1. a) Bizonyítsuk be, hogy egy $(X,<)$ rendezett halmaz akkor és csak akkor jólrendezett, ha nincs benne végtelen, szigorúan leszálló lánc! $(x_1 > x_2 > x_3 > \ldots \in X)$

   b) Mutassuk meg, hogy jólrendezett halmaz minden részhalmaza jólrendezett!

   c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy rendezett halmaz véges sok jólrendezett részhalmazának az uniója, akkor maga is jólrendezett!

2. Határozzuk meg az első n Fibonacci-szám összegét!

3. Mutassuk meg, hogy $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

   A jelölések: $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ és $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$.

4. Hány olyan n-hosszú sorozat képezhető az 1, 2, 3, 4 számokból, melyek 1-gyel kezdődnek, és minden szám pontosan 1-gyel különbözik az előzőtől?

---

5. a) Legyen $(X,<)$ rendezett halmaz és $S_1, S_2, \dots \subset X$ jólrendezett részhalmazok sorozata úgy hogy minden $i<j$, $x \in S_i$ és $y \in S_j$ esetén $x<y$. Mutasd meg, hogy $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ is jólrendezett!

   b) Lássuk be, hogy $\mathbb{Z}$ nem jólrendezett a szokásos rendezésével, és adj meg rajta egy másik rendezést, ami jólrendezés!

6. Legyen $g_0 = a$, $g_1 = b$ és $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ ha $n \geq 2$ – az általánosított Fibonacci-sorozat. Mutasd meg, hogy $g_n = af_{n-1} + bf_n$ minden n-re (f_n jelöli az n. Fibonacci számot)!

7. Mennyi az alábbi sokemeletes kifejezés értéke, ha a képletben n darab törtvonal van?

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1+1}}}}$$

8. Hány olyan n-hosszú sorozat van, aminek minden tagja 0 vagy 1 és nincs benne két szomszédos 0?

9. Igazoljuk, hogy a) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ és b) $\left[\sqrt{[x]}\right] = [\sqrt{x}]$. Itt $[\cdot]$ az egészrész függvény, azaz $[x]$ a legnagyobb olyan n egész, melyre $x \geq n$.

A feladatsorok elérhetők az előadó honlapján: `www.math.bme.hu/~merdelyi/bevalg1/`