}$ normáltartomány és $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f Riemann-integrálható H-n és

$$\int_H f(x,y)\, d\lambda_{n+1} = \int_X \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) d\lambda_n.$$

Megjegyzés

- Ebből megkaphatjuk a 3 dimenziós téglákra a Fubini-tételt:
$$\iiint_T f(x,y,z)\, dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\, dzdydx.$$
- Ha $H = X \times [c,d]$-n $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ alakú, akkor
$$\int_H f(x,y)\, d\lambda_{n+1} = \int_X f_1(x)\, d\lambda_n \cdot \int_c^d f_2(y)\, dy.$$
- A folytonosság helyett elég, ha f korlátos és a szakadási pontjainak halmaza nullmértékű.

Példa

Legyen $H = \{(x,y) | x \in [0,1], 0 \le y \le x^2\}$. Mennyi $\iint_H xy\, dA$?

Az integrálok sorrendjének felcserélése

Tétel

Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ mindkét irányból normáltartomány, azaz

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a_1, b_1], g_1(x) \le y \le h_1(x)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [a_2, b_2], g_2(y) \le x \le h_2(y)\}$$

valamely $a_1 < b_1, a_2 < b_2 \in \mathbb{R}$-re és $g_1(x) \le h_1(x)$, $g_2(y) \le h_2(y)$ függvényekre, továbbá $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{g_1(x)}^{h_1(x)} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{g_2(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Vigyázz!

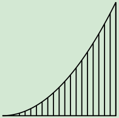
A határokra figyelni kell:

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{g_1(x)}^{h_1(x)} f(x,y)\, dy \right) dx \neq \int_{g_1(x)}^{h_1(x)} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx \right) dy,$$

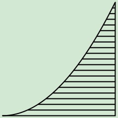
hiszen a jobb oldal nem is értelmes.

Példa

- Van, hogy a sorrend megcserélése nélkül nem is tudnánk integrálni, például $\int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2}\, dydx = ?$.
- Hogyan lehet a $H = \{(x, y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$-en az integrálás sorrendjén változtatni?



$\Longrightarrow$



A szakaszok $(x, 0)$-tól (x, x^2)-ig tartanak.

A szakaszok $(\sqrt{y}, y)$-tól $(1, y)$-ig tartanak.

Így $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y)\, dydx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y)\, dxdy$.

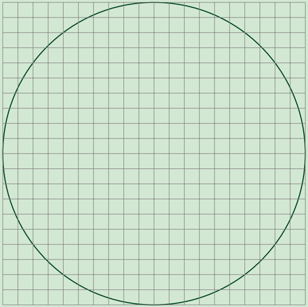
Integráltranszformáció

Példa

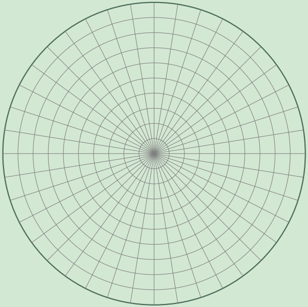
Kérdés: Legyen $K = B((0,0),1)$ az origó középpontú egységkör. Mennyi $\iint_K \sin(x^2+y^2)\,dA$?

Gond: Se x szerint, se y szerint nem tudjuk integrálni, és az integrálási tartomány is ronda.

Ötlet: Ne téglalapokra osszuk a tartományt!



helyett



Így $\displaystyle\iint_K \sin(x^2+y^2)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sin(r^2)\cdot r\,d\varphi dr = \pi(1-\cos 1).$

Tétel

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $g : U \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és $Y \subset U$ egy zárt, Jordan-mérhető halmaz, amelynek belsejében g injektív, továbbá $g(Y) = \{g(y) | y \in Y\}$. Ha $f : g(Y) \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor

$$\int_{g(Y)} f(x)\, dx = \int_Y f(g(y)) \cdot |\det(g'(y))|\, dy.$$

Megjegyzés

- Az előbbi integrál ennek egy nagyon speciális esete.
- Egyváltozóban ez a helyettesítéses integrál (hiszen ekkor $\det(g'(y)) = g'(y)$).
- Több változóban ezt főleg akkor érdemes használni, ha az integrálási tartomány „ronda”.
- Az inverzfüggvénytétel szerint, ha $\det(g'(y)) \neq 0$, akkor y egy környezetében teljesülnek a feltételek.
- A következő diákon néhány gyakran előforduló transzformáció lesz – ezekre nem kell ellenőrizni a feltételeket.

