Bevezetés az Algebrába 1 **3. feladatsor** **2024.09.16-20.**

1. Számold ki $(288, 204)$-t az Euklideszi algoritmus segítségével és írd fel $288m + 204n$ alakban!
2. Mutasd meg, hogy $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a > 1$ esetén $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.
3. Mutasd meg, hogy ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor $17^2 \nmid (n-5)(n+12) + 51$.
4. Mutasd meg, hogy ha $(a^2, b) = (a, b^2)$, akkor $(a^3, b^7) = (a^7, b^3)$.
5. Mutasd meg, hogy
   a) $4k + 1$ alakú számok szorzata is $4k + 1$ alakú,
   b) végtelen sok $4k + 3$ alakú prím van. (Útmutatás: mik $4n! - 1$ prímosztói?)
6. * Mik azok a páros számok amiknek egyértelmű az irreducibilisekre bontása $2\mathbb{Z}$-ben (a páros számok nem-egységelemes gyűrűjében)?

---

7. Add meg az alábbi egyenletek egész és természetes megoldásainak halmazát!
   a) $288x + 204y = 1$,
   b) $288x + 204y = 30$ és
   c) $288x + 204y = 300$.
8. Mi az alábbi számok legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse?
   a) $2^{23}3^{10}7^{13}$ és $2^{15}7^{10}13^5$
   b) $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^5$ és $3^{15}7^{20}11^2$ (itt először definiáld a kérdéses fogalmakat 3 számra)
9. Hány 0 van a 100! (100 faktoriális) szám tízes számrendszerbeli alakjának a végén?
10. * Mely p prímekre négyzetszám $(2^{p-1} - 1)/p$?
11. * Tekintsük a $N : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}$ leképezést, melyre, $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Mutasd meg, hogy
    a) ha $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, akkor $N(xy) = N(x)N(y)$,
    b) $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ egység $\iff$ $|N(x)| = 1$,
    c) ha $N(x) \in \mathbb{Z}$ egy prímszám, akkor x irreducibilis $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-ben,
    d) ha $p \in \mathbb{Z}$ egy olyan prím, aminek a maradéka 8-cal 3 vagy 5, akkor $p \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ is irreducibilis és
    e) 7, 17 és 23 nem irreducibilisek $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-ben!

A feladatsorok elérhetők az előadó honlapján: `www.math.bme.hu/~merdelyi/bevalg1/`