

1. Az alábbiak közül melyek vannak (redukált) sorlépcsős alakban? Írd fel a megfelelő egyenletrendszerek megoldásait (paraméteres és vektoros alakban is)!

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) & \text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) & \text{c) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 \text{d) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \text{e) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &
 \end{array}$$

2. Oldd meg egyszerre a következő lineáris egyenletrendszereket.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Mit jelent a megoldás a sorok és az oszlopok szerint nézve?

3. Mi az $x + 3y + z = 2$ és $x + 2y + 2z = 5$ síkok metszete? Írd le paraméteresen és vektoriálisan is!

4. A következők közül melyek alterek és affin alterek \mathbb{R}^3 -ben? Azokhoz, amik affin alterek, keress \underline{u} vektort és V alteret úgy hogy a halmaz $\underline{u} + V$ alakú legyen!

a) $\{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\underline{v}| = 1\}$, b) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$ és c) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 1\}$.

5. Oldd meg a következő lineáris egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 4x + 4y + 4z = 1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 7x + 14y - 21z = 7 \\ x + 2y - 3z = 1 \\ 5x + 10y + 15z = 1 \\ 3x + 6y - 9z = 3 \end{cases}
 \end{array}$$

El lehet-e hagyni néhány egyenletet úgy, hogy ekvivalens rendszert kapjunk? Ha igen, melyikeket?

6. Mi az $2x - y + z = 1$ sík paraméteres egyenlete? A megoldást írd le vektoriálisan is!

7. Legyen V vektortér és $U, W \leq V$ alterek. Melyek igazak az alábbiak közül?

- a) $U \cap W$ altér,
- b) $U \cup W$ altér és
- c) $\{\underline{u} + \underline{w} \mid \underline{u} \in U, \underline{w} \in W\}$ altér.

8. Legyen V vektortér az \mathbb{F} test felett és $U \subset V$ nem üres részhalmaz. Mutasd meg, hogy U pontosan akkor altér, ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in U$ -ra és $\alpha \in \mathbb{F}$ -re $\underline{u} - \alpha \underline{v} \in U$.