Polárkoordináták

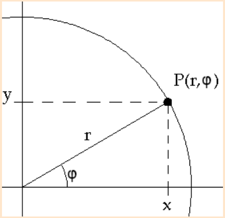
Megjegyzés

Ha az integrálási tartomány kör, körszelet, körgyűrű, vagy ilyesmi akkor a polárkoordinátákat érdemes használni:

$g(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ esetén

$$\det(g'(r, \varphi)) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

így „$dydx = r\, d\varphi dr$”.



Példa

- Legyen A az origó középpontú 1 sugarú kör „első nyolcada”. Mennyi $\iint_A xy\, dxdy$?
- Legyen B az origó középpontú 1 és 2 sugarú körök közés eső gyűrű. Mennyi $\iint_B \sqrt[3]{x^2 + y^2}\, dxdy$?

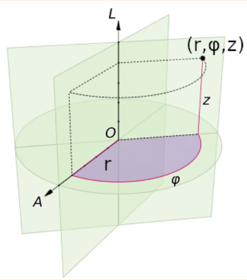
Hengerkoordináták

Megjegyzés

Ha az integrálási tartomány henger, kúp, vagy ehhez hasonló, akkor hengerkoordinátákat érdemes használni:
$g(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ esetén

$$\det(g'(r, \varphi, z)) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

így „$dzdydx = r\, dzd\varphi dr$”.



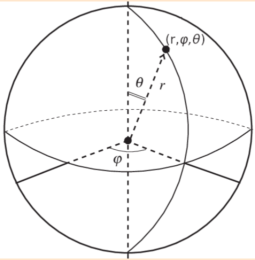
Példa

Legyen $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.
Mennyi $\iiint_A xy + e^{z^2}\, dV$?

Gömbi koordináták

Megjegyzés

Ha az integrálási tartomány gömb, ellipszoid, vagy ehhez hasonló, akkor gömbi koordinátákat érdemes használni: $g(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$ esetén $\det(g'(r,\varphi,\theta)) = \cdots = -r^2\sin\theta$, így „$dzdydx = r^2|\sin\theta|\, d\theta d\varphi dr$”.



Példa

Legyen A az origó középpontú 1 sugarú gömb felső fele.
Mennyi $\iiint_A xy\, dV$?

Terület- és térfogatszámítás

Tétel

Ha B két (ill. három) dimenziós mérhető halmaz, akkor B területe (ill. térfogata) $\displaystyle\iint_B 1\,dA \left(\text{ill. } \iiint_B 1\,dV\right)$.

Példa

- Mennyi az r sugarú gömb térfogata?
- Mennyi az r sugarú, m magasságú kúp térfogata?

Tétel

Ha $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 | x \in X, g(x) \le y \le h(x)\} \subset \mathbb{R}^3$ egy normáltartomány, akkor a térfogata $\displaystyle\iint_X h(x) - g(x)\,dA$.

Példa

Mennyi a $z = x + y$ és a $z = x^2 + y^2$ felületek által határolt korlátos tartomány térfogata.

Improprius integrál

Definíció

Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nemnegatív függvény, ami integrálható minden mérhető halmazon, akkor

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n = \lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]^n} f \, d\lambda_n,$$

amennyiben a határérték létezik.

Példa

Mennyi $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dA$?

Megjegyzés

Ha f negatív értéket is felvehet, akkor ez a definíció nem jó (lehet, hogy a kockákon konvergál az integrál, de más halmazokon nagyon ronda). Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n = \lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]^n} f_+ \, d\lambda_n - lim_{r\to\infty} \int_{[-r,r]^n} f_- \, d\lambda_n,$$

ahol $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ és $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$.

