

1. Melyek gyűrűk a következők közül?
  - a)  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , ha  $n \in \mathbb{N}$ ,
  - b)  $\mathbb{Z}[x] \bmod f(x)$ , ahol  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  egy nemnulla polinom és a műveletek modulo  $f(x)$  értendők,
  - c)  $(G, +, \cdot)$ , ahol  $(G, \cdot)$  egy csoport és  $g + h = e$  minden  $g, h \in G$ -re,
  - d)  $(G, +, \cdot)$ , ahol  $(G, +)$  egy Abel-csoport és  $g \cdot h = e$  minden  $g, h \in G$ -re,
  - e)  $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ , ahol  $a \oplus b = a + b + 1$  és  $a \otimes b = a \cdot b + a + b$ ,
  - f)  $\left(\left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\right\}, +, \cdot\right)$ , ahol  $p$  egy rögzített prím és
  - g)  $R[\varepsilon] = (\{r + r'\varepsilon \mid r, r' \in R\}, +, \cdot)$ , ahol  $R$  egy gyűrű,  $(r + r'\varepsilon) + (s + s'\varepsilon) = (r + s) + (r' + s')\varepsilon$  és  $(r + r'\varepsilon) \cdot (s + s'\varepsilon) = (r \cdot s) + (r \cdot s' + r' \cdot s)\varepsilon$ .
2. A fentiek közül melyek egységelemesek? Melyek kommutatívak? Melyek integritási tartományok (azaz még nincs bennük nullosztó sem)?
3. Legyen  $R$  gyűrű. Mutasd meg, hogy ha a)  $r^2 = r$ , b)  $r^3 = r$  minden  $r \in R$ -re akkor  $R$  kommutatív!
4. Legyen  $R$  egységelemes gyűrű és  $a \in R$  nilpotens (azaz  $a^n = 0$  valamely  $n \in \mathbb{N}$ -re). Mutasd meg, hogy ha  $1 + a$  invertálható!
5. \* Mutasd meg, hogy ha  $1 + ab$  invertálható egy  $R$  egységelemes gyűrűben, akkor  $1 + ba$  is invertálható!
6. A következők közül melyek gyűrűhomomorfizmusok?
  - a)  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,
  - b)  $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ ,
  - c)  $\beta : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}, \beta(p) = p(m)$  egy rögzített  $m \in \mathbb{Z}$ -re,
  - d)  $\gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, a + bi + cj + dk \mapsto a$ , ahol  $\mathbb{H}$  a Hamilton-kvaterniók ferdeteste.
7. Mi a fenti homomorfizmusok magja és képe?
8. Legyen  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mi  $(a), (b)$  és  $(a, b)$  – az adott elem(ek) által generált ideálok?
9. Mit mondhatunk az olyan  $R$  gyűrűről, amelyben minden  $a \in R$  elemre a  $\{0, a\}$  halmaz ideálja  $R$ -nek?
10. Bizonyítsd be, hogy  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \sim \mathbb{C}$ ! Mik  $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1)$  ideáljai?
11. Invertálható-e  $2x + 1 + (x^2 + x + 1) \in \mathbb{Q}[x]$ ? Ha igen, mi az inverze?