Definíció

Ha B egy mérhető halmaz és $g : B \to \mathbb{R}$ nemnegatív függvény, ami nem korlátos B-n, akkor

$$\int_B f \, d\lambda_n = \lim_{M \to \infty} \int_B \min(f(x), M) \, d\lambda_n,$$

ha ezek a függvények integrálhatóak B-n és a határérték létezik.

Megjegyzés

- Tehát a grafikon tetejét kell „levágni”.
- Itt is vigyázni kell, ha a függvény negatív értéket is felvehet.

Példa

Legyen $B = B(0,1)$ az origó középpontú, 1 sugarú kör. Mely p-re létezik (és mennyi) $\iint_B \frac{1}{|(x,y)|^p} \, dA$?

Sorok

Numerikus sorok = végtelen összegek

Definíció

Legyen $(a_n) \in \mathbb{R}$ egy sorozat, ekkor az (a_n) **összege** a részletösszegeinek a határértéke: legyen

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \text{ ekkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n, \text{ ha ez a}$$

határérték létezik, különben nem értelmes (nincs összeg).

Példa

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$?

Tétel

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.

Vigyázz! (Visszafelé nem igaz)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Tétel

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b$,
3. (a_n) véges sok tagjának összekeverése nem változtatja az összeg határértékét és
4. (a_n) véges sok tagjának megváltoztatása nem változtatja meg, hogy az összeg konvergens-e.

Megjegyzés

- A tagok megváltoztatása a határértéket befolyásolja, úgyhogy ez sokkal nehezebb, mint a határértékszámítás.
- Sokszor csak az a kérdés, hogy a sor konvergens-e, nem maga a határérték.

Példa

Konvergensek-e és ha igen mi az értékük: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

Amikor „könnyen” ki lehet számolni az összeget

Tétel (Mértani összegek)

Ha $a_1 > 0$ és van olyan $q \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $a_{n+1} = qa_n$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Példa

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$?

Tétel (Teleszkópos összegek)

Ha van olyan $(b_n) \to b$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $a_n = b_{n+1} - b_n$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b - b_1$.

Megjegyzés

Ha $a_n = b_{n+k} - b_n$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = kb - (b_1 + b_2 + \cdots + b_k)$.

Konvergenciakritériumok

Tétel (Minoráns-kritérium)

Ha $a_n \geq b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Tétel (Majoráns-kritérium)

Ha $0 \leq a_n \leq b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Megjegyzés

Csak az kell, hogy egyenlőtlenségek elég nagy n-re teljesülnek: legyen olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$-ra pl $a_n \leq b_n$.

Példa

Konvergens-e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3+2}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-n}{n^3+2}$?

Tétel (Gyökkritérium)

Legyen (a_n) nemnegatív tagú sorozat.

1. Ha van olyan $q > 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, hogy $n > n_0$ esetén $\sqrt[n]{a_n} > q$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
2. Ha van olyan $q < 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, hogy $n > n_0$ esetén $\sqrt[n]{a_n} < q$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Példa

Mely $a \in \mathbb{R}$-re konvergens $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2a-3)^n}{3 \cdot 5^n}$?

Vigyázz! ($q = 1$ esetén nem tudunk semmit)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Tétel (Hányadoskritérium)

Legyen (a_n) nemnegatív tagú sorozat.

1. Ha van olyan $q < 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, hogy $n > n_0$ esetén $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q$, akkor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. Ha van olyan $q > 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, hogy $n > n_0$ esetén $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > q$, akkor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Példa

Konvergens-e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$?

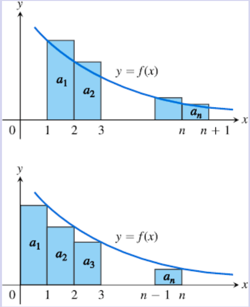
Vigyázz!

$q = 1$ esetén most sem tudunk semmit.

Tétel (Integrálkritérium)

Legyen (a_n) nemnegatív tagú sorozat és $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő függvény, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n = f(n)$.

1. Ha $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$, akkor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
2. Ha $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx = \infty$, akkor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.



Példa

Mely c-re konvergens $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$? Konvergens-e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$?

Megjegyzés

Az összes kritériumnál csak az kell, hogy a feltételek elég nagy n-re teljesülnek.

Abszolút konvergens sorok

Megjegyzés

Kérdés: Volt, hogy egy sor összegét nem változtatja, ha felcseréljük néhány tagját. Akárhogyan átrendezhetjük a tagokat?

Válasz: Nem! Például $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ tagjait tetszőleges $c \in \mathbb{R}$-re lehet úgy rendezni, hogy az összeg c legyen (vagy divergens legyen/ne létezzen).

Definíció

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **abszolút konvergens**, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens,
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **feltételesen konvergens**, ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, de nem abszolút konvergens.

Tétel

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens, akkor a tagjait tetszőlegesen átrendezve az összeg nem változik.

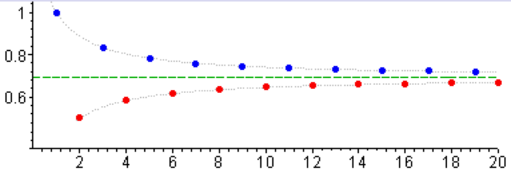
Leibniz-típusú sorok

Definíció

Ha $a_n \to 0$ monoton csökkenő sorozat, akkor a
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ sorokat **Leibniz-típusúnak** nevezik.

Tétel

Ha egy sor Leibniz-típusú, akkor konvergens.



Példa

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konvergens.
Be fogjuk látni, hogy az összeg $\ln 2$.

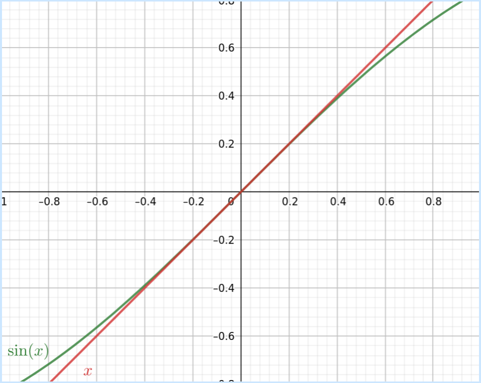
Taylor-formula

Emlékeztető

Már biztos használtad, hogy „$\sin x \approx x$, ha x közel van 0-hoz”.

Kérdés:

- Pontosan mit jelent ez?
- Honnét tudja a számológép, hogy mennyi $\sin 1$?
- Hogy lehet ilyenekre rájönni?



Definíció

Legyenek f és g valós függvények, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- ha f és g n-szer differenciálhatók x_0-ban és $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, akkor f és g **legalább** n **rendben érintkezik** x_0-ban,
- ha f és g $n+1$-szer differenciálhatók x_0-ban és $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, de $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$, akkor f és g **(pontosan)** n **rendben** érintkezik x_0-ban.

Tétel

Ha f n-szer differenciálható x_0-ban, akkor pontosan egy olyan T_n polinom van, amire $\deg(T_n) \leq n$ és ami legalább n rendben érintkezik f-el x_0-ban. Ezt pontosan meg is lehet adni:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

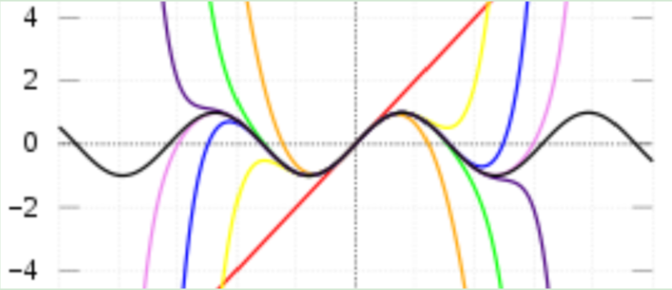
Definíció

A fenti T_n polinom az f függvény x_0 pontbeli n. Taylor-polinomja.

Példa

- Például az x_0-beli érintő az első x_0-beli Taylor-polinom,
- $\sin x$ 0-bel első és második Taylor-polinomja

  $T_1(x) = T_2(x) = x$, a harmadik $T_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$ és
- még néhány magasabb rendű Taylor-polinom:



A fekete a $\sin x$, a többi a $T_n(x)$ ($n =$1, 3, 5, 7, 9, 11 és 13)

Tétel (Taylor-formula)

Ha f valós függvény $n+1$-szer differenciálható egy x_0-t tartalmazó I intervallumban, akkor $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, ahol $R_n(x)$-t maradéktagnak nevezzük: létezik olyan $x' \in I$ egy alkalmas szám x_0 és x között, amelyre

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x')}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Példa

$\sin 1$ 4 tizedesjegy pontosságú kiszámolásához: $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ és $x = 1$-re a maradétag $|R_n(1)| \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$. Így ha $(n+1)! > 10^4$, akkor elég az n. Taylor-polinom 1-beli helyettesítési értékét kiszámolni. $n = 7$ jó, $T_7(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$, így

$$\sin 1 \approx T_7(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} = \frac{4241}{5240} \approx 0,841468.$$

Számológéppel $\sin 1 = 0,8414709848$ – kicsit nagyobb n-el számolt.

Megjegyzés (Néhány hasznos Taylor-polinom)

Az alábbi f függvények 0 körüli n-edik Taylor-polinomja és a hibatag egy felső becslése (tehát $|R_n(x)| \leq R_n$)

$f(x)$	$T_n(x)$	R_n
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$	$\frac{\lvert x\rvert^{n+1}}{(n+1)!}$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$	$\frac{\lvert x\rvert^{n+1}}{(n+1)!}$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$	$\frac{\lvert x\rvert^{n+1}}{(n+1)!}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \ldots$	$*$

$* = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$, ha $0 \leq x < 1$ és $* = \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}$, ha $-1 < x \leq 0$.

Megjegyzés (Ez több változóban is megy.)

- Ha $X \subset \mathbb{R}^m$, $a \in X$ és $f : X \to \mathbb{R}$ egy n-szer differenciálható függvény, akkor az n. Taylor polinomja az a pontban
$$T_n(x) = \sum_{|\alpha| \le n} \frac{1}{|\alpha|!} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(a) \cdot (x-a)^\alpha,$$
ahol a szumma azon $\alpha \in \mathbb{Z}^m$ szám-m-eseken fut végig, ahol $\alpha_i \ge 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \le n$ és itt $(x-a)^\alpha = (x_1 - a_1)^{\alpha_1}(x_2 - a_2)^{\alpha_2} \dots (x_m - a_m)^{\alpha_m}$.
- Ha f még $n+1$-szer folytonosan differenciálható is a egy $\delta > 0$ sugarú környezetében és $\|x - a\| < \delta$, akkor $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, ahol alkalmas $\|b - a\| < \delta$-ra
$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(b) \cdot (x-a)^\alpha.$$
- Ennek egy speciális esete a többváltozós függvények szélsőértéktípusának meghatározásánál használt módszer: $T_2(x) = f(a) + \mathrm{grad}\, f(a) \cdot (x-a) + (x-a)^T \cdot Hf(a) \cdot (x-a)/2$. Ha $\mathrm{grad}\, f(a) = 0$ és $Hf(a)$ nem indefinit, akkor $(x-a)^T \cdot Hf(a) \cdot (x-a)$ nagyságrendje δ^2, míg $R_2(x)$-é δ^3).

Függvénysorozatok

Megjegyzés

Így már majdnem látjuk, hogy $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln 2$, de csak majdnem: $x = 1$-re már pont nincs becslésünk.

Definíció

Legyenek minden $n \in \mathbb{N}$-re f_n egy valós függvény.

- Az (f_n) **függvénysorozat** az $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sorozat.
- (f_n) **értelmezési tartománya** $\mathrm{Dom}((f_n)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Dom}(f_n)$.
- (f_n) függvénysorozat **pontonként konvergál** az $X \subset \mathrm{Dom}((f_n))$ tartományon az $f : X \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $x \in \mathrm{Dom}((f_n))$-re az $f_n(x)$ sorozat tart $f(x)$-hez.

Példa

Hol értelmes és konvergens az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozat. Melyik függvényhez konvergál?

Vigyázz!

Folytonos (ill. deriválható, vagy integrálható) függvények sorozata nem feltétlen folytonos (ill. deriválható, vagy integrálható)

Definíció

Az f_n függvénysorozat **egyenletesen konvergál** az $X \subset \mathrm{Dom}((f_n))$ tartományon az $f : X \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$-ra és $x \in X$-re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Megjegyzés (Azaz minden ε-hoz van egy közös n_0)

$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ helyett
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall x \in X : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tétel

Ha az X tartományon az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez és az f_n függvények folytonosak, akkor f is folytonos. Ugyanez igaz folytonos helyett deriválható és integrálható függvényekre.

Függvénysorok

Definíció

Legyenek minden $n \in \mathbb{N}$-re f_n egy valós függvény.

- A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **függvénysor** az $f_1, f_2, f_3, \ldots$ függvények összege.
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **értelmezési tartománya** $\mathrm{Dom}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Dom}(f_n)$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **konvergenciatartománya** azon $x \in \mathrm{Dom}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)$ számok halmaza, melyre a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor konvergens.
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **összegfüggvénye** az az F függvény, amelyhez a részletösszegek sorozata pontonként konvergál.

Vigyázz!

A függvénysorok nem deriválhatóak, vagy integrálhatóak tagonként!

Definíció

Az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysorozat **egyenletesen konvergál** az $X \subset \mathrm{Dom}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)$ tartományon az $F : X \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$-ra és $x \in X$-re $\left|\sum_{m=1}^{n} f_m(x) - F(x)\right| < \varepsilon$.

Tétel

Ha az X tartományon az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergál F-hez, akkor a sor tagonként deriválható és integrálható:

1. ha minden n-re f_n deriválható, akkor F is és $F' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ és
2. ha minden n-re f_n integrálható, akkor F is és
$$\int F(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\,dx.$$

Hatványsorok és Taylor-sorok

Definíció

A **hatványsorok** speciális alakú függvénysorok: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, ahol minden n-re $a_n \in \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ és $(x-x_0)^0 = 1$ minden x-re.

Tétel (Cauchy-Hadamard tétel)

Legyen $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ és $R = 1/\alpha$ (α és R lehet 0 és ∞ is).
Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sor konvergens az $(x_0 - R, x_0 + R)$ intervallumon és divergens az $[x_0 - R, x_0 + R]$ intervallumon kívül.

Definíció

A fenti jelölésekkel a hatványsor **középpontja** x_0 és **konvergenciasugara** R.

Példa (A határon bármi lehet)

Hol konvergens $d = 0, 1, 2$-re $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^d$ és $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$?

Tétel

A hatványsorok egyenletesen konvergens $(x_0 - r, x_0 + r)$-en, minden $r < R$-re, tehát a hatványsorok tagonként deriválhatók és integrálhatók a konvergenciatartományuk belsejében.

Megjegyzés

Kérdés: jól lehet-e a függvényeket hatványsorral közelíteni?
Válasz: a „szép" függvényeket nagyon jól, de azért nem mindent.

Definíció

Ha f függvény végtelen sokszor differenciálható az x_0 pontban, akkor f **Taylor-sora** x_0-ban $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.
Itt $f^{(n)}$ az n. derivált és $f^{(0)} = f$.

Példa

Mi e^x, $\sin x$ és $\ln(1 + x)$ Taylor-sora az $x_0 = 0$-ban?

Példa

Az $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ha } x\neq 0 \\ 0, & \text{ha } x=0 \end{cases}$ függvény végtelen sokszor differenciálható az $x_0=0$ pontban, és minden deriváltja 0. Tehát a Taylor-sora 0.

Tétel

Ha f végtelenszer differenciálható az $I\subset(x_0-R,x_0+R)$ intervallumon és van olyan $K\in\mathbb{R}$ szám, hogy minden $n\in\mathbb{N}$-re és $x\in I$-re $|f^{(n)}(x)|<K$, akkor f-t előállítja a Taylor-sora I-n, azaz

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Megjegyzés

A $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ egyenletesen konvergens a $[0,1]$ zárt intervallumon így az összegfüggvénye folytonos. Ebből végre lehet látni, hogy $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$.

Komplex függvények

Emlékeztető

Egy hatványsor konvergenciatartománya az összegfüggvény a középponthoz legközelebbi szingularitásáig ér:

- $\sum x^n$ összegfügvénye $\dfrac{1}{1-x}$, $R = |1-0| = 1$.
- $\sum((x+2)/3)^n$ összegfüggvénye is $\dfrac{1}{1-x}$, $R = |1-(-2)| = 3$.
- $\sum(-x)^n/n$ összegfüggvénye $\ln(1+x)$, $R = |-1-0| = 1$.
- $\sum x^n/n!$ összegfüggvénye e^x, ami értelmes $\mathbb{R}$-n, $R = \infty$.

Megjegyzés (Vagy mégsem?)

$\sum(-1)^n x^{2n}$ összegfüggvénye $\dfrac{1}{1+x^2}$, ami „szép”, mégis $R = 1$!
Megoldás: nézzük $\mathbb{C}$ felett, így $\pm i$-ben baj van.

Tétel

Ugyanúgy megy minden komplex számokkal.

Komplex exponenciális függvény

Definíció

Legyen $z \in \mathbb{C}$-re $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Tétel

1. Ez értelmes, a sor minden $z \in \mathbb{C}$-re konvergens.
2. Ha $y \in \mathbb{R}$, akkor $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, specálisan $e^{i\pi} = -1$.
3. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

Megjegyzés

- A komplex exponenciális függvény periodikus, a periódusa $2\pi i$.
- Ugyanígy lehet értelmez az a^z függvényt tetszőleges $a > 0$ valósra: $a^z = e^{z \cdot \ln a}$.
- Viszont a logaritmusfüggvény és a nempozitív alapú hatványfüggvények nem értelmezhetőek az egész $\mathbb{C}$-n.

Komplex trigonometrikus függvények

Definíció

Legyen $z \in \mathbb{C}$-re $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ és $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

Tétel

1. Ez értelmes, a sorok minden $z \in \mathbb{C}$-re konvergensek.
2. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ és $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
3. Ha $y \in \mathbb{R}$, akkor $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$ és $\sin(iy) = i \cdot \operatorname{sh} y$.

Megjegyzés

- A komplex trigonometrikus függvények nem korlátosak.
- Nem véletlen, hogy a hiperbolikus függvények ennyire hasonlítottak a trigonometrikus függvényekre: ugyanannak a komplex függvénynek egy-egy egyenesre vett megszorításai.

Speciális típusú függvénysorok

Megjegyzés

A hatványsorok – $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ alakú sorok – helyett más speciális alakú függvénysorokat is érdemes vizsgálni. Két példa:

- Az $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(npx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mpx)$ alakú sorok a **Fourier-sorok**. A $2\pi p$ szerint periodikus függvényeket lehet hullámfüggvények összegére bontani. Amikor többféle hangot egyszerre hallunk, akkor automatikusan Fourier-sorfejtést csinálunk.
- A $\Lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ alakú sorok a **Dirichlet-sorok**. Például ha $a_n = 1$ minden n-re, akkor a Riemann-zeta függvényt kapjuk. Ezek vizsgálata nagyon nehéz, de számelméleti szempontból nagyon fontos.

Tartalomjegyzék